LÍMITES
Y
CONTINUIDAD

U.D. 6 1º BCS

6.1 LÍMITES.

6.1.1 Concepto de límite. Límites laterales. Propiedades.
6.1.2 Tipos de límites.
6.1.3 Cálculo de límites.

6.2 ASÍNTOTAS.

6.2.1 Asíntotas verticales.
6.2.2 Asíntotas verticales.
6.2.3 Asíntotas oblicuas.

6.3 CONTINUIDAD..

6.3.1 Continuidad de una función. Propiedades.
6.3.2 Tipos de discontinuidad.
6.2.3 Asíntotas oblicuas.

CONCEPTO DE LÍMITE. LÍMITES LATERALES. PROPIEDADES.

U.D. 6.1.1 1º BCS

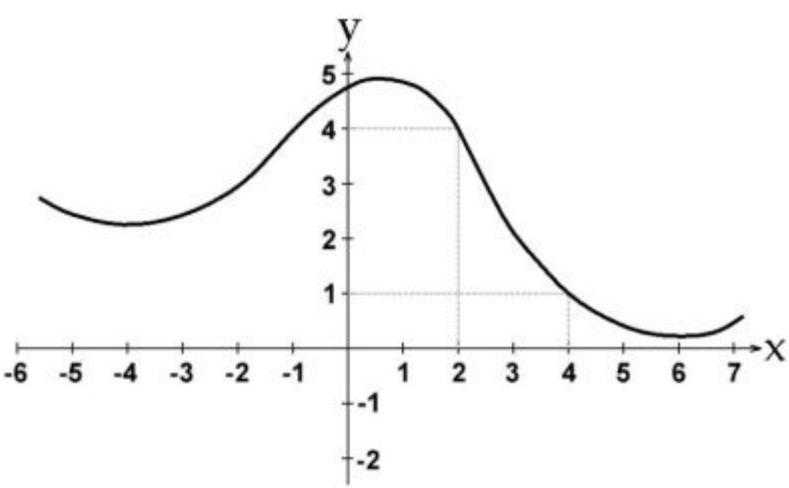
DEFINICIÓN DE LÍMITE

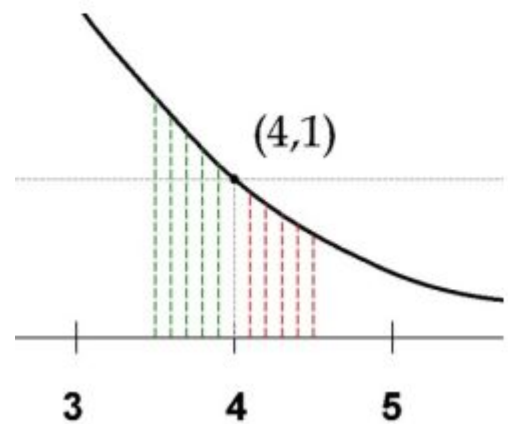
- Llamamos **LÍMITE** de una función f(x) en un punto x=a al valor al que se aproximan las imágenes de la función cuando x se aproxima al valor de a, todo lo que queramos sin llegar a tocar ese valor de a.

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ → **Se lee: El límite de la función de f(x) cuando x tiende a.**

- **EJEMPLO:**

$\lim_{x \to 4} f(x) = ?$





$\lim_{x \to 4} f(x) = 1$

DEFINICIÓN DE LÍMITE

- **EJEMPLO:**

$$\lim_{x \to 2} x^2 - 3 = ?$$

Damos valores a la variable para valores próximos al punto $x = 2$.

x	3	2.5	2.1	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.001	2.0001
$f(x)$	6	3.25	1.41	1.2025	1.1616	1.1209	1.0804	1.0401	1.004001	1.00040001

x	1	1.5	1.7	1.9	1.95	1.97	1.98	1.99	1.999	1.9999
$f(x)$	–2	–0.75	–0.11	0.61	0.8095	0.8809	0.9204	0.9601	0.996001	0.99960001

$$\lim_{x \to 2} x^2 - 3 = 1$$

LÍMITES LATERALES

En un límite vemos que x puede tender al valor de "a" tomando valores tanto por su derecha como por su izquierda. Por ejemplo, puede tender a 2 tomando las siguientes sucesiones de números:

2'1, 2'01, 2'001,2'0001, 2'00001, …

1'9, 1'99, 1'999, 1'9999, 1'99999, …

Se hace preciso distinguir ambos límites.

