# POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

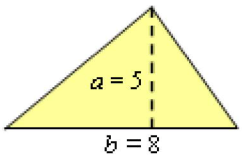
*Lee y practica con atención, aunque creas que lo sabes; así aprenderás.*

## 1. Repaso

**Expresiones algebraicas**
Una expresión algebraica es un conjunto de números y letras ligados por operaciones ordinarias. Se utilizan para establecer relaciones de carácter genérico, pues las letras pueden tomar cualquier valor.
Valor numérico de una expresión algebraica es el número que resulta cuando se sustituyen las letras por números.

**Ejemplos**:
Son expresiones algebraicas:

a) $A=\frac{b\cdot a}{2}$, que sirve para calcular el área de un triángulo de base *b* y altura *a*.




Si la base mide 8 cm y altura 5, el área del triángulo es: $A=\frac{8\cdot 5}{2}=20\ \text{cm}^2$

b) $t=\frac{e}{v}$, que sirve para calcular el tiempo que se tarda en recorrer una distancia *e* a velocidad *v*. Si la distancia es *e* = 140 km y la velocidad *v* = 35 km/h, $t=\frac{140}{35}=4$ h.

c) $C(t)=200\cdot(1+0,05)^t$, que da el capital acumulado a partir de una cantidad inicial de 200 €, a un interés del 5 %, durante un tiempo *t*. Si el tiempo son 8 años, $C(8)=200\cdot(1+0,05)^8=295{,}49$ €.

Monomios
Son las expresiones algebraicas más simples. Solo tienen un término, formado por el producto de números y letras. El número se llama coeficiente del monomio; y las letras, parte literal.
→ Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.
→ El grado de un monomio es la suma de los todos los exponentes de las letras. (Los números puede considerarse monomios de grado 0).

**Ejemplos**:

a) Son monomios: $3\cdot a$, $-5\cdot x^2$ o $\frac{2}{3}\cdot x\cdot y^3$. Suelen escribirse omitiendo los puntos de multiplicar. Esto es: $3\cdot a=3a$, $-5\cdot x^2=-5x^2$ o $\frac{2}{3}\cdot x\cdot y^3=\frac{2}{3}xy^3$.

b) La parte literal de $3a$, $-5x^2$ y $\frac{2}{3}xy^3$ es, respectivamente, $a$, $x^2$ y $xy^3$. Sus coeficientes, también respectivamente, son: 3, –5 y $\frac{2}{3}$. Sus grados son 1, 2 y 4, respectivamente.

c) Son semejantes los monomios: $x^2$ y $6x^2$. También lo son $-2a^2b$ y $3a^2b$.
d) No son semejantes: $3a$ y $2ab$. Tampoco lo son $2x^2$ y $3x$.

Observación: Cuando la parte literal no lleva número, su coeficiente es 1; y si va solo con signo negativo, su coeficiente es –1. No se ponen por comodidad. Así, los coeficientes de $-ab^2$ y de $x^3$ son, respectivamente, –1 y 1.

**Operaciones con monomios**

- Suma y resta de monomios

Solo pueden sumarse o restarse los monomios semejantes. (Cuando dos monomios no son semejantes, no pueden agruparse; la operación se deja indicada.)
- Para sumar (o restar) monomios se suman (o restan) los coeficientes y se deja la misma parte literal. (El proceso empleado consiste en sacar factor común: las letras son el factor común).

**Ejemplos:**

a) $3a+\frac{5}{2}a=\left(3+\frac{5}{2}\right)a=\frac{11}{2}a$. b) $3ab^2-5ab^2=(3-5)ab^2=-2ab^2$.

c) $2x^2-7x^2+3x^2=(2-7+3)x^2=-2x^2$.

d) $2x^2+3x$ no puede sumarse; se deja indicada, como está.

Producto de monomios. (Pueden multiplicarse cualquier tipo de monomios entre sí).
Para multiplicar dos monomios "se multiplican números por números y letras por letras", aplicando las propiedades de la potenciación y las reglas de los signos.

**Ejemplos**:

a) $(3a)\cdot(5a)=(3\cdot5)\cdot(a\cdot a)=15a^2$. b) $\left(\frac{3}{5}xy^2\right)\cdot\left(-5x^3\right)=\left(\frac{3}{5}\cdot(-5)\right)\cdot\left(xy^2\cdot x^3\right)=-3x^4y^2$.

División de monomios. Pueden dividirse cualquier tipo de monomios entre sí.
Para dividir dos monomios se dividen números entre números y letras entre letras, teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación y las reglas de los signos. La parte de la expresión que no pueda simplificarse se dejará indicada en forma de fracción.

