SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema para aprender: atiende, escucha, se paciente; y no lo dejes para después.

1. Sistemas de ecuaciones

Ecuaciones con dos incógnitas
Una ecuación con dos incógnitas es una igualdad en la hay dos variables, generalmente *x* e *y*, que están relacionadas entre sí.
→ Las ecuaciones con dos incógnitas de grado uno se llaman lineales. (Ser de grado uno exige que las incógnitas lleven exponente 1 y que no estén multiplicadas o divididas entre sí).
Las ecuaciones lineales son de la forma $\underline{ax+by=c}$, donde *a*, *b* y *c* son números; *x* e *y*, las incógnitas.
→ Una solución de la ecuación con dos incógnitas es cualquier par de números que verifican la igualdad. Una ecuación con dos incógnitas suele tener infinitas soluciones. Pueden darse diciendo $x=x_1$ e $y=y_1$; o diciendo, la solución es el par $\left(x_1,\ y_1\right)$.

Ejemplos:
a) Son ecuaciones con dos incógnitas las siguientes igualdades:

$$x+2y=17\,;\quad x^2-y=8\,;\quad x\cdot y=-1\,;\quad y=\sqrt{x^2-1}\,.$$

La primera de ellas es de grado uno: es lineal. La segunda y tercera son de grado dos; la cuarta es irracional.
Dos pares solución para cada una de esas ecuaciones son:

$x+2y=17$ → son solución *x* = 1, *y* = 8: par (1, 8); y el par (19, –1). No es solución (2, 7).

$x^2-y=8$ → son solución *x* = 3, *y* = 1: par (3, 1); y el par (–2, –4). No es solución (2, 4).

$x\cdot y=-1$ → son solución *x* = 1, *y* = –1: par (1, –1); y el par (4, –1/4). No es solución (0, –1).

$y=\sqrt{x^2-1}$ → son solución *x* = 1, *y* = 0: par (1, 0); y el par $\left(2,\ \sqrt{3}\right)$. No es solución (–1, 2).

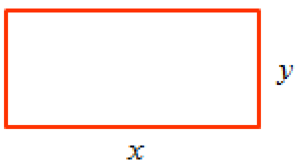
→ Una manera eficaz de encontrar pares de soluciones consiste en despejar una incógnita en función de la otra; a continuación, dando valores a la incógnita independiente (la no despejada) se obtienen los correspondientes en la otra (la despejada).
Las ecuaciones anteriores pueden despejarse como sigue:

$x+2y=17 \Rightarrow y=\dfrac{17-x}{2}$, o bien $x=17-2y$ → Observa: si *x* = 5, $y=\dfrac{17-5}{2}=\dfrac{12}{2}=6$, par (5, 6).

$x^2-y=8 \Rightarrow y=x^2-8$ → dando a *x* el valor 2, se obtiene *y* = –4: par (2, –4).

$x\cdot y=-1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{x}$ → Pares de soluciones son: (1, –1); (–1, 1); (3, –1/3)…

b) En un rectángulo de lados *x* e *y* pueden establecerse dos ecuaciones; una asociada a su perímetro; la otra, a su área.
Su perímetro es $p=2x+2y$; su área, $S=x\cdot y$.
Si se sabe que su perímetro es 100 m se obtiene la ecuación $100=2x+2y$.
Si se parte de que su área es 600 m^2 se obtiene la ecuación $600=x\cdot y$.



Hay infinitos rectángulos cuyo perímetro vale 100 m. Por ejemplo, el de base 40 y altura 10 m; o el de base 25 y altura 25 m, que resulta un cuadrado; … Pares, (40, 10); (25, 25); (30, 20)…
Hay infinitos rectángulos cuya área vale 600 m^2. Por ejemplo, el de base 60 y altura 10 m; o el de base 100 y altura 6 m; … Pares, (60, 10), (100, 6), (30, 20)…
Hay un rectángulo que cumple las dos condiciones a la vez: el de base *x* = 30 y altura *y* = 20 m.

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones.

Así, con las ecuaciones asociadas al rectángulo anterior puede formarse el sistema $\begin{cases} 2x+2y=100 \\ x\cdot y=600 \end{cases}$.

Los valores $x = 30$ e $y = 20$ son la solución del sistema: cumplen las dos ecuaciones a la vez, (Observa que también valdría la solución $x = 20$ e $y = 30$, correspondiente al rectángulo girado).

→ En este tema se estudiarán sistemas lineales de dos y tres ecuaciones con dos o tres incógnitas.

→ También se estudiarán sistemas no lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, como el de arriba.

2. Sistemas lineales con dos incógnitas

Su forma más simple es $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$ → Las incógnitas son x e y; las demás letras representan números: a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} se llaman coeficientes; b_1 y b_2, términos independientes.

Son lineales porque las incógnitas x e y llevan exponente 1; tampoco se multiplican o dividen.

