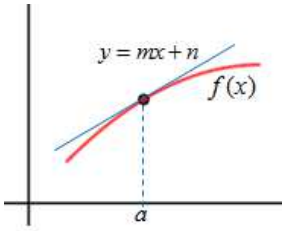
TEMA 7: CÁLCULO DE DERIVADAS.

La Matemática ha evolucionado siempre a partir de lo pequeño, cuidando los detalles. Los conceptos de límite y de derivada son un buen ejemplo de ello. (Algo de historia).

1. Definición de derivada

La derivada de una función mide el cambio (instantáneo) de esa función en un punto $x = a$. Ese cambio es el mismo que el de la recta tangente a la función en ese punto, que es su pendiente m. Lo justificamos como sigue.

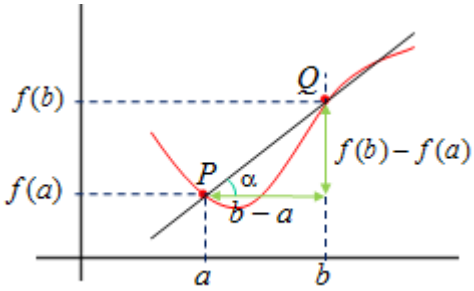


Tasa de variación de una función (media e instantánea)

La tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es un número que da la inclinación (la pendiente) de la recta que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$. Es el cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable (el cociente de las diferencias). Esto es,

$$TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

La diferencia $f(b)-f(a)$ da la variación de la función en el intervalo $[a, b]$; al dividir por $b-a$ se halla la variación por unidad.



Observaciones:

1. La *TVM* coincide con la tangente del ángulo α que da la pendiente de la recta secante a la curva $f(x)$ que pasa por los puntos P y Q de ella.
2. La *TVM* puede llamarse también velocidad media de cambio, pues la idea de velocidad media en un trayecto expresa bien este concepto. (Otros nombres para designar la *TVM* son: evolución media, tasa de crecimiento, incremento medio).

Ejemplos:

a) En cinco días (semana del 17 al 21 de febrero de 2020) el índice bursátil, IBEX 35, abrió cotizando a 9981,20 puntos y cerró la semana en 9886,20 puntos.

A partir de estos datos puede deducirse:

1. La variación semanal fue de 9886,20 – 9981,20 = –95 (–0,952 %). (Los "números rojos" suelen indicar pérdidas).

2. La variación media en esos 5 días fue:

$$TVM\left(IBEX35,[17/02,21/02]\right) = \frac{9886,20-9981,20}{5} = -19\ (-0,19\ \%).$$

3. La *TVM* es una media, lo que significa que no tiene en cuenta las fluctuaciones intermedias; solo considera los valores inicial y final, dando por supuesto que las diferencias se dan proporcionalmente, siguiendo una línea recta. Por tanto, el resultado puede resultar engañoso, pues no tiene en cuenta las cotizaciones entre semana: el máximo o el mínimo, las caídas bruscas…

Así, el miércoles 19 de febrero el IBEX abrió en 10005,8 puntos y cerró en 10083,6, ganando 77,8 puntos (+0,78 %). En cambio, el jueves 20/02 la bolsa abrió en 10083,60 y cerró en 9931,00, lo que supuso una variación (pérdida) de –152,6 puntos (–1,51 %).

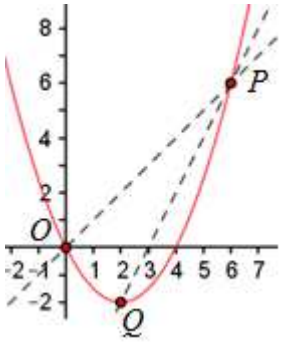
→ Las variaciones bursátiles suelen darse en porcentajes, mediante la expresión $\frac{TVM[a,b]}{f(a)}\cdot 100$ %.

4. El gráfico que muestra la evolución de la bolsa en esos cinco días es prácticamente impredecible. (Así, nadie pudo predecir que el lunes siguiente, 24/02/2020, el IBEX 35 perdería 402,7 puntos, el 4,07 %, lo que supuso la mayor caída en 4 años). Por eso, en la bolsa es muy importante la cotización en tiempo real, la variación instantánea.

b) Las tasas de variación media de la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$, en los intervalos [0, 6] y [2, 6], son:

$$TVM\left[0,\ 6\right]=\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{6-0}{6}=1;$$

$$TVM\left[2,\ 6\right]=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{6-(-2)}{4}=2.$$



Esos valores coinciden con la pendiente de las rectas que pasan por los puntos *O*, *P* y *Q*, *P*, respectivamente.
Observa que en el punto *O* la curva está decreciendo; en el punto *Q* toma su valor mínimo; y en el punto *P* crece a un fuerte ritmo. De nada de eso nos informa la *TVM*.

