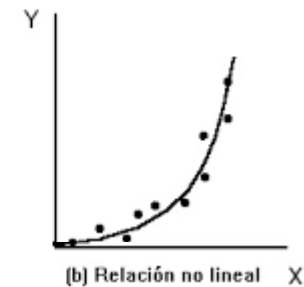
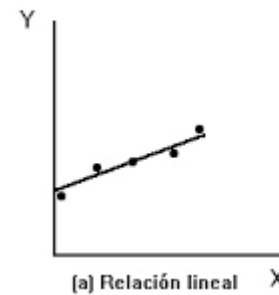


TEMA 5: FUNCIONES

Interpolación lineal y cuadrática

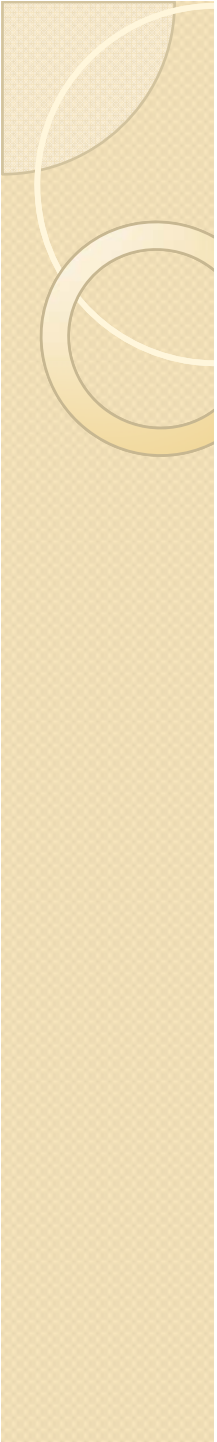


Interpolación LINEAL

Una función puede venir dada de varias formas:

- Mediante enunciado tipo problema de álgebra.
- Expresión algebraica, una ecuación que nos relaciona dos variables.
- Mediante una tabla de valores.
- Como una gráfica.

Si la dan en forma de Tabla puede que el valor que queremos saber no se encuentre en dicha tabla. Tendremos entonces que INTERPOLAR o EXTRAPOLAR.

- 
- La **interpolación** consiste en hallar un dato dentro de un intervalo en el que conocemos los valores en los extremos.
 - La **extrapolación** consiste en hallar un dato fuera del intervalo conocido, pero debe tenerse en cuenta que esté próximo a uno de sus extremos, pues en otro caso no es muy fiable el resultado obtenido.

Método de Interpolación Lineal

Método 1:

Dados dos puntos, (a,b) y

(c,d)

- Sustituimos en la ecuación de la recta

$$y=mx+n$$

- Resolvemos el sistema para encontrar el valor de m y n.
- Damos la solución

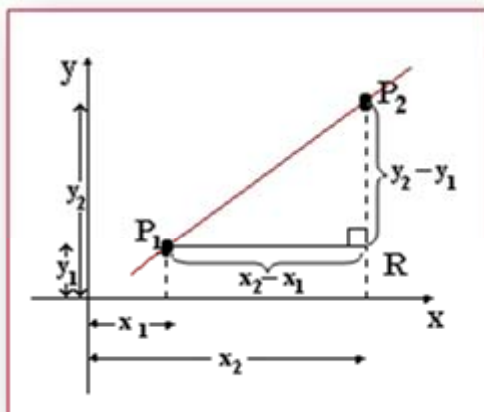
$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Método 2:

Dados dos puntos, (a,b) y (c,d)

- Sustituimos en la ecuación del punto pendiente de la recta

$$y-b=(c-a)/(d-b)(x-a)$$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ donde } x_1 \neq x_2.$$

Que es:

$$m = \frac{\text{cambio vertical (elevacion)}}{\text{cambio horizontal (desplazamiento)}}.$$

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Interpolación Cuadrática

Sea la Tabla:

X	Y
1	2
3	10
5	26

- Si nos dan tres puntos, calculamos las pendientes:
- $m = (10 - 2) / (3 - 1) = 8 / 2 = 4$
- $m = (26 - 10) / (5 - 3) = 16 / 2 = 8$
- Las pendientes no coinciden. $\rightarrow$ NO hay Interpolación lineal.

Interpolación cuadrática:

- Su forma será:
- $f(x) = a.x^2 + b.x + c$
- Sustituimos la x y la y por su valor, resolvemos el sistema y damos la solución
- $2 = a.1^2 + b.1 + c$
- $10 = a.3^2 + b.3 + c$
- $26 = a.5^2 + b.5 + c$, por el Método de Gauss

Solución del sistema $\rightarrow c = 1 \rightarrow b = 0 \rightarrow a = 1$

$f(x) = x^2 + 1$ es la función de interpolación.