LIMITE POR LA DERECHA

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L_1$$

LIMITE POR LA IZQUIERDA

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L_2$$

Dada una función $f(x)$ y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a es L si se verifica que:

1) Existen $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

2) Son iguales: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Entonces decimos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Una función f tiene límite en un punto x_0 si sus límites laterales en dicho punto existen y coinciden.

¡OJO! NO TIENE QUE ESTAR LA FUNCIÓN DEFINIDA EN ESE PUNTO.

f(x)≠L o f(x)= No tiene solución

LÍMITES LATERALES

Ejemplo_1

$$\text{Lím}_{x \to 1} \frac{x-4}{x-2}$$

x	y
0,99	2,9802
0,999	2,9980
1	?
1,001	3,0020
1,01	3,0202

Lím f(x) = Lím f(x) = Lím f(x) = 3
x□1 x□1+ x□1-

Pero también coincide con su valor en x=1 → f(1) = (1 – 4)/(1 – 2)=3

Ejemplo_2

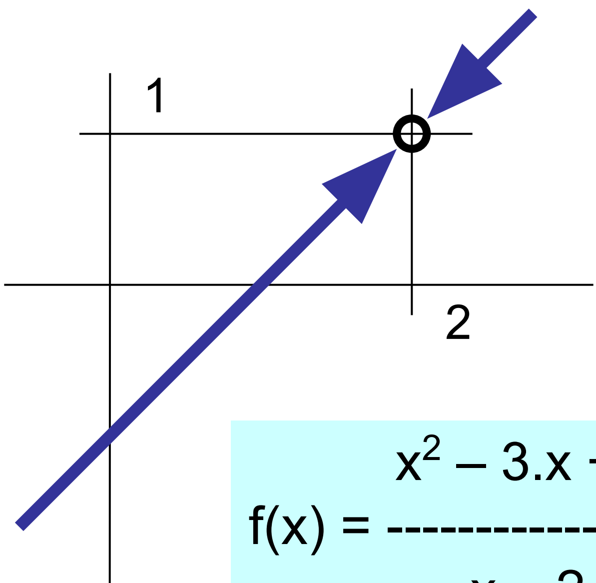
$$\text{Lím}_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

x	y
2,999	0,1667
2,9999	0,16667
3	?
3,0001	0,16667
3,001	0,1667

Lím f(x) = Lím f(x) = Lím f(x) = 3
x□1 x□1+ x□1-

Pero esta vez no coincide con:
f(3) = No existe ya que la funcion no está definida para x=3. Pero esto no importa para que el límite exista.

VALOR DEL LÍMITE Y VALOR DE LA FUNCIÓN



$$f(x) = \frac{x^2 - 3.x + 2}{x - 2} = \frac{(x-1).(x-2)}{x - 2} = x-1$$

EJEMPLO 1

Sea la función de la izquierda.
Si calculamos el límite en x=2 tenemos:

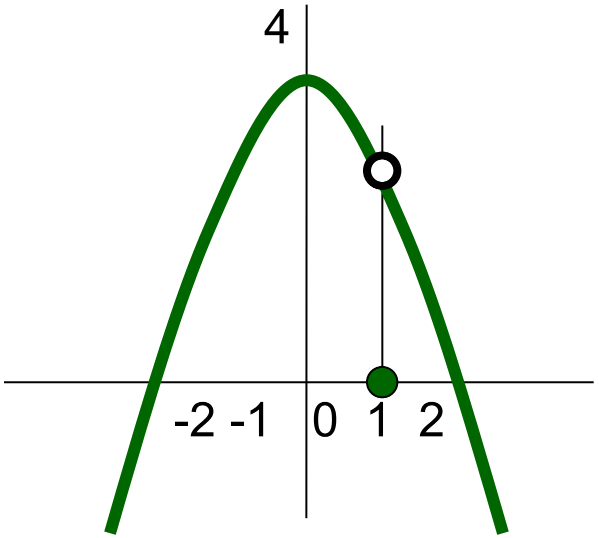
$$\text{Lím}_{x \to 2^+} f(x) = \text{Lím}_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