**Ejemplos**:

a) $\frac{12x^5}{3x^2}=\frac{12}{3}\cdot\frac{x^5}{x^2}=4x^3$. b) $\frac{5x^2}{15x}=\frac{5}{15}\cdot\frac{x^2}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{1}=\frac{1}{3}x=\frac{x}{3}$.

c) $\frac{10x^4y}{15x^2y^3}=\frac{10}{15}\cdot\frac{x^4}{x^2}\cdot\frac{y}{y^3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{2x^2}{3y^2}$. d) $\frac{3x^4}{5y^2}$ no puede dividirse; se deja como está.

Polinomios

Un polinomio está formado por la suma o resta de varios monomios. Si la suma es de dos monomios se le suele llamar binomio; si es suma de tres monomios, trinomio. Y en general, polinomio.
- Cada uno de los monomios que forman el polinomio se llama término.
- El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. Si en un monomio hay varias letras, su grado es la suma de los todos los exponentes de esas letras.

**Ejemplos**:

a) Son binomios: $3a-5b$, $3x-7$ y $2x^3-\frac{3}{5}x$. El último es de grado 3.

b) El grado de $-2x^2y^3+3xy-5y^4$ es 5, la suma de los exponentes 2 y 3 del primer término.

Polinomios en $x$. En Matemáticas, la mayoría de las veces solo se utiliza la letra $x$ como parte literal. Casi siempre se emplean polinomios como $4x^3+5x-6$ o $-2x^2+7x+3$; y con frecuencia se escriben así: $A(x)=4x^3+5x-6$ o $B(x)=-2x^2+7x+3$. La expresión más común es $P(x)$.

**Ejemplo**:
La expresión $P(x)=2x^5-4x^3+5x-6$ es un polinomio de grado 5. Los términos que lo forman son: $2x^5$, de grado 5 y coeficiente 2; $-4x^3$, de grado 3 y coeficiente –4; $5x$, de grado 1 y coeficiente 5; el número –6 es el término independiente.
Ese polinomio no tiene los términos de 4º grado ni de 2º; pero, si conviene, podría escribirse $P(x)=2x^5+0x^4-4x^3+0x^2+5x-6$. Así, los coeficientes, ordenados de mayor a menor grado, son: 2 (para $x^5$), 0 (para $x^4$), –4 (para $x^3$), 0 (para $x^2$), 5 (para $x$); –6 (término independiente).

Valor numérico de un polinomio: es el número que resulta cuando se sustituyen las letras por números.

**Ejemplo**:
El valor numérico de la expresión $P(x)=2x^5-4x^3+5x-6$ para $x=-1$, que suele indicarse por $P(-1)$, es: $P(-1)=2\cdot(-1)^5-4\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)-6=-2+4-5-6=-9$.
Análogamente, $P(2)=2\cdot2^5-4\cdot2^3+5\cdot2-6=64-32+10-6=36$; mientras que $P(0)=-6$.

**Operaciones con polinomios**
Suma y resta de polinomios
Para sumar polinomios se suman o restan los términos semejantes, manteniéndose los términos no semejantes.

**Ejemplos**:
a) $\left(4x^3+5x-6\right)+\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2+7x\right)=\left(4x^3+\frac{2}{3}x^3\right)-2x^2+\left(5x+7x\right)-6=\frac{14}{3}x^3-2x^2+12x-6$.
b) $\left(4x^3+\frac{1}{2}x^2-6\right)-\left(3x^3-2x^2+7x\right)=\left(4x^3-3x^3\right)+\left(\frac{1}{2}x^2+2x^2\right)-7x-6=x^3+\frac{5}{2}x^2-7x-6$.
Observación: Es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multiplicación de dos polinomios
Se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo: "todos por todos". Esto es, se aplica la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación. Una vez realizados los productos deben agruparse los términos semejantes.