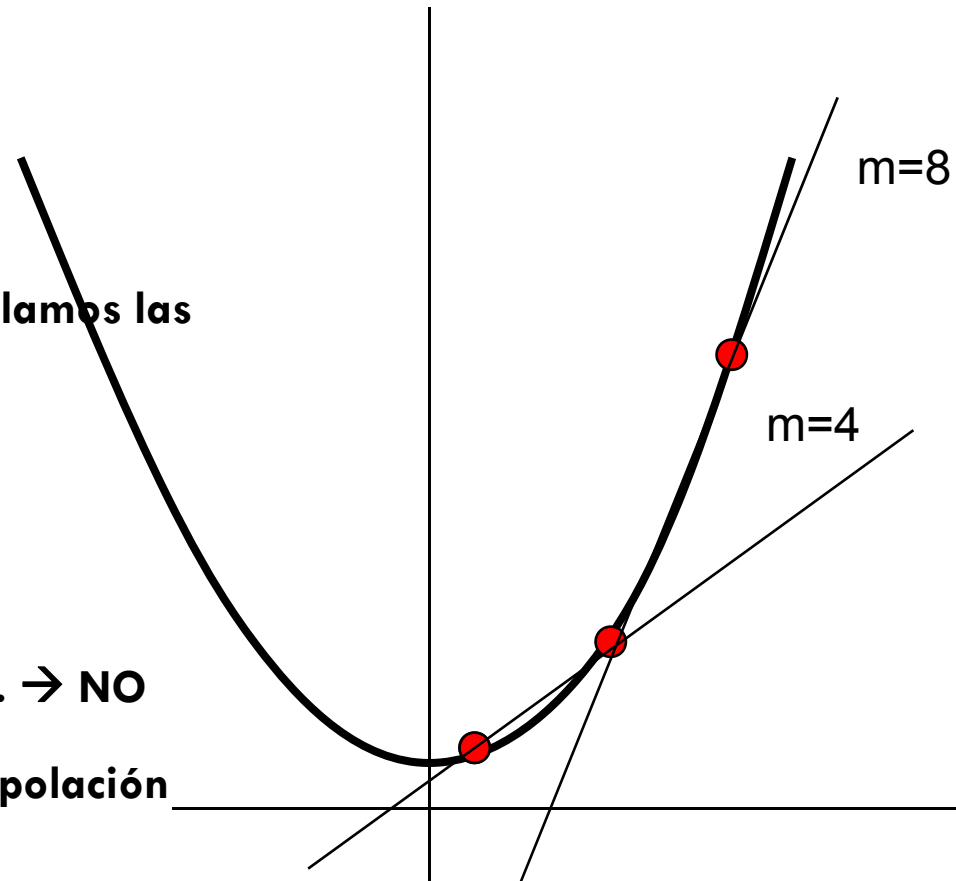
INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA

Sea la Tabla:

•	X	Y
•	1	2
•	3	10
•	5	26
•		

Si nos dan tres puntos, calculamos las pendientes:

- $m = (10 - 2) / (3 - 1) = 8 / 2 = 4$
- $m = (26 - 10) / (5 - 3) = 16 / 2 = 8$
- Las pendientes no coinciden. $\rightarrow$ NO hay Interpolación lineal.
- Debe pues hacerse una interpolación cuadrática.



INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA

Sea la Tabla:

- X Y
- 1 1
- 3 9
- 5 25
- 7 49

- Si nos dan más de DOS puntos, calculamos las pendientes:

- $m = (9-1)/(3-1) = 8/2 = 4$

- $m = (25-9)/(5-3) = 16/2 = 8$

- Las pendientes no coinciden. $\rightarrow$ NO hay Interpolación lineal.

- Si nos dan sólo tres puntos y no están alineados, debemos realizar una interpolación cuadrática.
- Pero en nuestro ejemplo, al darnos más de tres puntos en la Tabla, debemos comprobar si existe Interpolación Cuadrática:

x $\rightarrow$	1	3	5	7
$\Delta x \rightarrow$		2	2	2
y $\rightarrow$	1	9	25	49
$\Delta y \rightarrow$		8	16	24
$\Delta^2 y \rightarrow$		8	8	

- Vemos que $\Delta^2 y = 8 = \text{Cte}$
- Si $\Delta x = \text{Cte}$ e $\Delta^2 y = \text{Cte} \rightarrow$ F. Cuadrática
- Su forma será:
- $f(x) = a.x^2 + b.x + c$

Hallamos “a”, “b” y “c” resolviendo el sistema:

- $1 = a.1^2 + b.1 + c$
- $9 = a.3^2 + b.3 + c$
- $25 = a.5^2 + b.5 + c$ por Gauss