Sin embargo en x=2 la función no existe, pues su dominio es:
Dom f(x) = R – {2}

En x=2 la función presenta límite y vale 1, aunque no existe valor de la función.

- **EJEMPLO 2:**

- Sea la función de la derecha:
- Si calculamos el límite en x=1 tenemos:
- Lím f(x) = $4 - 1^2 = 3$
- x□1+
- Lím f(x) = $4 - 1^2 = 3$
- x□1-
- Al ser iguales los límites laterales, en
- x = 1 la función tiene límite y vale 3.
- Sin embargo en x=1 la función existe y vale 0: f(1) = 0

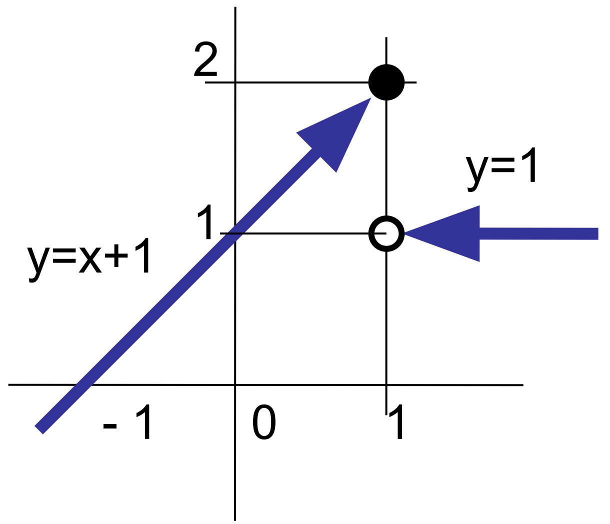


$$y = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } x \neq 1 \\ 0, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- En x=1 la función existe, y el límite también, pero sus valores son distintos.
- f(1) ≠ lím f(x)

  x□1

EJEMPLO 3:



$$f(x) = \begin{cases} x+1 , & \text{si } x \leq 1 \\ 1 , & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sea la función definida a trozos de la izquierda:

Si calculamos el límite en x=1 tenemos:

Lím f(x) = 1

x□1+

Lím f(x) = 2

x□1-

Al no ser iguales los límites laterales, en x = 1 la función no tiene límite.

Sin embargo en x=1 la función existe y vale 2:

f(1) = 1+1 = 2

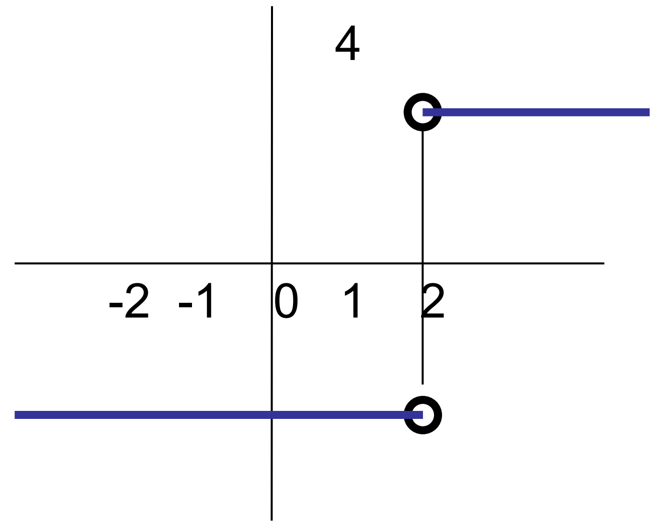
En x=1 la función existe, pero no presenta límite.