La tasa de variación instantánea de una función $f(x)$ en un punto *a* es el límite de la *TVM* en el intervalo [*a*, *b*] cuando $b \to a$, o también en el intervalo $[a,\ a+h]$ con *h* muy pequeño; esto es:

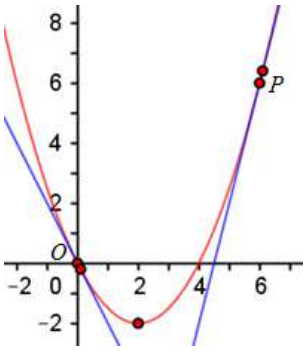
$$TVI(a)=\lim_{b\to a}\left(TVM[a,\ b]\right)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a};\ \text{o también}\ TVI(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Esta tasa da el crecimiento (o decrecimiento) en un punto: mide el cambio instantáneo. Un ejemplo cotidiano de *TVI* es la velocidad instantánea de un automóvil, la que indica el cuentakilómetros.

Ejemplos:

a) Para la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$, la tasa de variación media en el intervalo [0, *h*] es:

$$TVM\left[0,\ h\right]=\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\frac{0{,}5h^2-2h-0}{h}=0{,}5h-2.$$



Si $h=0{,}2,\ TVM\left[0,\ 0{,}2\right]=0{,}5\cdot 0{,}2-2=-1{,}9$;
si $h=0{,}1,\ TVM\left[0,\ 0{,}1\right]=0{,}5\cdot 0{,}1-2=-1{,}95$.
La tasa de variación instantánea en 0 vale −2:

$$TVI(0)=\lim_{h\to 0}\left(0{,}5h-2\right)=0{,}5\cdot 0-2=-2.$$

(La recta que pasa por dos puntos muy próximos a *O* tiene pendiente muy próxima a −2).

b) Para la misma función, la tasa de variación media en el intervalo [6, 6 + *h*] es:

$$TVM\left[6,\ 6+h\right]=\frac{f(6+h)-f(6)}{6+h-6}=\frac{\left(0{,}5h^2+4h+6\right)-6}{h}=\frac{0{,}5h^2+4h}{h}=0{,}5h+4.$$

Si $h=0{,}2,\ TVM\left[6,\ 6{,}2\right]=0{,}5\cdot 0{,}2+4=4{,}1$; si $h=0{,}1,\ TVM\left[6,\ 6{,}1\right]=0{,}5\cdot 0{,}1+4=4{,}05$.
La tasa de variación instantánea en 6 vale 4: $TVI(6)=\lim_{h\to 0}\left(0{,}5h+4\right)=0{,}5\cdot 0+4=4$.
(La recta que pasa por dos puntos muy próximos a *P* tiene pendiente muy próxima a 4).

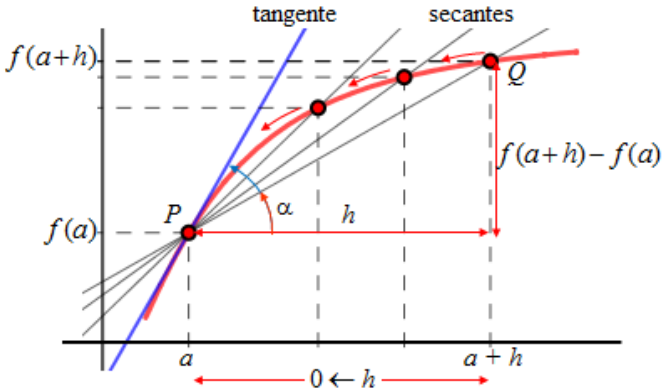
Derivada de una función en un punto

La tasa de variación instantánea de una función $f(x)$ en un punto a es la derivada de $f(x)$ en ese punto a; se denota por $f'(a)$. Esto es: $TVI(a) = f'(a)$.
Por tanto:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Aunque ya se ha indicado para la *TVI*, con ayuda de la figura adjunta, puede observarse:

1. La $TVM[a,\ a+h] = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ da la pendiente de la recta secante (la que pasa por los puntos P y Q): $TVM[a,\ a+h] = \tan\alpha$.



