

# TEMA 6: LÍMITES Y CONTINUIDAD.

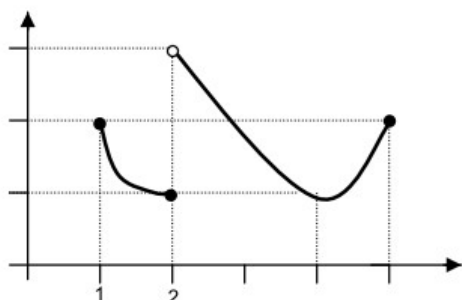
## Problemas de cálculo de límites.

1. Calcular los siguientes límites no indeterminados<sup>1</sup>:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4x + 3)$       d)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4x)$       e)  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 5)$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow e} (1 + \ln x)$       g)  $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log x$       h)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x^2 + 4x)$       i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$       j)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}}$

<sup>1</sup> Es decir, se pueden hacer por sustitución directa, ya que límite e imagen coinciden.

2.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe  $\lim f(x)$  en los siguientes casos:

- a) Cuando  $x \rightarrow 1$   
 b) Cuando  $x \rightarrow 2$   
 c) Cuando  $x \rightarrow 4$   
 d) Cuando  $x \rightarrow 5$

3. Representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Obtener a continuación analíticamente  $\lim f(x)$  cuando  $x \rightarrow 1$ ,  $x \rightarrow 3$ ,  $x \rightarrow 5$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ , y comprobar en la gráfica.

4- Calcular los siguientes límites de funciones polinómicas:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1)$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 1)$       c)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^7$       d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)^7$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x^2 - 3x - 10)$       f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + 2x + 5)$       g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x + 1)$       h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + x + 7)$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x + 7)$       j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 100x - 50)$       k)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 100x + 200)$

(Soluc: a) 7; b)  $\infty$ ; c) 0; d)  $\infty$ ; e)  $\infty$ ; f)  $-\infty$ ; g)  $\infty$ ; h)  $-\infty$ ; i) 10; j)  $\infty$ ; k)  $\infty$ )

5- Calcular los siguientes límites por sustitución directa y, en algunos casos, operando:

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + 3 \right)$       2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$       3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( 5 - \frac{1}{x^2} \right)$       4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 5 - \frac{1}{x^2} \right)$       5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$   
 6)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x}$       7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}$       8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+2}{x^2}$       9)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+2}{x^2}$       10)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x+2}{x^2}$   
 11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x+2}{x^2}$       12)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{x-1}$       13)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x-1}$       14)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 0,5^{x-1}$       15)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5^{x-1}$   
 16)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)$       17)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x)$       18)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x}$       19)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x}$       20)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x$   
 21)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$       22)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log (x^2 + 1)$       23)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$       24)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \log \sqrt{x}}$       25)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{x^2}$   
 26)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \log x + \frac{3x+2}{x^2} \right)$       27)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{e^x} \right)$       28)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+3} \ln x \right)$       29)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x^2 \log x}$       30)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} - x \right)$

(Soluc: 1) 3; 2) 0; 3) 4; 4) 5; 5) 0; 6) 1; 7) 0; 8) 0; 9) 0; 10) 5; 11)  $\infty$ ; 12)  $\infty$ ; 13) 0; 14) 0; 15)  $\infty$ ; 16)  $\infty$ ; 17) 1; 18) 0; 19)  $\infty$ ; 20)  $\infty$ ; 21)  $-\infty$ ; 22)  $\infty$ ; 23) 0; 24) 0; 25)  $-\infty$ ; 26)  $\infty$ ; 27)  $\infty$ ; 28)  $\infty$ ; 29) 0; 30)  $-\infty$ )

## CALCULO DE INDETERMINACIONES.

6- Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x-3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2-x-2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{x-x-2}$

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{x^5-2}$

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+8}{x^3-2}$

k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} \right)$

l)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2} \right)$

m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x})$

n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2})$

o)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}} \right)$

SOL.: a) - 1/9; b) 0; c) -9; d) 1; e) -12; f) 0; g) 98/5; h)  $-\infty$ ; i) 0; j) -3; k) 0; l) -1; m)  $-\infty$ ; n) 0; o)  $-\infty$ .

7- (EXTRA) Calcular los siguientes límites de funciones racionales (nótese que en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = 3$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^4+x^2+x-3} = \frac{3}{7}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2x-4} = \frac{1}{2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = 2$

e)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3+9x^2+24x+16}{x^3+11x^2+40x+48} = 3$

f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9} = \pm\infty$

g)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2} = 1$

h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24} = \pm\infty$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^3+3x^2-1}{4x^3+16x^2-19x+5} = \pm\infty$

j)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x} = 0$

k)  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3} = \frac{1}{10b}$

NOTA: Cuando señalamos que el resultado de un límite es  $\pm\infty$ , no estamos indicando que haya dos límites (recordar que el límite, caso de existir, es único), sino que, a ambos lados de un valor finito, la función diverge a  $+\infty$  o  $-\infty$ .

8- (EXTRA) Calcular los siguientes límites infinitos (en algunos casos figura la solución):

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2x-4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x-2}{x^2-1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2} = \frac{2}{3}$

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+3x^2-1}{4x^3+16x^2-19x+5}$

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}$

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+a^3}{x^2-a^2} = \infty$

k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3} = 0$

m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2}{x+5}$

n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

o)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$

p)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3+\frac{x-2}{x+1}}{x+\frac{x^2}{x-2}} = \frac{1}{2}$

q)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$

r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x+2}{x-3}$

s)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

t)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}$