→ La solución de un sistema es un par de valores de x e y que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Cuando la solución es única se dice que es compatible determinado (SCD).

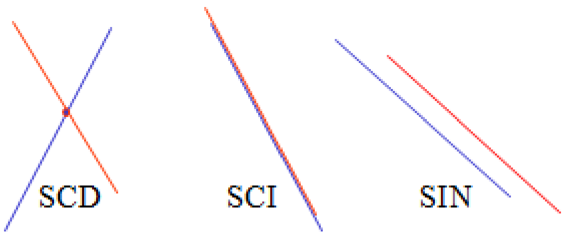
Si tiene infinitas soluciones se dice que es compatible indeterminado (SCI).

Si no tiene solución se llama incompatible (SIN).

Interpretación geométrica

Cada ecuación de la forma $ax+by=c$ determina los puntos de una recta en el plano. Para representarla basta con dar dos de sus puntos, que son dos de las soluciones de su ecuación.

Por tanto, un sistema de dos ecuaciones lineales está asociado a dos rectas.



- Esas rectas pueden cortarse, siendo el punto de corte la solución del sistema → (SCD).
- Si las rectas son coincidentes, todos sus puntos son solución: hay infinitas soluciones → (SCI).
- Si las rectas son paralelas, no hay ningún punto en común, no hay solución → (SIN).

Observaciones:

Dos rectas son coincidentes cuando tienen proporcionales sus coeficientes y sus términos independientes. Las ecuaciones (rectas) $2x+3y=-1$ y $4x+6y=-2$ son coincidentes.

Dos rectas son paralelas cuando tienen proporcionales sus coeficientes, pero no sus términos independientes. Las ecuaciones (rectas) $2x+3y=-1$ y $4x+6y=3$ son paralelas.

Resolución de sistemas

Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones. Para ello, se ha de transformar el sistema original en otro equivalente que tenga, al menos, una ecuación con una sola incógnita, la cual se podrá despejar con las técnicas habituales.

→ Un sistema es equivalente a otro si ambos tienen las mismas soluciones.

Las transformaciones que pueden hacerse en un sistema, de forma que no se alteren sus soluciones son:

1. Transponer números o incógnitas de un miembro a otro.
2. Multiplicar los dos miembros de una ecuación, por un número distinto de cero.
3. Sumar o restar a una ecuación otra multiplicada previamente por un número.

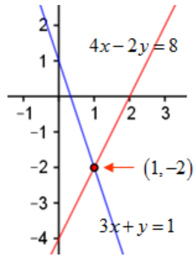
Estas transformaciones se concretan en los tres métodos clásicos de resolución de sistemas: sustitución, igualación y reducción.

Observación: para agilizar los comentarios y cálculos se designarán las ecuaciones 1ª y 2ª por $E1$ y $E2$, respectivamente. Si una ecuación se multiplica por un número k se indicará $k\cdot E1$ o $k\cdot E2$.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y su valor se sustituye en la otra. Se obtiene una nueva ecuación, cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo:



Para resolver por sustitución el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$ se procede así:

1) Se despeja *y* en la segunda ecuación, *E*2: $y=1-3x$. (Podría despejarse en *E*1, pero es mejor despejar en la ecuación que resulte más cómodo: evitar denominadores es más cómodo).

2) Se lleva (se sustituye) su valor a la primera ecuación: $4x-2(1-3x)=8$.

3) Se resuelve la nueva ecuación: $4x-2(1-3x)=8 \Rightarrow 4x-2+6x=8 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$.

4) El valor *x* = 1 se lleva a la ecuación despejada: $y=1-3\cdot 1=-2$.

La solución del sistema es: *x* = 1 e *y* = –2. (Comprueba que es correcto).

Método de reducción

Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: Para resolver por reducción el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$ puede procederse como sigue:

1) Se multiplica la segunda ecuación por 2: $\begin{array}{r} \\ 2\cdot E2 \end{array}\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$. (Los coeficientes de la *y* son –2 y 2).

2) Se suman ambas ecuaciones, término a término. Se obtiene: $10x=10 \Rightarrow x=1$.

3) Ese valor, *x* = 1, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones. Se obtiene *y* = –2.

→ Comprobar el resultado es una medida de precaución casi necesaria; se hace sustituyendo los valores de la solución en las ecuaciones iniciales: en las dos ecuaciones. En este caso, se hará con detalle. Si *x* = 1 e *y* = –2, entonces: $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases} \to \begin{cases} 4\cdot 1-2\cdot(-2)=8 \\ 3\cdot 1+(-2)=1 \end{cases}$, que, efectivamente, es cierto.

Método de igualación

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando ambas incógnitas se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.

Ejemplo: Para resolver por reducción el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ x-3y=-1 \end{cases}$ puede procederse como sigue:

1) Se despeja la incógnita *x* en ambas ecuaciones: $\begin{cases} x=\dfrac{8+2y}{4} \\ x=-1+3y \end{cases}$. (Sería análogo despejando *y*).