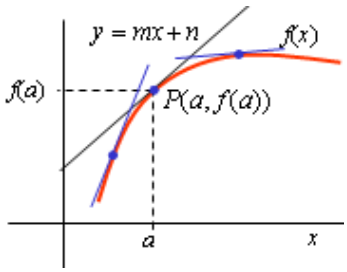
2. Al hacer el límite cuando $h \to 0$,
$\lim_{h\to 0}\left(TVM[a,\ a+h]\right) = f'(a)$,
el punto Q se acerca cada vez más a P, y la recta secante pasa cada vez por dos puntos más próximos, hasta confundirse con la recta tangente a la curva en el punto P.
Luego, $f'(a)$ da la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.

3. Esta es la interpretación geométrica de la derivada: la derivada en $x = a$, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.
Como la ecuación de una recta es $y = mx + n$, si se sabe que $m = f'(a)$, y que, además, la recta pasa por $P(a, f(a))$, entonces:

$$y = mx + m \Rightarrow \begin{cases} m = f'(a) \to y = f'(a)\cdot x + n \\ \text{Pasa por } (a, f(a)) \to f(a) = f'(a)\cdot a + n \end{cases},$$

Despejando n en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera se obtiene la expresión

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$



Ejemplos:

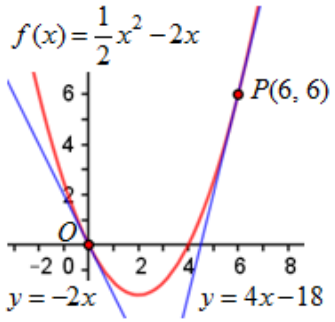
Para la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$, estudiada anteriormente:

a) Su derivada en $x = 0$ es:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0{,}5h^2-2h-0}{h} = \lim_{h\to 0}(0{,}5h-2) = -2.$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $O(0, 0)$ será:

$$y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Rightarrow y - 0 = -2\cdot(x-0) \Rightarrow y = -2x.$$



b) Su derivada en $x = 6$ es:

$$f'(6) = \lim_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(0{,}5h^2+4h+6\right)-6}{h} = \lim_{h\to 0}(0{,}5h+4) = 4.$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(6, 6)$ es:

$$y - f(6) = f'(6)\cdot(x-6) \Rightarrow y - 6 = 4\cdot(x-6) \Rightarrow y = 4x - 18.$$

2. Función derivada

En los ejemplos anteriores, para hallar $f'(0)$ y $f'(6)$ ha sido necesario repetir el límite $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, en un caso para $a = 0$; en el otro para $a = 6$.
Este proceso de repetición no es necesario, pues existen fórmulas generales que dan la derivada para las funciones usuales. Esto es lo que proporciona la función derivada.

- La función derivada de $f(x)$ es una nueva función (que se expresa mediante otra fórmula) y que asocia a cada número real su derivada. Se denota por $f'(x)$.

Su definición es la siguiente:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si $y=f(x)$, se escribe $y'=f'(x)$. [También se escribe $f'(x)=\dfrac{d\left(f(x)\right)}{dx}$ o $f'(x)=D\left(f(x)\right)$].
(La letra que designa la función es lo de menos, puede emplearse $g(x)$, $F(x)$, …).

- El cálculo de la función derivada se hace como sigue:

1) Se halla $f(x+h)$ y la diferencia $f(x+h)-f(x)$;
2) Se halla el cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$;
3) Se resuelve el límite, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Los cálculos anteriores, al ser genéricos (deben hacerse en función de *x* y *h*), pueden resultar muy complicados a este nivel; por eso se darán directamente, sin demostrarlos, con la salvedad del ejemplo que sigue y de la derivada de un polinomio que se hará en el punto siguiente.

Ejemplos:

a) La función derivada de $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x$ puede obtenerse así:

1) Se calcula $f(x+h)$: $f(x+h)=\dfrac{1}{2}\left(x+h\right)^2-2\left(x+h\right)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+2xh+h^2\right)-2x-2h$.

