3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Intuitivamente, podemos decir que una función es continua en un punto si somos capaces de pintarla, cerca de ese punto, sin levantar el lápiz del papel, o si somos capaces de recorrerla con el dedo sin encontrarnos ningún obstáculo (saltos, indefiniciones, etc.). Pero la continuidad de una función se puede estudiar en un punto, en un intervalo o en todo su dominio de forma más precisa.

3.1. Continuidad de una función

En lenguaje matemático, la anterior definición simple, se complica bastante y se expresa así:

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, X un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a \in X$, se dice que la función $f(x)$ es **continua en el punto** $x = a$, si:

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - a| < \delta$, $x \in X$ se cumple que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Esto lo podemos enunciar diciendo que, si nos acercamos al punto a, entonces las imágenes de la función se aproximarán a la imagen de a.

Si esto no ocurre, entonces, la función **no** será continua en $x = a$ y diremos que la función tiene una discontinuidad en $x = a$.

Compara la definición de continuidad con la de límite, y observa que ahora el punto a debe pertenecer al intervalo X, mientras que en la de límite podía no ocurrir. Esta relación puede expresarse de la siguiente forma:

Una función $f(x)$ es **continua en el punto** $x = a$ sí, y solo sí, se cumplen estas tres condiciones:

- Que para el punto $x = a$ exista $f(a)$.
- Que exista y sea finito el límite de la función para $x = a$, lo que implica que existan los límites laterales y coincidan.
- Que los dos valores anteriores coincidan:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Bajo estas tres condiciones, la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

Continuidad de una función en un intervalo abierto

Para que una función sea continua en un intervalo abierto, la función debe ser continua en todos los puntos del intervalo.

Si lo fuera en todo el dominio, decimos que la función es continua.

Actividad resuelta

- *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

Las funciones polinómicas son continuas en toda la recta real. El único punto dudoso es $x = 2$.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia

Estudio de la continuidad de la función en el punto $x = 2$:

Comprobemos, como primera medida, que la función está definida en $x = 2$.

Para $x = 2$, tenemos que determinar $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$, luego existe.

Calculamos, entonces los límites laterales de la función para $x = 2$.

Limite por la izquierda: $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$

Limite por la derecha: $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2) = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$

Los límites laterales, existen, son finitos y coinciden.

Veamos si coincide, el límite de la función con el valor de la función en $x = 2$.

$$f(2) = 8 = \lim_{x \to 2} f(x)$$

Luego, como se cumplen las tres condiciones, la función es continua en $x = 2$.
Como ese era el único punto dudoso, se puede afirmar que la función es continua en toda la recta real.

3.2. Propiedades de las funciones continuas

Las funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son siempre continuas en su dominio.

Por lo tanto, presentarán discontinuidades en aquellos puntos en los que no esté definida y, por lo tanto, no pertenezcan a su dominio.

Operaciones de funciones continuas

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el punto $x = a$, entonces podemos afirmar que:

$f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$.

$f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a$, si $g(a) \neq 0$.

$f(g(x))$ es continua en $x = a$, si f es continua en $g(a)$.

Actividades resueltas

- *Las funciones polinómicas son funciones continuas en todo $\Re$.*

Basta comprobar que la función $f(x) = x$, la función $f(x) = a$ son funciones continuas para comprobar que cualquier función polinómica es suma y producto de estas funciones.

- *Las funciones racionales son continuas en todo $\Re$ salvo para los valores que anulan al denominador. Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$.*

En efecto, las funciones racionales son cociente de funciones polinómicas, que son continuas en toda la recta real.

La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$ es continua en $\Re - \{2, -2\}$, pues el denominador se anula en dichos valores.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia

3.3. Tipos de discontinuidad

Existen varios tipos de discontinuidades de las funciones, que se expresan en el cuadro siguiente:

<table>
<tr><td rowspan="2">EVITABLES
(Existen los límites laterales y son finitos e iguales)</td><td colspan="2">No existe imagen $f(a)$ en el punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">La imagen $f(a)$ existe, pero no coincide con los límites laterales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INEVITABLES
Los límites laterales no existen, bien porque alguno es infinito o porque son distintos, o alguno de los límites laterales no existe.</td><td rowspan="2">De primera especie</td><td>De salto finito (Límites laterales finitos pero distintos)</td></tr>
<tr><td>De salto infinito (Alguno (o los dos) límites laterales son infinitos)</td></tr>
<tr><td>De segunda especie</td><td>No existe alguno de los límites laterales.</td></tr>
</table>