- **EJEMPLO 4**

Sea la función de la derecha:

La podemos escribir también así:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x<2 \\ 1 & \text{Si } x>2 \end{cases}$$



Si calculamos el límite en x =2 tenemos:

Lím f(x) = (– 2+ 2+)/(2+ – 2) = 1

x□2+

Lím f(x) = (– 2+2-)/(2- – 2) = – 1

x□2-

Al no ser iguales los límites laterales, en x = 2 la función no tiene límite.

Tampoco existe en x=2, pues no forma parte del dominio de la función.

$$f(x) = \frac{|2-x|}{x-2} = \begin{cases} (2-x)/(x-2) & \text{Si } x<2 \\ -(2-x)/(x-2) & \text{Si } x\geq 2 \end{cases}$$

Estudiamos valor absoluto:

$2\text{-}x > 0 \rightarrow x<2$

$2\text{-}x < 0 \rightarrow x>2$

LÍMITES LATERALES

Sea $f(x) = \begin{cases} x - 4 & , \text{ si } x < 2 \\ -2 & , \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

 Función lineal

 Función constante

Miramos si presenta límite en el punto de ruptura, en x=2

Límite por la izquierda de x=2

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (x - 4) = 2 - 4 = -2$

Límite por la derecha de x=2

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} -2 = -2$

El límite por la izquierda coincide con el límite por la derecha, luego en x=2 existe dicho límite y vale - 2.

EJERCICIO 1:

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \text{ si } x < 1 \quad \square \text{ Función cuadrática} \\ x - 2 & , \text{ si } x \geq 1 \quad \square \text{ Función lineal} \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Miramos si presenta límite en el punto de ruptura, en x=1

Límite por la izquierda de x=1

Lím f(x) = lím $(x^2 - 4) = 1^2 - 4 = -3$

x□1- x□1

Límite por la derecha de x=1

Lím f(x) = lím $(x - 2) = 1 - 2 = -1$

x□1+ x□1

El límite por la izquierda no coincide con el límite por la derecha, luego en x=1 no existe límite de la función.

EJERCICIOS:

Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & si\ \ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+3}{x+5} & si\ \ x < 1 \\ \frac{5x^2}{x+3} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} & si\ \ x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

PROPIEDADES.

1. **UNICIDAD:** Si $\exists \lim_{x \to a} f(x)$, es ÚNICO.

1. **OPERACIONES CON LÍMITES:**

Si $\lim_{x \to a} f(x) = p$ y $\lim_{x \to a} g(x) = q$

a) SUMA: El límite de una suma es la suma de los límites:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = p \pm q$$

b) PRODUCTO: Dos tipos:

Por un escalar: $\lim_{x \to a} (k.f(x)) = k . \lim_{x \to a} f(x) = k. p$

Por una función: El límite de un producto de dos límites:

$$\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) = p. q$$

c) COCIENTE:

$\lim_{x \to a} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x) = p / q$, excepto que q=0

d) POTENCIA El límite de una potencia es la potencia de los limites :

$$\lim_{x \to a} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Una función es constantes: $\lim_{x \to a} (f(x)^K) = (\lim_{x \to a} f(x))^K$

f) COMPOSICIÓN DE FUNCIONES:

$\lim_{x \to a} (g(f(x))) = g(\lim_{x \to a} f(x))$ si g es continua en $f(x)$.

Ejercicios

Si $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ y $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$, calcula:

a) $\lim_{x \to 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) = 5 + 3 = 8$

b) $\lim_{x \to 2} 7.f(x) = 7. \lim_{x \to 2} f(x) = 7.5 = 35$

c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{[\, f(x) / g(x) \,]} = \sqrt{[\, \lim_{x \to 2} f(x) / \lim_{x \to 2} g(x) \,]} = \sqrt{(5 / 3)} = \sqrt{15} / 3$

d) $\lim_{x \to 2} (f(x))^{g(x)} = 5^{3} = 125$

f) $\lim_{x \to 2} \log_{25} f(x) = \log_{25} \lim_{x \to a} f(x) = \log_{25} 5 = 1 / 2$

TIPOS DE LÍMITES.