Se halla la diferencia $f(x+h)-f(x)$:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+2xh+h^2\right)-2x-2h-\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)=\frac{1}{2}h^2+xh-2h.$$

2) Se forma el cociente:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{2}h^2+xh-2h}{h}=\frac{\left(\frac{1}{2}h+x-2\right)h}{h}=\left(\frac{1}{2}h+x-2\right).$$

3) Se resuelve el límite:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}h+x-2\right)=\frac{1}{2}\cdot 0+x-2=x-2.$$

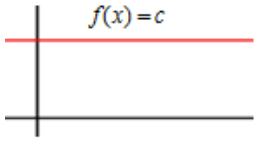
Por tanto, la función derivada de $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x$ es $f'(x)=x-2$.
Si ahora se desea hallar la derivada en cualquier punto, basta con sustituir en $f'(x)=x-2$.
Así:

$$f'(0)=0-2=-2;\ f'(1)=1-2=-1;\ f'(2)=2-2=0;\ f'(4)=4-2=2;\ f'(6)=6-2=4.$$

Derivada de un polinomio

Los polinomios son las funciones que se presentan con más frecuencia. La derivada de un polinomio es la suma o resta de las derivadas de cada uno de sus términos. Teniendo en cuenta que:

1. La derivada de un número es 0



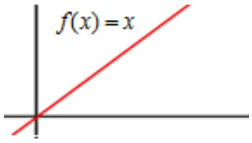
Si $f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$.

Recuerda que la derivada mide la tasa de cambio de una función: una constante no varía; su tasa de cambio es 0.

→ Geométricamente: la tasa de variación (la pendiente) de la recta $y = c$ es 0.

Por ejemplo: si $f(x)=5 \Rightarrow f'(x)=0$; si $g(x)=-2/3 \Rightarrow g'(x)=0$.

2. La derivada de $y = x$ vale 1



Si $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$.

La tasa de variación de $f(x)=x$ es la pendiente de esa recta, que vale 1.

→ De manera análoga, como la pendiente de la recta $y=mx$ vale m, la derivada de $f(x)=mx$ será $f'(x)=m$.

Por ejemplo: si $f(x)=4x \Rightarrow f'(x)=4$; si $h(x)=-0{,}5x \Rightarrow h'(x)=-0{,}5$.

3. La derivada de $y = x^2$ es $y' = 2x$

Si $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$.

En este caso, el proceso es:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

4. La derivada de $y = x^n$ es $y' = nx^{n-1}$

Si $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$.

- Esta regla es válida para cualquier valor de n, positivo, negativo o fraccionario.

Además, si la potencia se multiplica por un número: $f(x)=k\cdot x^n \Rightarrow f'(x)=k\cdot\left(x^n\right)'=k\cdot nx^{n-1}$.

Ejemplos:

a) Si $f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3$.

b) Si $f(x)=7x^4 \Rightarrow f'(x)=7\cdot\left(4x^3\right)=28x^3$.

c) Si $y=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$.

d) Si $y=-3x^5 \Rightarrow y'=-3\cdot\left(5x^4\right)=-15x^4$.

5. Derivada de un polinomio

Si $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0 \Rightarrow$

$f'(x)=a_n\left(x^n\right)'+a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)'+\ldots+a_2\left(x^2\right)'+a_1\left(x\right)'+0 \Rightarrow$ (la derivada de a_0 es 0) →

$f'(x)=a_n\cdot nx^{n-1}+a_{n-1}\cdot(n-1)x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot 2x+a_1$.

Ejemplos:

a) $f(x)=7x^4-5x^3+x^2-6x+2 \Rightarrow f'(x)=7\cdot 4x^3-5\cdot 3x^2+2x-6 \Rightarrow f'(x)=28x^3-15x^2+2x-6$.

b) Si $y=\frac{x^3}{2}-\frac{4x^2}{5}-7x+\frac{3}{5} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^3-\frac{4}{5}x^2-7x+\frac{3}{5} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot\left(3x^2\right)-\frac{4}{5}\cdot(2x)-7=\frac{3x^2}{2}-\frac{8x}{5}-7$.

Fórmula de la derivada de otras funciones

1. Función raíz cuadrada

La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Esta fórmula puede deducirse teniendo en cuenta que $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ y derivando esta expresión como una potencia $\left(f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}\right)$. Así:

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

→ La misma técnica puede aplicarse para la raíz de cualquier índice. Así, para $f(x)=\sqrt[3]{x}$, puede seguirse el proceso:

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \rightarrow f(x)=x^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{1/3-1}=\frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{2/3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Función exponencial

- Exponencial de base *a*: la derivada de $f(x)=a^x$ es $f'(x)=a^x\ln a$.
- Exponencial de base *e*: la derivada de $f(x)=e^x$ es $f'(x)=e^x$.

3. Función logarítmica

- Logaritmo en base *a*: la derivada de $f(x)=\log_a x$ es $f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e$.
- Logaritmo en base *e*: la derivada de $f(x)=\ln x$ es $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

4. Funciones seno y coseno

- Función seno: la derivada de $f(x)=\sin x$ es $f'(x)=\cos x$.
- Función coseno: la derivada de $f(x)=\cos x$ es $f'(x)=-\sin x$.