**Ejemplos**:
a) $4x^2\cdot\left(3x^3-2x+7\right)=\left(4x^2\cdot3x^3\right)+\left(4x^2\cdot\left(-2x\right)\right)+\left(4x^2\cdot7\right)=12x^5-8x^3+28x^2$.

b) $\left(5x-6\right)\cdot\left(2x^2-3x+1\right)=\left(5x\right)\cdot\left(2x^2-3x+1\right)-6\cdot\left(2x^2-3x+1\right)=$
$=\left(5x\cdot2x^2\right)+\left(5x\cdot(-3x)\right)+\left(5x\cdot1\right)-\left(6\cdot2x^2\right)-\left(6\cdot(-3x)\right)-\left(6\cdot1\right)=$
$=10x^3-15x^2+5x-12x^2+18x-6=10x^3-27x^2+23x-6$.
c) $\left(4x^3+5x-6\right)\cdot\left(-2x^2+\frac{1}{2}x\right)=$
$=\left(4x^3\cdot\left(-2x^2\right)\right)+\left(4x^3\cdot\frac{1}{2}x\right)+\left(5x\cdot\left(-2x^2\right)\right)+\left(5x\cdot\frac{1}{2}x\right)-\left(6\cdot\left(-2x^2\right)\right)-\left(6\cdot\frac{1}{2}x\right)=$
$=-8x^5+2x^4-10x^3+\frac{5}{2}x^2+12x^2-3x\;=\;-8x^5+2x^4-10x^3+\frac{29}{2}x^2-3x$.
Observación: Hay que seguir las reglas de los signos, tanto al multiplicar como al agrupar.

Potencia de un monomio y de un polinomio

→ La potencia de un monomio se hace como la de un producto: elevando cada uno de los elementos del monomio al exponente que se indica.

**Ejemplos**:

a) $\left(4x^3\right)^2 = 4^2\cdot\left(x^3\right)^2 = 16x^6$. b) $\left(-\frac{3}{2}x^3\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(x^3\right)^3 = -\frac{27}{8}x^9$.

→ La potencia de un polinomio debe hacerse multiplicando sucesivamente, pues la potenciación *funciona mal* con sumas y restas. (Ya se ha dicho que escribir $(a+b)^n = a^n + b^n$ es un error fatal).

Así, por ejemplo, para hallar $\left(4x^2-3x+2\right)^2$ deberá escribirse $\left(4x^2-3x+2\right)\cdot\left(4x^2-3x+2\right)$ y multiplicar término a término.

Lo mismo habría que hacer para calcular $(1-4x)^3$, escribir $(1-4x)^3 = (1-4x)\cdot(1-4x)\cdot(1-4x)$ y multiplicar paso a paso.

Observaciones:

1) Algunos lectores sabrán que hay fórmulas para el cálculo de las potencias de un binomio. Es muy bueno saber aplicarlas; no obstante, no es imprescindible conocerlas, pues raramente un estudiante de Ciencias Sociales se encontrará en la necesidad de emplearlas.

2) Lo mismo podría decirse respecto a los productos notables: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b)\cdot(a-b)$, cuyas fórmulas (mal sabidas) suelen ser causa de frecuentes errores. (Si se me permite el juego de palabras, pasan de ser productos notables a ser *productos suspensos*). Por tanto, si tienes inseguridad en su aplicación, olvídate de ellas, y obtén su valor multiplicando paso a paso, como se hace aquí:

- $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$.
- $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b)-b\cdot(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2$.
- $(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2-b^2$.

Se obtienen las fórmulas:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2; \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2; \quad (a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2.$$

Conocer estas fórmulas agiliza los cálculos. (A pesar de lo dicho arriba, procura aprenderlas).

**Ejemplos**:

a) $\left(4x^2-3x+2\right)^2 = \left(4x^2-3x+2\right)\cdot\left(4x^2-3x+2\right) =$

$= 4x^2\cdot\left(4x^2-3x+2\right)-3x\cdot\left(4x^2-3x+2\right)+2\cdot\left(4x^2-3x+2\right) =$

$= 16x^4-12x^3+8x^2-12x^3+9x^2-6x+8x^2-6x+4 = 16x^4-24x^3+25x^2-12x+4$.

b) $(1-4x)^3 = (1-4x)\cdot(1-4x)\cdot(1-4x) = \left(1-4x-4x+16x^2\right)\cdot(1-4x) = \left(1-8x+16x^2\right)\cdot(1-4x) =$

$= 1-4x-8x+32x^2+16x^2-64x^3 = 1-12x+48x^2-64x^3$.

c) $(3x+5)^2 = (3x+5)\cdot(3x+5) = 9x^2+15x+15x+25 = 9x^2+30x+25$.

d) $\left(5-2x^2\right)^2 = \left(5-2x^2\right)\cdot\left(5-2x^2\right) = 25-10x^2-10x^2+4x^4 = 25-20x^2+4x^4$.

e) $(4x+3)\cdot(4x-3) = 16x^2-12x+12x-9 = 16x^2-9$.

→ Si manejas las fórmulas, aplícalas y comprueba que el resultado es correcto.