2) Se igualan los resultados y se resuelve la ecuación obtenida:

$$\frac{8+2y}{4}=-1+3y \Rightarrow 8+2y=-4+12y \Rightarrow 10y=12 \Rightarrow y=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}.$$

3) Ese valor, $y=\dfrac{6}{5}$, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones despejadas. Si se hace en *E*2:

$$x=-1+3\cdot\frac{6}{5} \Rightarrow x=-1+\frac{18}{5} \Rightarrow x=\frac{13}{5}.$$

<u>Discusión de un sistema</u>
Discutir un sistema consiste en determinar si es compatible determinado (SCD), compatible indeterminado (SCI) o incompatible (SIN).
→ Los tres ejemplos de sistemas de la página anterior son compatibles determinados.

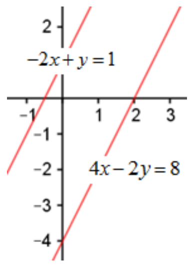
→ El sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -2x+y=1 \end{cases}$ es <u>incompatible</u>: no tiene solución.

Al resolverlo, por cualquiera de los métodos (veamos por reducción) se obtiene una igualdad imposible. En efecto:

$$\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2\cdot E2 \end{matrix} \begin{cases} 4x-2y=8 \\ -4x+2y=2 \end{cases} \to \text{sumando miembro a miembro} \Rightarrow$$

$0 = 10$, absurdo.

Recuerda que, gráficamente estaría relacionado con dos rectas paralelas.



→ El sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ -4x-2y=-6 \end{cases}$ es <u>compatible indeterminado</u>: tiene infinitas soluciones.

Al resolverlo, por cualquiera de los métodos se pierde una ecuación (o aparece repetida). En efecto:

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ -4x-2y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\cdot E1 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 4x+2y=6 \\ -4x-2y=-6 \end{cases} \to \text{sumando miembro a miembro} \Rightarrow 0 = 0.$$

Sistemas lineales compatibles indeterminados (2 × 2): ¿cómo se resuelven?
Lo acabamos de indicar: son sistemas con <u>infinitas soluciones</u> (SCI). Las ecuaciones que conforman estos sistemas se repiten: son equivalentes; y sus gráficas se corresponden con dos rectas idénticas. Algebraicamente, al transformar las igualdades se llegaría a la igualdad $0 = 0$.

Ejemplo:
El sistema $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ es compatible indeterminado. La segunda ecuación es el doble de la primera $(E2=2\cdot E1)$: son ecuaciones equivalentes. Por tanto: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \{2x-y=3$, pues la segunda ecuación sobra (es reiterativa).

En estos casos, las soluciones (que son infinitas) deben darse dependiendo de una de las incógnitas (que pasa a considerarse un <u>parámetro</u>: una letra que puede sustituirse por cualquier número real). Esas soluciones se llaman paramétricas. En el ejemplo que nos ocupa resulta más fácil despejar y en función de x, que al revés. Así, en la primera ecuación ($E1$) se deduce que $y=2x-3$.

Dando valores a x se obtienen las distintas soluciones del sistema. Así, si $x = 1$, $y = –1$; si $x = 3$, $y = 3$; si $x = –1$, $y = –5$…

→ Otra alternativa (la recomendada) consiste en hacer $x = \lambda$ y escribir él conjunto de soluciones en la forma: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda-3 \end{cases}$ → También podría escribirse $x = h$, siendo la solución $\begin{cases} x=h \\ y=2h-3 \end{cases}$.

Si en $E1$ se despeja x en función de y, se tendría:

$$x=\frac{3+y}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y \text{ ; y si se dice que } y=t \text{ (o cualquier otra letra)} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t \\ y=t \end{cases}.$$

Esta solución es aparentemente distinta de la anterior, pero ambas generan los mismos pares de soluciones. (Comprueba que para $y = –1$; 3; $–5$…, los valores de x son los dados arriba).

Qué es un parámetro

En Matemáticas, un parámetro es un número que se deja indeterminado; ese número se denota con una letra cualquiera, λ, *t*, *h*, *p*, *m*, … En una ecuación (o en un sistema) ocupa la posición de un coeficiente o de un término independiente. Así, en la ecuación $2x - y = m$, la *m* puede tomar el valor que se quiera (aunque a veces, hay algún valor que no puede tomar; en eso consiste la *discusión*, en decir qué pasa si *m* toma o no un determinado valor). Obviamente, la ecuación cambia al hacerlo *m*: si *m* = 0, la ecuación es $2x - y = 0$; si *m* = –5, la ecuación será $2x - y = -5$.

¿Es el significado de *m* análogo al de *x* o *y*? -No.

→ En una ecuación, las incógnitas *x* e *y* se condicionan una a otra: para un valor concreto de *x*, la *y* solo puede tomar el valor que cumpla la ecuación. Si la ecuación es $2x - y = 0$, para *x* = 4, la *y* tiene necesariamente que tomar el valor 8, *y* = 8.