3. Reglas de derivación para las operaciones con funciones

Al derivar un polinomio se han utilizado dos de las propiedades fundamentales. A saber:

1) $f(x)=k\cdot x^n \Rightarrow f'(x)=k\left(x^n\right)'=k\cdot nx^{n-1}$.

2) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots \Rightarrow f'(x)=a_n\left(x^n\right)'+a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)'+\ldots$.

Estas propiedades, que valen para cualquier tipo de funciones, se formulan como sigue.

1. Derivada de una constante por una función

$$F(x)=k\cdot f(x) \rightarrow \left(F(x)\right)'=\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $y=2\cdot 3^x \Rightarrow y'=2\cdot\left(3^x\right)' \Rightarrow y'=2\cdot 3^x\cdot\log_3 2$. b) Si $y=5\cdot e^x \Rightarrow y'=5\cdot e^x$.

c) Si $y=2\sin x \Rightarrow y'=2\cdot\left(\sin x\right)'=2\cdot\cos x$. d) Si $y=-2\ln x \Rightarrow y'=-2\cdot\left(\ln x\right)'=-2\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2}{x}$.

2. Derivada de una suma o diferencia de funciones

$$F(x)=f(x)\pm g(x) \rightarrow \big(F(x)\big)'=\big(f(x)\pm g(x)\big)'=f'(x)\pm g'(x)$$

Ejemplo:

Si $y=-3x^2+4\sin x-\frac{1}{2}\cos x \Rightarrow y'=-3\left(x^2\right)'+4\left(\sin x\right)'-\frac{1}{2}\left(\cos x\right)' \Rightarrow$

$$y'=-3\left(2x\right)+4\left(\cos x\right)-\frac{1}{2}\left(-\sin x\right) \Rightarrow y'=-6x+4\cos x+\frac{1}{2}\sin x\,.$$

3. Derivada de un producto de funciones

$$F(x)=\big(f\cdot g\big)(x)=f(x)\cdot g(x) \rightarrow \big(F(x)\big)'=\big(f(x)\cdot g(x)\big)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $f(x)=2x^2-3x$ y $g(x)=3x^4+2x-7$, la derivada de su producto, $\big(f(x)\cdot g(x)\big)'$, puede hacerse de dos formas:

1) Aplicando la fórmula:

$$\Big(\big(2x^2-3x\big)\cdot\big(3x^4+2x-7\big)\Big)'=\Big(\big(2x^2-3x\big)'\Big)\cdot\big(3x^4+2x-7\big)+\big(2x^2-3x\big)\cdot\Big(\big(3x^4+2x-7\big)'\Big) \Rightarrow$$

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)'=\big(4x-3\big)\cdot\big(3x^4+2x-7\big)+\big(2x^2-3x\big)\cdot\big(12x^3+2\big)=$$

$$=\big(12x^5-9x^4+8x^2-6x-28x+21\big)+\big(24x^5-36x^4+4x^2-6x\big)=36x^5-45x^4+12x^2-40x+21\,.$$

2) Multiplicando antes las funciones y derivando después:

$$f(x)\cdot g(x)=\big(2x^2-3x\big)\cdot\big(3x^4+2x-7\big)=6x^6-9x^5+4x^3-20x^2+21x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(f(x)\cdot g(x)\big)'=6\cdot\big(6x^5\big)-9\big(5x^4\big)+4\big(3x^2\big)-20\big(2x\big)+21=36x^5-45x^4+12x^2-40x+21\,.$$

Naturalmente, el resultado es el mismo.

b) La derivada de $f(x)=\big(3x\big)\cdot\cos x$ es:

$$f'(x)=\Big(\big(3x\big)\cdot\cos x\Big)'=\big(3x\big)'\cdot\cos x+\big(3x\big)\cdot\big(\cos x\big)'=3\cdot\cos x+\big(3x\big)\cdot\big(-\sin x\big)=3\cos x-3x\sin x\,.$$

4. Derivada de un cociente de funciones

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \big(F(x)\big)'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

Ejemplo:

Si $y=\frac{3x^2-2x}{4x-5} \Rightarrow y'=\frac{\big(3x^2-2x\big)'\cdot(4x-5)-\big(3x^2-2x\big)\cdot(4x-5)'}{(4x-5)^2} \Rightarrow$

$$y'=\frac{(6x-2)\cdot(4x-5)-\big(3x^2-2x\big)\cdot 4}{(4x-5)^2} \Rightarrow y'=\frac{\big(24x^2-8x-30x+10\big)-\big(12x^2-8x\big)}{(4x-5)^2} \Rightarrow$$

$y'=\frac{12x^2-30x+10}{(4x-5)^2}$. (El denominador no suele operarse: ya está simplificado).