## División de polinomios

Para dividir polinomios hay que escribirlos en orden decreciente; a continuación, se hace el cociente entre los términos principales; ese cociente se multiplica por el divisor y se resta al dividendo; ...
Se recuerda el algoritmo con el siguiente ejemplo, siendo el dividendo $D(x)=6x^4+15x^3-17x-2$, y el divisor $d(x)=2x^2-3x$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^4 & +15x^3 & & -17x-2 & 2x^2-3x \\ \cline{5-5}
-6x^4 & +9x^3 & & & 3x^2+12x+18 \\ \cline{1-4}
 & 24x^3 & & -17x-2 & \\
 & 24x^3 & +36x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 36x^2 & -17x-2 & \\
 & & -36x^2 & +54x & \\ \cline{3-4}
 & & & 37x-2 &
\end{array}$$

Término principal entre $2x^2$

$6x^4/2x^2=\underline{3x^2}$

$24x^3/2x^2=\underline{12x}$

$36x^2/2x^2=\underline{18}$

Observación: Como en la división ordinaria, en el caso de polinomios, se cumple que:

$$D(x)=d(x)\cdot c(x)+r(x)\ \Leftrightarrow\ \frac{D(x)}{d(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$$

Así, en la división de $D(x)=6x^4+15x^3-17x-2$ entre $d(x)=2x^2-3x$, el cociente es $c(x)=3x^2+12x+18$, y el resto, $r(x)=37x-2$; entonces, se cumple:

$$\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(3x^2+12x+18\right)+\left(37x-2\right)=6x^4+15x^2-17x-2.$$

y también: $$\frac{6x^4+15x^2-17x-2}{2x^2-3x}=3x^2+12x+18+\frac{37x-2}{2x^2-3x}.$$

## Regla de Ruffini para la división de $P(x)$ entre $(x-a)$

Sólo puede utilizarse para dividir un polinomio cualquiera entre el binomio $x-a$. (La $x$ va con coeficiente 1).
Para aplicar la regla, los coeficientes del dividendo se colocan ordenados (de mayor a menor grado, incluido el término independiente); si faltase alguno de ellos, se pone un 0.

**Ejemplos**:

a) Para dividir $D(x)=2x^4-5x^3+6x-12$ entre $d(x)=x-2$ se procede así:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficientes del dividendo | | 2 | –5 | 0 | 6 | –12 | |
| Valor de *a* | 2 | | 4 | –2 | –4 | 4 | |
| Coeficientes del cociente | | 2 | –1 | –2 | 2 | –8 | ← Resto |

El cociente es un polinomio de grado tres, con coeficientes 2, – 1, –2 y 2; –8 es el resto.
Luego: $c(x)=2x^3-x^2-2x+2$; $r=–8$.

b) Para dividir $D(x)=x^3+6x$ entre $d(x)=x+1$, como $D(x)=x^3+0x^2+6x+0$, se procede así:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Coeficientes del dividendo | | 1 | 0 | 6 | 0 |
| Valor de *a* | –1 | | –1 | 1 | –7 |
| Coeficientes del cociente | | 1 | –1 | 7 | –7 |

El cociente de la división es $c(x)=x^2-x+7$; el resto, $r=–7$.

→ Observa que podría escribirse: $\dfrac{x^3+6x}{x+1}=x^2-x+7-\dfrac{7}{x+1}$.

## 2. Descomposición de un polinomio en factores (Factorización de polinomios)

La descomposición factorial de un polinomio consiste en escribirlo como producto de polinomios de menor grado.
Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de sus factores irreducibles, los de menor grado posible: análogo al concepto de factor primo para los números.
(Es un procedimiento análogo a la descomposición de un número en producto de otros más pequeños, siendo la descomposición más valiosa la del producto de sus factores primos. Así, por ejemplo, 36 puede escribirse como 4 · 9 o 12 · 3, pero suele tener más ventajas escribirlo como producto de sus factores primos: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$).

• Un factor polinómico es irreducible si es de primer grado o cuando no tiene ninguna raíz real. Por ejemplo $x^2 + 1$ es irreducible; también son irreducibles $x + 3$ y $3x - 4$.

**Ejemplo**:
$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ puede escribirse como producto de $(x-2)\cdot(x^2 - 2x - 3)$. El primer factor es irreducible, pero el segundo, no, pues $(x^2 - 2x - 3) = (x+1)\cdot(x-3)$.
Por tanto, la factorización de $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ será: $P(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$.