→ El parámetro, en cambio, puede tomar cualquier valor; y ese valor genera una ecuación en cada caso. Es lo que se ha dicho más arriba para $2x - y = m$: si *m* = 0, se obtiene $2x - y = 0$; si *m* = –5, la ecuación es $2x - y = -5$. Y cada una de estas ecuaciones tiene soluciones distintas.

→ Un parámetro también puede darse en la solución. Es lo que se ha decidido en el sistema anterior, $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$, cuya solución es $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 3 \end{cases}$. Aquí la única variable es λ, aunque al variar λ también lo hacen *x* e *y*, pero ambas están condicionadas por λ; y no al revés. Así, si λ = 1, entonces *x* = 1 e *y* = –1; o si λ = 7, se deduce que *x* = 7 e *y* = 11.

Al revés no puede hacerse. No se puede partir, por ejemplo, de que *x* = 2 e *y* = –1, pues en ese caso se obtendría $\begin{cases} 2 = \lambda \\ -1 = 2\lambda - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$, que es contradictorio.

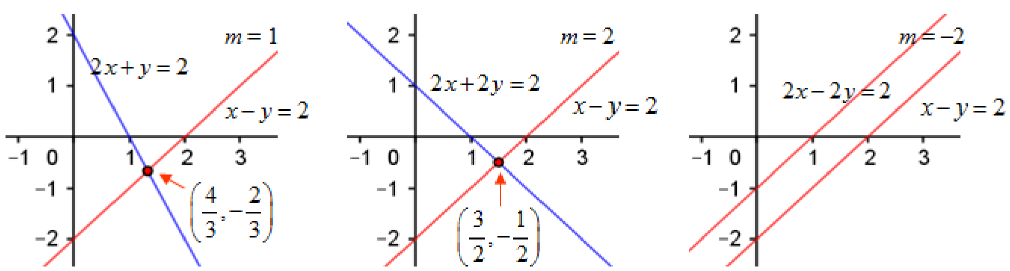
Sistemas con un parámetro: discusión

En los sistemas con un parámetro alguno de los coeficientes o términos independientes está indeterminado, se ha expresado con una letra. Por ejemplo, en el sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$ aparece una *m*, que es el coeficiente de la *y* en *E*2. Si esa *m* cambia de valor, el sistema y su la solución también lo hacen, serán diferentes. Así:

- Si *m* = 1, el sistema es $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$, cuya solución es $x = \frac{4}{3}; y = -\frac{2}{3}$. (Compruébalo).
- Si *m* = 2, el sistema es $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$, cuya solución es $x = \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{2}$. (Compruébalo).
- Si *m* = –2, el sistema es $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$, que no tiene solución. En efecto, si se multiplica por 2 la

primera ecuación se obtiene: $\begin{matrix} 2E1 \\ \ \end{matrix}\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$ → y restando *E*1 – *E*2 se tiene 0 = 2, que es absurdo.

A continuación se da su interpretación geométrica.



Un método de discusión

Lo que acabamos de hacer sería interminable; además, ¿cómo se ha encontrado el valor $m = -2$, para el cuál el sistema es incompatible?; ¿habrá más casos especiales?

La respuesta a esta pregunta se encuentra resolviendo el sistema en función del parámetro; a continuación, se analiza si esa solución es posible y, en su caso, si depende o no de los valores que tome el parámetro.

Así, para el ejemplo anterior $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases}$, resolviendo el sistema (por reducción) se tiene:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \begin{matrix} 2E1 \\ \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \text{(restando)} \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=4 \\ (m+2)y=-2 \end{cases} \to \text{(despejando)}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{-2}{m+2}$. Esta solución no tiene sentido cuando el denominador es 0. Esto es, si $m+2=0$; que se cumple para $m = -2$. (Para cualquier otro valor de m no hay dificultades).

Por tanto, la discusión puede hacerse como sigue:

- Si $m = -2$, el sistema es incompatible.
- Si $m \neq -2$, el sistema es compatible determinado.

Para cualquiera de estos casos (con $m \neq -2$), la solución completa se halla como siempre:

Si $y = \dfrac{-2}{m+2}$ $\to$ (sustituyendo en $E1$: $x-y=2$) $\Rightarrow x - \dfrac{-2}{m+2} = 2 \Rightarrow x = 2 + \dfrac{-2}{m+2} \Rightarrow x = \dfrac{2m+2}{m+2}$.

Observación:

La solución genérica del sistema, para $m \neq -2$, es $x = \dfrac{2m+2}{m+2}$ e $y = \dfrac{-2}{m+2}$. Para cada valor de m se obtiene una solución, que se encuentra sustituyendo el valor de m en esas fórmulas. Así, por ejemplo: si $m = 0 \to x = 1$, $y = -1$; si $m = -5 \to x = 8/3$; $y = 2/3$; …

Otra forma de discusión

Consiste en transformar el sistema, mediante el método de reducción (restando o sumando ecuaciones), buscando que la segunda ecuación quede con una sola incógnita. Así:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \to \dots \to \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a'_{22}y = b'_2 \end{cases}.$$ (También podría quedar $E2 \equiv a'_{21}x = b'_2$).