5. Derivada de la opuesta de una función

$$F(x)=\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)} \rightarrow \big(F(x)\big)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}\,.$$

Es un caso particular de cociente:

$$\big(F(x)\big)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{(1)'\cdot f(x)-(1)\cdot f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}=\frac{0\cdot f(x)-f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}=\frac{-f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}\,.$$

Ejemplo:

Para la función $f(x)=4x^2-5x+1$ se tendrá:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{4x^2-5x+1}\right)'=\frac{-\big(4x^2-5x+1\big)'}{\big(4x^2-5x+1\big)^2}=\frac{-\big(8x-5\big)}{\big(4x^2-5x+1\big)^2}=\frac{-8x+5}{\big(4x^2-5x+1\big)^2}\,.$$

Evidentemente, esta función también se podría derivar como un cociente. Así:

$$F(x)=\frac{1}{4x^2-5x+1} \Rightarrow F'(x)=\frac{0\cdot\big(4x^2-5x+1\big)-1\cdot\big(8x-5\big)}{\big(4x^2-5x+1\big)^2}=\frac{-\big(8x-5\big)}{\big(4x^2-5x+1\big)^2}\,.$$

Derivada de la función compuesta (regla de la cadena)

Esta propiedad es fundamental, pues se utiliza cuando la función *f* no se aplica solo a *x* sino a otra función *g*(*x*).

$$F(x)=f(g(x)) \rightarrow \big(F(x)\big)'=\big(f(g(x)\big)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

→ Aplicada a las funciones estudiadas aquí se tendrá:

1. Para potencias y raíces

- Potencia de una función: la derivada de $y=\big(f(x)\big)^n$ es $y'=n\big(f(x)\big)^{n-1}\cdot f'(x)$, para todo *n*.
- Raíz de una función: la derivada de $y=\sqrt{f(x)}$ es $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Ejemplos:

a) Si $F(x)=\big(2x^4-5x^2+3\big)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'(x)=3\cdot\big(2x^4-5x^2+3\big)^{3-1}\cdot\big(2x^4-5x^2+3\big)'=3\cdot\big(2x^4-5x^2+3\big)^2\cdot\big(8x^3-10x\big).$$

b) Si $F(x)=\sqrt{5x^3-x^2+1} \Rightarrow F'(x)=\dfrac{\big(5x^3-x^2+1\big)'}{2\sqrt{5x^3-x^2+1}}=\dfrac{15x^2-2x}{2\sqrt{5x^3-x^2+1}}\,.$

c) Si $F(x)=\big(e^x\big)^3 \Rightarrow F'(x)=3\cdot\big(e^x\big)^{3-1}\cdot\big(e^x\big)'=3\cdot\big(e^x\big)^2\cdot e^x$. (Operando: $F'(x)=3\cdot\big(e^{2x}\big)\cdot e^x=3\cdot e^{3x}$).

d) Si $F(x)=\big(\log x\big)^2 \Rightarrow F'(x)=2\cdot\big(\log x\big)^{2-1}\cdot\big(\log x\big)'=2\cdot\big(\log x\big)\cdot\dfrac{1}{x}\log e\,.$

e) Si $F(x)=\big(\sin x\big)^4 \Rightarrow F'(x)=4\cdot\big(\sin x\big)^{4-1}\cdot\big(\sin x\big)'=4\cdot\big(\sin x\big)^3\cdot\big(\cos x\big).$

2. Para funciones exponenciales

- Exponencial de base a: $F(x)=a^{f(x)}$, $a>0 \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$.
- Exponencial de base e: $F(x)=e^{f(x)} \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$.

Ejemplos:

a) Si $y=10^{2x+5} \Rightarrow y'=(2x+5)'\cdot 10^{2x+5}\cdot\ln 10 \Rightarrow y'=2\cdot 10^{2x+5}\cdot\ln 10$.

b) Si $y=e^{3x} \Rightarrow y'=(3x)'\cdot e^{3x}=3\cdot e^{3x}$. c) $y=e^{x^2-x} \Rightarrow y'=\left(x^2-x\right)'\cdot e^{x^2-x}=(2x-1)\cdot e^{x^2-x}$.