→ Para encontrar factores irreducibles hay un criterio que se conoce como teorema del resto; pero antes, recuerda:
1) Valor numérico de un polinomio, para un valor de $x = a$, es el número que resulta cuando en él se sustituye $x$ por $a$. Si el polinomio es $P(x)$ ese valor se denota por $P(a)$.

**Ejemplo:**
El valor numérico de $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x + 6$ para $x = -1$ es:
$$P(-1) = (-1)^4 - 4\cdot(-1)^3 + 5\cdot(-1) + 6 = 1 + 4 - 5 + 6 = 6.$$
Análogamente, $P(2) = 2^4 - 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2 + 6 = 16 - 32 + 10 + 6 = 0$.

2) Raíz de un polinomio
Raíz de un polinomio es cada uno de los valores de $x = a$ para los que $P(a) = 0$. En este caso se dice que $a$ es una raíz o un *cero* de $P(x)$.

**Ejemplos**:
a) Para el polinomio del ejemplo anterior, $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x + 6$, una de sus raíces es $x = 2$, pues $P(2) = 0$. (Para el mismo polinomio, $x = -1$ no es raíz, ya que $P(-1) = 6 \neq 0$).

b) $x = -2$ es una raíz de $P(x) = 2x^3 - 5x + 6$, pues $P(-2) = 2\cdot(-2)^3 - 5\cdot(-2) + 6 = 0$.

- Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$. Esas raíces pueden hallarse para polinomios de primer y segundo grado, cuando existan. (Ya sabes resolver ecuaciones de primero y segundo grado).
- Un polinomio tiene tantas raíces como indica su grado: los polinomios de segundo grado tienen dos raíces; los de tercer grado, tres raíces; … Esas raíces no siempre pueden encontrarse.
- Un polinomio puede tener la misma raíz varias veces, pudiéndose hablar de raíz doble, triple…
- Para polinomios de grado mayor que 2 se conoce el siguiente criterio: Si un polinomio tiene raíces enteras estas deben ser divisores del término independiente.

Por ejemplo, para $P(x)=2x^3-5x+6$, como el término independiente vale 6, sus posibles raíces enteras hay que buscarlas entre los divisores de 6, que son 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 y –6.
Hay que probar con paciencia.
Para $x = 1$, $P(1)=3 \Rightarrow x = 1$ no es raíz. Para $x = –2$, $P(-2)=0 \Rightarrow x = –2$ SÍ es raíz...
Si se continúa probando se verá que este polinomio no tiene más raíces enteras.

**Teorema del resto**
Se utiliza como criterio para determinar si un polinomio $P(x)$ es divisible por un binomio de la forma $x-a$ ($x$ lleva coeficiente 1; $a$ es un número real).
Dice así: "El resto de la división de $P(x):(x-a)$ es igual al valor numérico de $P(x)$ para $x = a$."

- Esto permite saber el resto de la división sin necesidad de hacerla, pues $r=P(a)$.
- Si $P(a)=0$, entonces el resto de $P(x):(x-a)$ será 0; luego, $P(x)$ será divisible por $x-a$.

Nota: Algunos alumnos hacen la división para ver si $P(x)$ es divisible por $x-a$; pero es más rápido hallar $P(a)$. Si $P(a)=0$, entonces, se divide (para hallar el otro factor).

**Ejemplos**:
a) En la división de $D(x)=2x^4-5x^3+6x-12$ entre $d(x)=x-2$ se vio que el resto valía –8. Ese valor coincide con el valor numérico de $D(x)$ para $x = 2$: $D(2)=2{\cdot}16-5{\cdot}8+6{\cdot}2-12=-8$.
b) La división de $P(x)=x^3-4x$ entre $x – 1$ da de resto –3, pues $P(1)=1^3+4{\cdot}(-1)=-3$. (No es necesario hacer la división para saber el resto).
c) El resto de la división de $P(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ entre $x + 2$ vale $P(-2)=0$. Esto significa que $x = –2$ es raíz de $P(x)$. Por tanto, la división será exacta.

**Teorema del factor**
Completa lo ya indicado.
Dice así: "La condición necesaria y suficiente para que $(x-a)$ sea un factor de $P(x)$ es que $P(a)=0$."
O lo que es lo mismo:
Si $P(a)=0 \Leftrightarrow x=a$ es una raíz de $P(x) \Leftrightarrow (x-a)$ es un factor del polinomio $P(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(x)=(x-a){\cdot}Q(x)$. Por tanto, $P(x)$ puede escribirse como producto de dos factores.