Se analiza ahora la segunda ecuación: $E2 \equiv a'_{22}y = b'_2$, pudiendo suceder:

1) Si $a'_{22} \neq 0$, puede despajarse *y*: $y = \dfrac{b'_2}{a'_{22}}$ $\to$ sistema compatible determinado: solución única.

2) Si $a'_{22} = 0$ y $b'_2 = 0$, la ecuación $E2$ queda $0y = 0$ $\to$ sistema compatible indeterminado: la incógnita *y* puede tomar cualquier valor; para cada uno de esos valores de *y*, la *x* tomará el correspondiente.

3) Si $a'_{22} = 0$, pero $b'_2 \neq 0$, la ecuación $E2$ queda $0y \neq 0$, que es imposible $\to$ sistema incompatible.

En el sistema de arriba se hace:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \dots \begin{matrix} 2E1 \\ E2-2E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=4 \\ (m+2)y=-2 \end{cases} \to \left[a'_{22} = m+2;\ b'_2 = -2\right].$$

Ahora puede observarse:

1) Si $m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$, SCD;

2) Como $b'_2 = -2 \neq 0$ el sistema no puede ser indeterminado;

3) Como $a'_{22} = m+2 = 0$ si $m = -2$, siendo $b'_2 \neq 0$, para $m = -2$ el sistema es incompatible.

$\to$ A continuación se proponen tres ejercicios con el fin de asimilar lo indicado.

Ejercicio 1

Discute, en función de los valores del parámetro *m*, el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases}$.

<u>Solución</u>:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \text{(Restando)} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=2 \\ (m+2)y=0 \end{cases}.$$

Si $m=-2$, la segunda ecuación queda $(-2+2)y=0 \Leftrightarrow 0y=0 \Leftrightarrow 0=0 \to$ SCI.

Para cualquier otro valor se *m*, la 2ª ecuación queda $(m+2)y=0 \Rightarrow y=0 \to$ SCD.

En ningún caso el sistema es incompatible.
Por tanto:

- Si $m \neq -2$, el sistema es compatible determinado. $\begin{cases} 2x-2y=2 \\ (m+2)y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2\cdot 0=2 \to x=1 \\ y=0 \uparrow \end{cases}$.
- Si $m=-2$, el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 0=0 \end{cases}$ (SDI) $\Rightarrow x=1+y$.

Para cada valor de *y* se obtiene un valor de *x*. Por ejemplo, si $y=2$, $x=3$; si $y=-1$, $x=0$; …

La solución suele darse en la forma: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$, siendo *t* cualquier número real: $t \in \mathbf{R}$.

Ejercicio 2

Sea el sistema $\begin{cases} 4x-y=-6 \\ kx+2y=2 \end{cases}$. Calcula los valores que debe tomar *k* para que el sistema sea:

a) Compatible determinado. b) Compatible indeterminado. c) Resuélvelo cuando $k=-1$.
<u>Solución</u>:
El sistema inicial se transforma como sigue:

$$\begin{cases} 4x-y=-6 \\ kx+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} 8x-2y=-12 \\ kx+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 8x-2y=-12 \\ (8+k)x=-10 \end{cases}.$$

La segunda ecuación es: $E2 \equiv (8+k)x=-10 \to$ Puede despejarse *x*: $x=-\dfrac{10}{k+8}$, expresión que tiene sentido cuando $k \neq -8$; no tiene sentido si $k=-8 \to$ la $E2$ quedaría: $0x=-10$, que es imposible.
Por tanto:
a) Si $k \neq -8$, el sistema es compatible determinado. (Si $k=-8$, SIN).
b) El sistema nunca es compatible indeterminado.

c) Si $k=-1$, el sistema queda: $\begin{cases} 4x-y=-6 \\ -x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} 8x-2y=-12 \\ -x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 8x-2y=-12 \\ 7x=-10 \end{cases}$.

Despejando en $E2$ y sustituyendo en $E1$: $x=-\dfrac{10}{7} \to 4\cdot\left(-\dfrac{10}{7}\right)-y=-6 \Rightarrow y=-\dfrac{40}{7}+6 \Rightarrow y=\dfrac{2}{7}$.

Ejercicio 3

Sea el sistema $\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$. Comprueba que si $b=-2$, el sistema es incompatible,

<u>Solución</u>:

Si $b=-2$, el sistema es $\begin{cases} 4x-2y=5 \\ -2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ -2E2 \end{matrix}\begin{cases} 4x-2y=5 \\ 4x-2y=-8 \end{cases} \to$ Contradictorio: $5 \neq -8$.

3. Sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas

Un sistema de tres ecuaciones lineales de con tres incógnitas, en su forma estándar, es un conjunto de tres igualdades de la forma: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$.

Las letras x, y, z son las incógnitas; a_{ij} y b_i son números, llamados coeficientes (de las incógnitas) y términos independientes, respectivamente (algunos pueden ser 0).
Un sistema es lineal cuando las incógnitas van afectadas por el exponente 1, que no se indica; tampoco se multiplican o dividen entre sí.

- La solución del sistema es el conjunto de valores de x, y, z que verifican sus ecuaciones.
- Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Discutir un sistema es determinar sus posibilidades de solución. Puede ser:
  – compatible determinado, cuando el sistema tiene una única solución (SCD).
  – compatible indeterminado, si tiene infinitas soluciones (SCI).
  – incompatible, cuando no tiene solución (SI)

Ejemplos:

a) La terna $x = 0$, $y = 5$, $z = 1$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ -2x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$. Cumple las tres ecuaciones (Compruébese). En cambio, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ no es solución: cumple la primera y segunda ecuaciones; pero no la tercera.

b) Los sistemas $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + 3y - 3z = 8 \end{cases}$ son equivales, pues ambos tienen por solución los valores $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$. (Puede comprobarse).
Observación: Una forma sencilla de obtener sistemas equivalentes consiste en sumar o restar las ecuaciones entre sí (membro a miembro; incógnita a incógnita). Aquí, el segundo sistema se ha obtenido cambiando $E1$ por $E1 + E2$, y $E3$ por $E3 - E2$. (Compruébalo).

c) Los sistemas $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 6x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 3z = -3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ son compatibles indeterminados. Ambos tienen infinitas soluciones. Por ejemplo, las ternas (−3, 5, 0) y (0, 1, −1).
En el primero de ellos puede verse que $E3 = E1 + E2$. En el segundo, falta una ecuación.

d) El sistema $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = -2 \end{cases}$ es incompatible. Puede verse que las ecuaciones segunda y tercera son contradictorias. Una misma cosa, $x - 2y + 3z$, no puede valer, a la vez, 0 y −2.

Métodos de resolución

Método de sustitución. Es el más elemental de los métodos de resolución. Consiste en despejar una incógnita en alguna de las ecuaciones y llevar su valor a las otras. Se obtiene así un sistema asociado al primero, pero con una ecuación y una incógnita menos, fácil de resolver.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x \quad -z=1 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases} \to z=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+(2x-1)=0 \\ 3x-y-2(2x-1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ -x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}.$$

Método de Gauss

Consiste en transformar el sistema inicial, $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$, en otro equivalente a él, de la forma: $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ \quad a'_{22}y+a'_{23}z=b'_2 \\ \quad\quad \boxed{a''_{33}z=b''_3} \end{cases}$. (Sistema escalonado: "triangular").

El paso de un sistema a otro se consigue mediante transformaciones de Gauss:
1) Un sistema no cambia si sus ecuaciones se cambian de orden.
2) Un sistema no cambia si una ecuación se multiplica por un número distinto de 0.
3) Un sistema no cambia si una ecuación se sustituye por ella misma más la suma o resta de otra.

Así pues, sumando o restando ecuaciones se elimina la incógnita *x* de la segunda ecuación (*E*2); y las incógnitas *x* e *y* de la tercera ecuación (*E*3).
Estudiando la tercera ecuación resultante, $a''_{33}z=b''_3$, pueden determinarse las posibilidades de solución del sistema, pues:

- Si $a''_{33} \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (SCD).

La incógnita z puede despejarse; su valor se lleva a las otras dos ecuaciones y se obtienen *y* y *x*.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3=0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (SCI).

La tercera ecuación queda: $0\cdot z=0$, que se cumple para cualquier valor de *z*.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es incompatible (SIN) $\to E3$ queda: $0\cdot z \neq 0$, absurdo.

Observaciones:
1. No es necesario que el sistema quede triangular; lo importante es dejar una ecuación con una sola incógnita (las otras se eliminan sumando o restando). A partir de esa ecuación se hará la discusión.
2. Las transformaciones de Gauss se facilitan si se busca una incógnita con coeficiente 1 o –1: a partir de ese 1 es fácil calcular el doble o el triple, y sumar o restar según convenga.

Ejemplos:

a) $$\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 2x-y+z=-4 \\ 3x+y+5z=10 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ -2y+14z=4 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to 2E2 \\ 3E3 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -6y+14z=-16 \\ -6y+42z=12 \end{cases} \to$$

$$\begin{matrix} \to \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ 28z=28 \end{cases} \Rightarrow z=1 \to \begin{cases} x+y-3=2 \\ -3y+7=-8 \\ z=1\uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5 \\ z=1 \end{cases}.$$

El sistema es compatible determinado. Su solución es *x* = 0, *y* = 5, *z* = 1.

b) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+4y+z=3 \\ -x+5y \quad =3 \end{cases} \to \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} x-5y \quad =-3 \\ x+4y+z=3 \\ -x+5y \quad =3 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ E3+E1 \end{matrix} \begin{cases} x-5y \quad =-3 \\ x+4y+z=3 \\ 0=0 \end{cases}$.