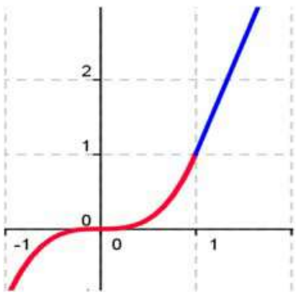
Las **discontinuidades evitables**, se llaman así porque se pueden solventar mediante la redefinición de la función en el punto, bien porque no estuviera definida, bien porque no coincidiera la imagen con los límites laterales, que existen, coinciden y son finitos.

Las **discontinuidades inevitables** vienen dadas porque:

- los límites laterales existen, son finitos y no coinciden (de **primera especie** de salto finito). Salto es igual a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) - \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
- existen, pero alguno es infinito (de primera especie de salto infinito). Salto infinito.
- o no existe alguno de los límites laterales o los dos (de **segunda especie**).

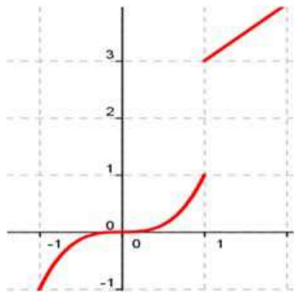
Discontinuidad evitable

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$$



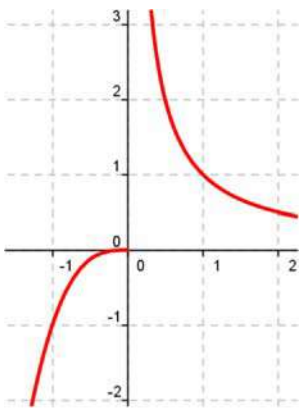
Discontinuidad de primera especie salto finito

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ x + 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$



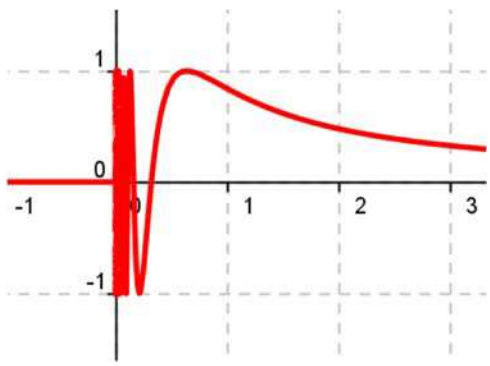
Discontinuidad de primera especie salto infinito

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



Discontinuidad de segunda especie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ sen\ \dfrac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$$



Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividad resuelta

- *Estudia la continuidad de los ejemplos anteriores.*

Observa que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$ no está definida en x = 1. Bastaría definir $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x \leq 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$ para que la función fuese continua. Por tanto, la función tiene una discontinuidad evitable en x = 1, siendo la función continua en $\Re$ – {1}.

La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ x + 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ tiene ambos límites laterales en x = 1 y son finitos, pero distintos, por lo que tiene una discontinuidad de primera especie en x = 1 de salto finito, con salto 2. Es una función continua en $\Re$ – {1}.

La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$ tiene el límite a la derecha de 0, infinito, por lo que tiene en x = 0 una discontinuidad de primera especie de salto infinito. La función es continua en $\Re$ – {0}.

La función $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ sen\frac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$ no tiene límite a la derecha de 0. La función seno tiene fluctuaciones cada vez más juntas por lo que dicho límite no existe. Es una discontinuidad de segunda especie. La función es continua en $\Re$ – {0}.

Actividades propuestas

25. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x - 5}$

c) $f(x) = log_2(x - 3)$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & si\ x \leq 0 \\ 1 + e^x & si\ x > 0 \end{cases}$

26. Determina el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & si\ x \leq 1 \\ k + x & si\ x > 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

27. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & si & x < -1 \\ 2 + x^2 & si & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3}{x} & si & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = x - \sqrt{x - 2}$

c) $f(x) = |x - 3| - 1$