Nota: Por cada raíz que se conozca se tiene un factor. Así, por ejemplo, si 2, 3 y –5 son raíces de un polinomio de tercer grado, entonces $x – 2$, $x – 3$ y $x + 5$ son sus factores. Por tanto, dicho polinomio puede ser $P(x)=(x-2){\cdot}(x-3){\cdot}(x+5)$; y no sería necesario escribirlo por extensión, aunque, si se desea, multiplicando se obtiene: $P(x)=x^3-19x+30$.

Esquema para factorizar un polinomio
El teorema del factor permite escribir un polinomio como producto de factores de menor grado.
Para ello puede hacerse lo que se indica a continuación:
1.º Si puede sacarse factor común, un número o $x$, se saca.
2.º Hay que encontrar una de sus raíces. (Para polinomios de segundo grado se encuentran resolviendo la ecuación $P(x)=0$. Si el polinomio es de grado mayor o igual a 3, buscando raíces enteras entre los divisores del término independiente: se encuentran probando, sustituyendo).
3.º Cuando se conozca alguna raíz, se divide (por Ruffini) para obtener factores de menor grado, y, por tanto, más cómodos de manejar: Si $x = a$ es una raíz de $P(x) \to$ se divide por $x-a$ y se escribe $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$.
4.º A continuación, se repite el mismo proceso con $P_1(x)$.
5.º El coeficiente del término de mayor grado siempre debe incluirse como un factor más.

**Ejemplos**:

a) Para $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$ se puede sacar factor común 2:

$$P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 2\left(x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right).$$

A continuación, hay que encontrar alguna raíz entera. Puede ser un divisor de $-3 \to 1, -1, 3$ y $-3$.
Vale $x = 1$, pues $P(1) = 0 \Rightarrow (x - 1)$ es un factor $\Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - 1)$.
Se divide $P(x) : (x-1) \to$ se obtiene de cociente $c(x) = 2x^2 - 8x + 6 \to$

$$P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = (x-1)\left(2x^2 - 8x + 6\right) \Rightarrow P(x) = 2(x-1)\left(x^2 - 4x + 3\right).$$

Los otros dos factores se hallan resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$. Sus soluciones son $x = 1$ y $x = 3 \Rightarrow (x - 1)$ y $(x - 3)$ son los factores $\to x^2 - 4x + 3 = (x-1)\cdot(x-3)$.

En consecuencia: $P(x) = \underline{2}x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = \underline{2}(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-3) = \underline{2}(x-1)^2\cdot(x-3)$.

En este caso, la solución $x = 1$ es doble, pues el factor $(x - 1)$ se repite dos veces.
El factor numérico 2 no puede olvidarse.

b) Para factorizar $P(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$, lo primero es sacar fator común $x$: $P(x) = x\left(x^2 - 7x + 10\right)$.

A continuación, se resuelve la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot1\cdot10}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$.

Por tanto, $x - 5$ y $x - 2$ son otros dos fatores de $P(x)$.

Luego, $P(x) = x\cdot(x-5)\cdot(x-2)$.

c) No siempre las raíces de un polinomio son enteras. Lo vemos así para $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x$.
Como antes, se saca factor y se resuelve la ecuación de segundo grado que resulta.

$$P(x) = x\left(3x^2 + 5x - 2\right) \to 3x^2 + 5x - 2 = 0:$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \\ -2 \end{cases}.$$

Como las raíces son $x = \dfrac{1}{3}$ y $x = -2$ y, los factores correspondientes serán $x - \dfrac{1}{3}$ y $x - (-2) = x + 2$.

Luego, $P(x) = \underline{3}x^3 + 5x^2 - 2x = x\left(\underline{3}x^2 + 5x - 2\right) = \underline{3}\cdot x\cdot\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\cdot(x+2)$.

El factor numérico 3 no puede olvidarse.

**Algunos problemas relacionados con la factorización**

Se utilizarán los conceptos de valor numérico y de raíz de un polinomio, y los teoremas del resto y del factor.

**Problema 1**

Halla un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean 2 y –1 y tal que $P(0) = 3$.

Solución:

Todos los polinomios de segundo grado cuyas raíces sean 2 y –1 son de la forma:

$$P(x) = a(x-2)(x+1).$$

Si $P(0) = 3 \Rightarrow P(0) = a(0-2)(0+1) = 3 \Rightarrow -2a = 3 \Rightarrow a = -\dfrac{3}{2}$.

Luego, $P(x) = -\dfrac{3}{2}(x-2)(x+1) \to P(x) = -\dfrac{3}{2}\left(x^2 - x - 2\right) = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 3$.