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 9.a + 3b + c = 9 \\ 25.a + 5b + c = 25 \end{cases}$$

A la (2) la quito 9 veces la (1)

A la (3) la quito 25 veces la (1)

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -6.b - 8.c = 0 \\ -20.b - 24.c = 0 \end{cases}$$

A 3x(3) la quito 10x(2)

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -6.b - 8.c = 0 \\ 16.c = 0 \end{cases}$$

- Y obtengo $c=0$
- Si $c=0 \rightarrow$ En la (2): $b=0$
- Si $b=0$ y $c=0 \rightarrow$ En la (1): $a=1$
- Luego la función interpoladora cuadrática será:
- $f(x) = a.x^2 + b.x + c$
- $f(x) = x^2$
- Interpolamos:
- $f(4) = 4^2 = 16$
- Extrapolamos:
- $f(8) = 8^2 = 64$

EJERCICIO 1

Sea la Tabla:

x / y

Año Habitantes

2002 7000

2005 13000

En la práctica
podemos simplificar
mucho las
operaciones haciendo
el siguiente cambio:

Año Habitantes

2 7

5 13

- Como sólo me dan dos pares de valores, realizo una interpolación lineal: $y=mx + n$
- Calculo la pendiente:
- $m = (13-7)/(5-2) = 6/3 = 2$
- Por la ecuación punto-pendiente:
- $y-y_0=m.(x-x_0)$
- $y-7 =2.(x-2)$
- $y=2.x -4+7$
- $f(x) = 2.x + 3$ sería la
- F. de Interpolación Lineal, que sirve tanto para interpolar como para extrapolar.
- $f(2004) \rightarrow f(4)=2.4+3 = 11$ miles de habitantes.
- $F(2010) \rightarrow f(10)=2.10+3=23$ miles habitantes.

EJERCICIO 2

El número de habitantes (en miles) de una determinada ciudad ha evolucionado según la siguiente tabla:

Años	1992	1994	2000
Población	360	366	410

Sabiendo que dicha población se ajusta a una función cuadrática, calcular la población en 1997.

ESTRATEGIA A SEGUIR PARA COEFICIENTES MUY GRANDES:

$$c + 1992.b + 1992^2 \cdot a = 360$$

$$c + 1994.b + 1994^2 \cdot a = 366$$

$$c + 2000.b + 2000^2 \cdot a = 410$$

Cambio: 1992 $\rightarrow$ 2 „ 1994 $\rightarrow$ 4

Queda:

$$c + 2.b + 2^2 \cdot a = 360$$

$$c + 4.b + 4^2 \cdot a = 366$$

$$c + 10.b + 10^2 \cdot a = 410$$

Resolvemos por Gauss:

$$c + 2.b + 4 \cdot a = 360$$

$$2.b + 12 \cdot a = 6$$

$$8.b + 96 \cdot a = 50$$

$\rightarrow$

$$c + 2.b + 4 \cdot a = 360$$

$\rightarrow$

$$2.b + 12 \cdot a = 6$$

$\rightarrow$

$$48 \cdot a = 26$$

De donde $a = 26/48 = 0,5416$, $b = -0,2500$; $c = 358,3333$

La función de interpolación cuadrática es:

$$f(x) = 0,5416 \cdot x^2 - 0,2500 \cdot x + 358,3333$$

Hallar, por ejemplo, $f(1997)$ sería hallar $f(7)$

• Antes Ahora

- 1992 $\rightarrow$ 2
- 1994 $\rightarrow$ 4
- 1996 $\rightarrow$ 6
- 1998 $\rightarrow$ 8
- 2000 $\rightarrow$ 10

• EJERCICIO 3

- El volumen de beneficios, en millones de €, de una empresa es el siguiente:
- Marzo → 8 M€ Abril → 7 M€ Mayo → 5 M€
- ¿Qué beneficios se pueden esperar para el mes de Julio?.

Miramos si los datos pueden encajar en una interpolación lineal:

$$m = (7 - 8) / (4 - 3) = -1$$

$$m = (5 - 7) / (5 - 4) = -2$$

La pendiente es el doble → No hay interpolación lineal.

Al darnos tres valores de referencia no alineados, lo más adecuado es hacer una INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA.

Adecuamos: Marzo → 1 Abril → 2 Mayo → 3 Julio → 5

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 8 = a.1^2 + b.1 + c \\ 7 = a.2^2 + b.2 + c \\ 5 = a.3^2 + b.3 + c \end{cases}$$

Solución:

$$y = -0,5x^2 + 0,5x + 8$$

Para $x = 5$ (Julio)

$$f(5) = -0,5.5^2 + 0,5.5 + 8 = -2$$

Se esperan unas pérdidas de
-2 M€