El sistema es compatible indeterminado ("se pierde" la ecuación $E3$), equivalente a:

$$\begin{cases} x-5y=-3 \\ x+4y=3-z \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-5y=-3 \\ 9y=6-z \end{cases} \to \begin{cases} x-5y=-3 \\ z=6-9y \end{cases}$$

Haciendo $y = t$, se tiene: $\begin{cases} x=-3+5t \\ y= \quad t \\ z=6-9t \end{cases}$ $\to$ Para cada valor de t se tiene una solución.

<u>Observación</u>: Que un sistema sea compatible indeterminado significa que una de las ecuaciones es redundante, que depende linealmente de las otras. En definitiva, que faltan datos para concretar la solución; por eso se da en función de una de las incógnitas. En este ejemplo, las incógnitas x y z dependen del valor que se quiera dar a y, al parámetro t.

c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-2y+z=0 \\ 3x-y \quad =2 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=1 \\ -4y+3z=-2 \\ -4y+3z=-1 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=1 \\ -4y+3z=-2 \\ 0=1 \end{cases}$.

Como 0 = 1 es falso, el sistema propuesto es incompatible.

<u>Observación</u>: Que un sistema sea incompatible indica que sus ecuaciones son contradictorias.

4. Problemas de sistemas

Como en cualquier problema, en los que dan lugar a un sistema de ecuaciones, el proceso a seguir puede ser:

1) Leerlo despacio y entenderlo (también el significado de las palabras del enunciado).
2) Definir las incógnitas.
3) Descubrir los datos y las relaciones algebraicas entre las incógnitas y los datos: escribir las ecuaciones.
4) Expresar esas ecuaciones en la forma estándar y resolver el sistema obtenido.

$\to$ A continuación se proponen tres problemas con enunciado. Se sugiere al lector interesado que los procure plantear y resolver por su cuenta; y que después compruebe la solución.

Problema 1

En los grupos A, B y C, del Grado de Economía de una universidad hay matriculados un total de 350 alumnos. El número de matriculados en el grupo A coincide con los del grupo B más el doble de los del grupo C. Los alumnos matriculados en el grupo B más el doble de los del grupo A superan en 250 al quíntuplo de los del grupo C. Calcula el número de alumnos que hay matriculados en cada grupo.

<u>Solución</u>:

Si el número de alumnos de los grupos A, B y C son x, y, z, respectivamente, se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=350 \\ x=y+2z \\ 2x+y=5z+250 \end{cases} \to \text{(Se "arregla")} \begin{cases} x+y+z=350 \\ x-y-2z=0 \\ 2x+y-5z=250 \end{cases} \to \text{(pivotando en } x \text{ de } E1) \to$$

$$\to \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=350 \\ -2y-3z=-350 \\ -y-7z=-450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=350 \\ 2y+3z=350 \\ -11z=-550 \end{cases} \Rightarrow z=50,\ y=100,\ x=200.$$

Hay 200 alumnos matriculados en el grupo A, 100 en el B y 50 en el C.

Problema 2

Una empresa ha gastado 33500 € en la compra de un total de 55 ordenadores portátiles de tres clases A, B y C, cuyos costes por unidad son de 900 €, 600 € y 500 € respectivamente. Sabiendo que la cantidad invertida en los de tipo A ha sido las tres cuartas partes que la invertida en los de tipo B, averiguar cuántos aparatos ha comprado de cada clase.

Solución:

Si el número de ordenadores que se compran de las clases A, B y C son *x*, *y*, *z* respectivamente, se tiene:

Cantidad gastada: $900x + 600y + 500z = 33500 \to$ (dividiendo entre 100) $\to 9x + 6y + 5z = 335$.

Número de ordenadores: $x + y + z = 55$.

Inversión: en ordenadores del tipo A, $900x$; en ordenadores del tipo B, $600y$.

Lo invertido en A son $\frac{3}{4}$ de lo invertido en B: $900x = \frac{3}{4} \cdot 600y \Rightarrow 3600x = 1800y \Rightarrow 2x - y = 0$.

Así se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 9x + 6y + 5z = 335 \\ x + y + z = 55 \\ 2x - y \quad = 0 \end{cases} \xrightarrow{E1-5E2} \begin{cases} 4x + y \quad = 60 \\ x + y + z = 55 \\ 2x - y \quad = 0 \end{cases} \xrightarrow{E1+E3} \begin{cases} 6x = 60 \to x = 10 \\ x + y + z = 55 \\ 2x - y \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 20,\ z = 25.$$

Se compran 10 ordenadores del tipo A, 20 del tipo B y 25 del tipo C.