**Problema 2**

Halla el valor de *c* en el polinomio $P(x) = -3x^2 + 2x + c$ en cada uno de los siguientes supuestos:

a) Al dividirlo por $x + 1$ su resto sea –2.

b) Una de sus raíces sea 2.

<u>Solución</u>:

a) El resto de la división de $P(x)$ entre $x + 1$ es igual a $P(-1)$; en este caso, $P(-1)$ debe valer –2.

Como $P(-1) = -3\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) + c = -5 + c$, para que $-5 + c = -2 \Rightarrow c = 3$.

El polinomio pedido es $P(x) = -3x^2 + 2x + 3$.

b) Si una de sus raíces es 2, entonces $P(2) = 0$.

Sustituyendo, $P(2) = -3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + c = 0 \Rightarrow -12 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = 8$.

El polinomio pedido será $P(x) = -3x^2 + 2x + 8$.

**Problema 3**

Dado el polinomio $P(x) = k(x-1)(x+2)^2$, halla, sin hacer multiplicaciones ni potencias:

a) Sus raíces y su grado.

b) El valor de *k* para que $P(3) = 100$.

<u>Solución</u>:

a) Sus raíces son 1 y –2; esta última es doble. (Puede decirse que tiene tres raíces: 1, –2 y –2).
Es un polinomio de grado 3, pues es producto de dos binomios, el primero de grado 1 y el segundo de grado 2.

b) Si $P(3) = 100 \Rightarrow P(3) = k(3-1)(3+2)^2 = 100 \Rightarrow k\cdot 50 = 100 \Rightarrow k = 2$.

Luego $P(x) = 2(x-1)(x+2)^2$ $\to$ Si no se pide su desarrollo se deja como está: un polinomio factorizado es sencillo de escribir y de manejar.

**Problema 4**

Halla la descomposición en factores de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

<u>Solución</u>:

Es un polinomio de tercer grado: tendrá tres raíces. Si alguna de ellas es un número entero, debe ser divisor del término independiente, de 4. Luego, sus raíces hay que buscarlas entre los divisores de 4, que son: 1, –1, 2, –2, 4 y –4.

Se prueba:

Para $x = 1$, $P(1) = 1 - 3 + 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ no es raíz.

Para $x = -1$, $P(-1) = -1 - 3 + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$ sí es raíz. Luego $x + 1$ es un factor de $P(x)$.

Dividiendo $P(x):(x+1)$ se obtiene el otro factor.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$\to$ El cociente es $C(x) = x^2 - 4x + 4$.

Por tanto, $P(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 4)$.

Los siguientes factores pueden buscarse probando con 2 y –2… o resolviendo la ecuación

$x^2 - 4x + 4 = 0 \to x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 4}}{2} = 2$, raíz doble: se repite dos veces el factor $x - 2$.

Por tanto, $P(x) = (x+1)(x-2)(x-2) = (x+1)(x-2)^2$.

## 3. Fracciones algebraicas

<u>Las fracciones algebraicas</u> son de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$; aquellas en las que el numerador y el denominador son polinomios. (El numerador no es imprescindible que sea un polinomio).

Son fracciones algebraicas $\dfrac{2x+3}{3x}$, $\dfrac{4}{x^2-x}$ o $\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

<u>Equivalencia: simplificación</u>

Recuerda: Con fracciones ordinarias, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$.

Con fracciones algebraicas:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x)\cdot D(x)=B(x)\cdot C(x).$$

Para obtener fracciones equivalentes se multiplica o divide el numerador y el denominador por una misma expresión algebraica no nula. Esta propiedad permite simplificar fracciones algebraicas.

→ En la simplificación de fracciones algebraicas es frecuente cometer errores. Insisto: solo pueden eliminarse factores comunes en el numerador y denominador. (No pueden eliminarse sumandos).

**Ejemplos**:

a) Las fracciones algebraicas $\dfrac{x}{x+2}$ y $\dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$ son equivalentes. En la segunda se han multiplicado el numerador y el denominador por la expresión $x-1$.

b) La fracción algebraica $\dfrac{6x^2+9}{3x}$ puede simplificarse como sigue:

$$\frac{6x^2+9}{3x}=\frac{3(2x^2+3)}{3x}=\frac{2x^2+3}{x}$$ → Se ha dividido el numerador y el denominador por 3.

c) $\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ también puede simplificarse, pues: $\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\dfrac{(x+4)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=x+4$.