3. Para funciones logarítmicas

- Logaritmo en base a: $F(x)=\log_a\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$.
- Logaritmo neperiano: $F(x)=\ln\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Ejemplos:

a) $y=\log(7x+2) \Rightarrow y'=\dfrac{7}{7x+2}\log e$. b) $y=\log\left(3x^2-5x\right) \Rightarrow y'=\dfrac{6x-5}{3x^2-5x}\log e$.

c) $y=\ln\left(5x^3\right) \Rightarrow y'=\dfrac{\left(5x^3\right)'}{5x^3}=\dfrac{15x^2}{5x^3}=\dfrac{3}{x}$. d) $y=\ln\left(3x^3-4x^2-5\right) \Rightarrow y'=\dfrac{9x^2-8x}{3x^3-4x^2-5}$.

4. Para funciones trigonométricas

- Función seno: $F(x)=\sin\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot\cos\left(f(x)\right)$.
- Función coseno: $F(x)=\cos\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x)=-f'(x)\cdot\sin\left(f(x)\right)$.

Ejemplos:

a) $f(x)=\sin\left(4x^2-x\right) \Rightarrow f'(x)=\left(4x^2-x\right)'\cdot\cos\left(4x^2-x\right)=(8x-1)\cdot\cos\left(4x^2-x\right)$.

b) $f(x)=\cos(2x) \Rightarrow f'(x)=-(2x)'\cdot\sin(2x)=-2\cdot\sin(2x)$ → No confundir con:

c) $f(x)=2\cos x \Rightarrow f'(x)=2(\cos x)'=2\cdot(-\sin x)=-2\sin x$.

- La función tangente se utiliza poco en Ciencias Sociales. No obstante, su derivada puede obtenerse teniendo en cuenta que $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; por tanto, derivando como un cociente:

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

Recuerda: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$; $\sin^2 x=(\sin x)^2$ y $\cos^2 x=(\cos x)^2$.

Para la función compuesta: $F(x)=\tan\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{\cos^2\left(f(x)\right)}=f'(x)\cdot\left(1+\tan^2\left(f(x)\right)\right)$.

Ejemplos:

a) $y=3\tan x \Rightarrow y'=3\left(1+\tan^2 x\right)=\dfrac{3}{\cos^2 x}$. b) $y=\tan(7x) \Rightarrow y'=7\cdot\left(1+\tan^2(7x)\right)$.

4. Aplicaciones de la derivada

La derivada de una función en un punto da la variación instantánea de esa función, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Esto permite estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función; lo que facilitará el trazado de su gráfica.

→ Hay que advertir que estas aplicaciones necesitan que las funciones sean derivables en los puntos de estudio. ¿Pero en qué puntos una función es derivable?; ¿en qué puntos no es derivable?

- Lo que se dijo para la continuidad sigue siendo válido para la derivabilidad, pues se cumple que:

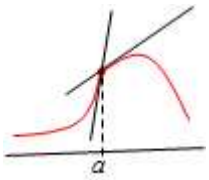
1) Las funciones usuales (polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) son (continuas) derivables en todos los puntos de su dominio.
2) Las funciones definidas a trozos serán (continuas) derivables si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de unión de los intervalos; para esto último es necesario que coincidan las derivadas laterales.
Luego, ¿continuidad y derivabilidad es lo mismo? No, como se aclara a continuación.

<u>Relación entre continuidad y derivabilidad</u>
Para que una función sea derivable en un punto $x = a$ son precisas dos condiciones:
1) Que la función sea continua en dicho punto.
2) Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.

<u>Las derivadas laterales</u> son:

Por la izquierda: $f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Por la derecha: $f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

La derivada, $f'(a)$, existe cuando $f'(a^-) = f'(a^+)$.



- Geométricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.

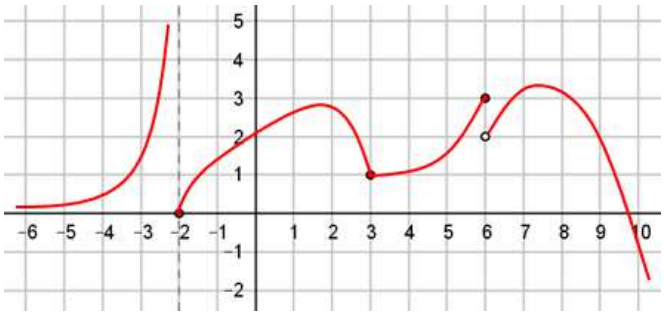
→ Las derivadas laterales no coinciden en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.
→ Esta condición es particularmente importante en las funciones definidas a trozos. Para esas funciones resulta obligado comprobar que las derivadas laterales en los puntos de unión de los distintos trozos valen lo mismo. (Se estudiará en 2º de bachillerato).