U.D. 6.1.2 1º BCS

6.1 LÍMITES.

6.1.1 Concepto de límite. Límites laterales. Propiedades.
6.1.2 Tipos de límites.
6.1.3 Cálculo de límites.

6.2 ASÍNTOTAS.

6.2.1 Asíntotas verticales.
6.2.2 Asíntotas horizontales.
6.2.3 Asíntotas oblicuas.

6.3 CONTINUIDAD..

6.3.1 Continuidad de una función. Propiedades.
6.3.2 Tipos de discontinuidad.
6.2.3 Asíntotas oblicuas.

1.2. TIPOS DE LÍMITES

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se clasifican según:

- **Valor** al que tiende la **variable independiente**: Finito / Infinito

- **Valor** del **Límite**: Finito / Infinito

		VALOR VARIABLE INDEPENDIENTE	
		FINITO	INFINITO
VALOR DEL LÍMITE	FINITO	$\lim_{x \to a} f(x) = L$	$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
	INFINITO	$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$	$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

1.2. TIPOS DE LÍMITES.

- **Límite finito en punto finito:** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

- **Límite finito en punto infinito:** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- **Límite infinito en punto finito:** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

- **Límite infinito en punto infinito:** $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$

1.2 TIPOS DE LÍMITES. EJERCICIOS.

1) Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^3$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$

2) Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{5}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{5}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{-5}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{-5}{x-3}$

CÁLCULO DE LÍMITES.

U.D. 6.1.3 1º BCS

6.1 LÍMITES.

6.1.1 Concepto de límite. Límites laterales. Propiedades.
6.1.2 Tipos de límites.
6.1.3 Cálculo de límites.

6.2 ASÍNTOTAS.

6.2.1 Asíntotas verticales.
6.2.2 Asíntotas horizontales.
6.2.3 Asíntotas oblicuas.

6.3 CONTINUIDAD..

6.3.1 Continuidad de una función. Propiedades.
6.3.2 Tipos de discontinuidad.
6.2.3 Asíntotas oblicuas.

1.3. CÁLCULO DE LÍMITES.

Para poder calcular límites sustituimos por el valor al que tiende x, pero ahora la cosa se complica un poco con valores infinitos. Por este motivo, debemos conocer previamente ciertas operaciones con ∞ y 0,

Observa la tabla siguiente y comprueba que en ocasiones sí sabemos el resultado, pero en otras, decimos "indeterminado" o no queda determinado. Esto no significa que no pueda existir el límite, sino que será necesario realizar algunas operaciones previas para poder determinar si existe, y su valor.

SUMA	PRODUCTO	COCIENTE	
$\infty \pm K = \infty$	$K \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{K} = 0$	$\boxed{\frac{K}{0} = \pm\infty}$ No queda determinado
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\infty}{K} = \infty$	$\frac{K}{\infty} = 0$
$\boxed{\infty - \infty = \text{Indeterminado}}$	$\boxed{0 \cdot \infty = \text{Indeterminado}}$	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
		$\boxed{\frac{0}{0} = \text{Indeterminado}}$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminado}}$

1.3. CÁLCULO DE LÍMITES. INDETERMINACIONES

POTENCIAS		
$K^0 = 1$	$0^K = \begin{cases} 0 & si\ K \geq 0 \\ \infty & si\ K < 0 \end{cases}$	0^0 = Indeterminado
$0^\infty = 0$	$K^{+\infty} = \begin{cases} 0 & si\ 0 < K < 1 \\ +\infty & si\ K > 1 \end{cases}$	∞^0 = Indeterminado
$+\infty^{+\infty} = +\infty$	$e^{+\infty} = +\infty$ $\quad e^{-\infty} = 0^+$	1^∞ = Indeterminado

1,- INDETERMINACIÓN $\frac{K}{0}$ **≠0) :** lim x→a

$$\frac{K}{0} = \pm\infty$$

En este tipo de límites debemos calcular los límites laterales. Ejemplos:

1)

$$\lim_{X\to 3} \frac{2X}{X-3} = \frac{6}{0}\ (Calculamos\ límites\ laterales) \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{X\to 3^+} \frac{2X}{X-3} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to 3^-} \frac{2X}{X-3} = -\infty \end{cases}$$

Límites laterales: No coinciden por lo tanto no existe el límite.