Problema 3

La suma de las edades de una madre y sus dos hijos es de 60 años. Dentro de 10 años la suma de las edades de los hijos será la actual de la madre. Por último, cuando nació el pequeño, la edad de la madre era 8 veces la del hijo mayor. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hijos?

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* las edades de la madre, del hijo mayor y del menor respectivamente.

Los datos pueden organizarse mediante una tabla:

	Madre	Hijo mayor	Hijo pequeño
Edad actual	x	y	z
Dentro de 10 años		$y + 10$	$z + 10$
Cuando nació el pequeño: hace z años	$x - z$	$y - z$	0

Por el enunciado, se deducen las ecuaciones:

$x + y + z = 60$ → (suma de las edades actuales);

$y + 10 + z + 10 = x$ → (suma de edades de los hijos dentro de 10 años = a la actual de la madre);

$x - z = 8(y - z)$ → (relación de edades cuando nació el hijo pequeño).

El sistema formado por las 3 ecuaciones, una vez ordenado y simplificado queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x - y - z = 20 \\ x - 8y + 7z = 0 \end{cases}.$$

Por Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x - y - z = 20 \\ x - 8y + 7z = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 60 \\ -2y - 2z = -40 \\ -9y + 6z = -60 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ E3/3 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 60 \\ -2y - 2z = -40 \\ -3y + 2z = -20 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{matrix} \\ \\ E3 + E2 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 60 & \to x + 12 + 8 = 60 \to x = 40 \\ -2y - 2z = -40 & \to -24 - 2z = -40 \to z = 8 \\ -5y = -60 & \to y = 12 \end{cases}$$

La madre tiene 40 años; los hijos, 12 y 8 años.

5. Sistemas no lineales

Son sistemas en los que alguna de las ecuaciones que lo forman no es lineal. Suelen resolverse empleando el método de sustitución; y, alguna vez, por igualación.
Estos sistemas suelen estar ligados al problema de encontrar los puntos de corte de dos gráficas en el plano. Las coordenadas de esos puntos son los valores *x*, *y* de la solución.

Practicamos con algunos ejercicios.

Ejercicio 1

Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x^2+y^2=13 \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x^2+y^2=13 \end{cases} \to \text{(se despeja } y \text{ en } E1 \text{ y se sustituye en } E2\text{)} \to \begin{cases} y=2x-1 \\ 4x^2+(2x-1)^2=13 \end{cases}.$$

Se opera y se resuelve la ecuación obtenida.

$$\Rightarrow 4x^2+4x^2-4x+1=13 \Rightarrow 8x^2-4x-12=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+384}}{16}=\frac{4\pm 20}{16} \Rightarrow \begin{cases} x=3/2 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Si $x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=2$. Solución: punto $\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$. Si $x=-1 \Rightarrow y=-3$. Solución: punto $(-1, -3)$.

Ejercicio 2

Halla los puntos de corte de la recta $2x-y+4=0$ con la parábola $y=x^2+2x+3$. Da la interpretación gráfica.

Solución:

Hay que resolver el sistema $\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ y=x^2+2x+3 \end{cases}$.

Como *y* está despejada en *E*2, se sustituye en *E*1. Queda:

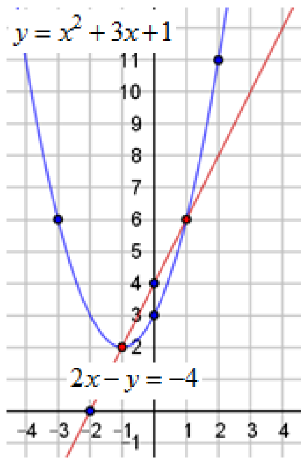
$$2x-\left(x^2+2x+3\right)+4=0 \to \text{operando y resolviendo la ecuación} \to$$

$$\to 2x-x^2-2x-3+4=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1.$$

Sustituyendo esos valores en *E*2, se obtiene:

para $x=1$, $y=6$; para $x=-1$, $y=2$. Puntos $(1, 6)$ y $(-1, 2)$.

(Sustituyendo en *E*1 se obtienen los mismos resultados).



Gráficamente:

La recta $2x-y+4=0 \Leftrightarrow y=2x+4$, se representa dando dos de sus puntos: $(0, 4)$ y $(-2, 0)$.
La parábola puede trazarse viendo que pasa por los puntos: $(0, 3)$; $(1, 6)$; $(-1, 2)$; $(2, 11)$; $(-3, 6)$.

Ejercicio 3

Resuelve el sistema $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases}$.

Solución:

Puede resolverse por igualación: $\sqrt{x}=x^2 \to$ (se eleva la cuadrado y se saca factor común) $\to$

$$\to \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(x^2\right)^2 \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x\left(x^3-1\right)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1.$$

Para $x=0$, $y=0$; para $x=1$, $y=1$. Los puntos solución son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.