Para simplificar una fracción algebraica hay que buscar factores comunes en ambos términos.

d) Están MAL las siguientes "simplificaciones":

$$\frac{2x^2+3x}{x^2+5}=\frac{2+3x}{1+5}=\frac{2+3x}{6}$$ → La expresión original no puede simplificarse.

$$\frac{4x^3\cdot(3x-4)-x^2}{x^4}=\frac{4\cancel{x^3}\cdot(3x-4)-x^2}{\cancel{x^3}\cdot x}=\frac{4\cdot(3x-4)-x^2}{x}$$ → Es el mismo error.

Sí está bien: $\dfrac{4x^3\cdot(3x-4)-x^2}{x^4}=\dfrac{\cancel{x^2}\cdot\left(4(3x-4)-1\right)}{\cancel{x^2}\cdot x^2}=\dfrac{4\cdot(3x-4)-1}{x^2}$ → Hay que buscar factores comunes.

<u>Observación</u>: Para simplificar una fracción algebraica hay que buscar factores comunes en ambos términos; por tanto, la factorización del numerador y del denominador es necesaria. Si el denominador está escrito como producto es mejor no hacer la multiplicación de sus términos.

→ por ejemplo, $\dfrac{x^2+3x-4}{(x-1)(x+5)}$ se simplifica descomponiendo el numerador: $\dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+5)}=\dfrac{x+4}{x+5}$.

**Operaciones con fracciones algebraicas**

→ Las fracciones algebraicas se operan del mismo modo que las fracciones ordinarias. No obstante, como aquí hay que operar con polinomios, son frecuentes los errores de signos y los errores en el (no) empleo de paréntesis; por tanto, debe procederse con cuidado.

<u>Suma y resta</u>:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)\cdot D(x) \pm C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}; \qquad \frac{A(x)}{B(x)} \pm C(x) = \frac{A(x) \pm C(x)\cdot B(x)}{B(x)}.$$

**Ejemplos**:

a) $\dfrac{x^2}{x+1} + \dfrac{4x}{x+1} = \dfrac{x^2+4x}{x+1}$ → (Las fracciones tienen el mismo denominador).

b) $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{2x-3}{2x} = \dfrac{x^2\cdot 2x - (2x-3)(x+1)}{(x+1)\cdot 2x} = \dfrac{2x^3 - \left(2x^2+2x-3x-3\right)}{2x^2+2x} = \dfrac{2x^3-2x^2+x+3}{2x^2+2x}$.

Recuerda que un signo − delante de un paréntesis cambia los signos de todos los términos.

c) $\dfrac{2x^2-4}{x-5} + 3x = \dfrac{2x^2-4+3x(x-5)}{x-5} = \dfrac{2x^2-4+3x^2-15x}{x-5} = \dfrac{5x^2-15x-4}{x-5}$.

d) La utilización del mínimo común múltiplo simplifica los cálculos.

- $\dfrac{5x-2}{x^2} - \dfrac{4}{x} = \dfrac{5x-2}{x^2} - \dfrac{4\cdot x}{x\cdot x} = \dfrac{5x-2}{x^2} - \dfrac{4x}{x^2} = \dfrac{5x-2-4x}{x^2} = \dfrac{x-2}{x^2}$ → $\text{mcm}\left(x^2, x\right) = x^2$.
- $\dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{x\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{x^2-x}{x^2-1} = \dfrac{1+x^2-x}{x^2-1} = \dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$ →
  → $\text{mcm}\left(x^2-1, x+1\right) = x^2-1$.

<u>Multiplicación y división de fracciones algebraicas</u>:

$$\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}; \qquad \frac{A(x)}{B(x)} : \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}.$$

**Ejemplos**:

a) $\dfrac{2x-2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{(2x-2)x^2}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{2x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1}$.

b) $\dfrac{x^2-9}{2x+1} : \dfrac{x+3}{3-x} = \dfrac{(x^2-9)\cdot(3-x)}{(2x+1)(x+3)} = \dfrac{(x+3)(x-3)(3-x)}{(2x+1)(x+3)} = -\dfrac{(x-3)^2}{2x+1}$.

c) Puede simplificarse antes de terminar (durante el proceso), si se puede.

$$\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2x-2}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} = \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)}}\cdot\frac{2\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x+1)}} - \frac{2-x}{x+1} = \frac{2}{x} - \frac{2-x}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x(2-x)}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{2x+2}{x(x+1)} - \frac{2x-x^2}{x(x+1)} = \frac{2x+2-\left(2x-x^2\right)}{x(x+1)} = \frac{2+x^2}{x(x+1)}.$$

→ Un <u>error</u> típico en la operación anterior sería escribir en el numerador: $2x+2-2x-x^2$.