1.3. CÁLCULO DE LÍMITES. INDETERMINACIONES

2)

$$\lim_{X\to-1}\frac{X-3}{(X+1)^2}=\frac{-4}{0}\ (Calculamos\ límites\ laterales)\rightarrow\begin{cases}\lim_{X\to-1^+}\frac{X-3}{(X+1)^2}=-\infty\\ \lim_{X\to-1^-}\frac{X-3}{(X+1)^2}=-\infty\end{cases}$$

Los límites laterales coinciden por lo tanto existe el límite y es -∞

<u>2,- INDETERMINACIÓN ∞ -∞:</u>

<u>Este tipo de indeterminaciones se pueden resolver haciendo operaciones con ambas funciones, ya que suelen ser del tipo f(x) g(x).</u>

Ejemplos:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)\left[=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\right]\rightarrow \text{Indeterminado}$$

$$\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1-(x+2)}{x^2-4}=\frac{-x-1}{x^2-4}\qquad \lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to2}\frac{-x-1}{x^2-4}=\frac{-2-1}{2^2-4}=\frac{-3}{4-4}=-\infty$$

1.3. CÁLCULO DE LÍMITES. INDETERMINACIONES

Actividades propuestas: Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -2}\left(\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$

1.3. CÁLCULO DE LÍMITES. INDETERMINACIONES

3,- INDETERMINACIÓN 0/0:

Este tipo de indeterminaciones se producen porque existen algunos factores en el numerador y denominador que lo hacen cero y que será conveniente eliminar por algún método matemático. Para ello, debemos factorizar polinomios, multiplicar y dividir por el conjugado o cualquier otro procedimiento que nos permita eliminar la indeterminación.

Ejemplos: SOL.: a) 4/3; b) 1/4

a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} \right)$

$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$

Actividad: Calcula los límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3-5x^2}{x^2}$

$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15}$

$\lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9} \right)$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} \right)$

1.3. CÁLCULO DE LÍMITES. INDETERMINACIONES

4,- INDETERMINACIÓN 0.∞:

Normalmente suelen darse en productos de funciones f(x) g(x), donde f(x) = 0 y g(x) =∞ Suelen resolverse operando y transformando la indeterminación en otra del tipo 0/0 que sí sabermos resolver.

Ejemplos: SOL.: 0

$$\lim_{x\to -3} (x^2+6x+9)\cdot\left(\frac{1}{x+3}\right)[=0\cdot\infty] \to \text{Indeterminado}$$

Actividad. Calcular el límite: SOL. 1/3

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\cdot\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right)$$

1.3. CÁLCULO DE LÍMITES. INDETERMINACIONES

5,- INDETERMINACIÓN ∞/∞:

Para resolver este tipo de indeterminaciones, es necesario comparar el grado del polinomio del numerador con el grado del polinomio del denominador, pudiéndose presentar los siguientes casos:

Si grado($P(x)$) > grado ($Q(x)$) entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

Si grado($P(x)$) = grado ($Q(x)$) entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = K$

Si grado($P(x)$) < grado ($Q(x)$) entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Para resolver este tipo de límites dividiremos arriba y abajo por x elevada al grado del menor polinomio.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2+2x-4}{x^2+5}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+2x-3}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+7}{4x^3+2x-1}$

RESUMIENDO:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \infty & si \quad n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n < m \end{cases}$$

1.3. CÁLCULO DE LÍMITES. INDETERMINACIONES

5,- INDETERMINACIÓN ∞/∞:

AVTIVIDAD. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$