- Respecto a la continuidad y derivabilidad hay que saber: si una fusión es derivable, entonces es continua; pero que sea continua no es garantía de que sea derivable.

Esto es:

"Si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$"
"Si $f(x)$ es continua en $x = a \not\Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$"
"Si $f(x)$ no es continua en $x = a \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = a$"

Ejemplo:
La función representada a la derecha es derivable en todos sus puntos, menos en:
$x = -2$, por no ser continua;
$x = 3$, por tener un pico;
$x = 6$, por no ser continua.
→ La continuidad es una condición necesaria, pero no suficiente, de derivabilidad.
→ La derivabilidad indica que la función evoluciona suavemente.



Crecimiento y decrecimiento de una función

El signo de la derivada de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la determinación de sus máximos y mínimos relativos.

Crecimiento

- Si la derivada es positiva, la recta tangente es creciente y creciente será la función.

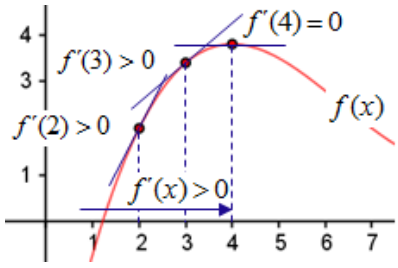
Recuerda que:

$f(x)$ es creciente en un punto $x = a$ si

$f(a-h) \le f(a) \le f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.

Se cumple:

Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $x = a$.



La función representada a la derecha es creciente en los puntos $x = 2$ y $x = 3$: las rectas tangentes tienen pendiente positiva.
Es creciente para los puntos $x < 4$.
En $x = 4$ la derivada es 0, $f'(4) = 0$: en ese punto la función tiene un máximo.

Decrecimiento

- Si la derivada es negativa, la recta tangente es decreciente y decreciente será la función.

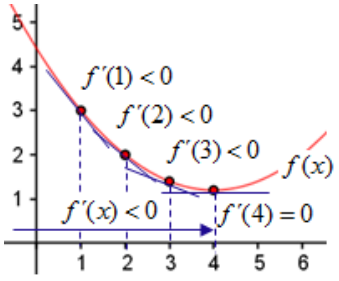
Recuerda que:

$f(x)$ es decreciente en un punto $x = a$ si

$f(a-h) \ge f(a) \ge f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.

Se cumple:

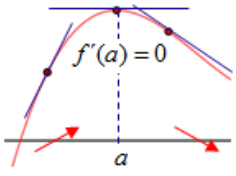
Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $x = a$.



La función representada a la derecha es decreciente en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$: las rectas tangentes tienen pendiente negativa.
Es decreciente para los puntos $x < 4$.
En $x = 4$ la derivada es 0, $f'(4) = 0$: en ese punto la función tiene un mínimo.

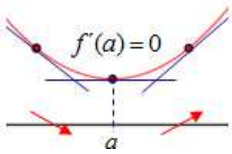
Máximos y mínimos

Para que en el punto $x = a$ se dé un máximo o un mínimo es necesario que $f'(a) = 0$. En ambos casos la recta tangente a la curva es horizontal: su pendiente vale 0



- El punto a es un máximo relativo cuando la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha. Por tanto:

En $x = a$ hay un máximo si: $f'(a^-) > 0$, $f'(a) = 0$, $f'(a^+) < 0$.



- El punto a es un mínimo relativo cuando la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha. Por tanto:

En $x = a$ hay un mínimo si: $f'(a^-) < 0$, $f'(a) = 0$, $f'(a^+) > 0$.

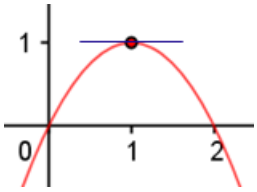
Ejemplo:

Si $f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 1$.

Si $x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$.

Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

Por tanto, en el punto $x = 1$ la función tendrá un máximo.



Representación gráfica de una función con ayuda de la derivada primera

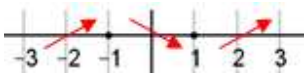
Dada la función $y = f(x)$, para dibujarla es útil el siguiente proceso:

1) Determinar su dominio: excluir los puntos en los que $f(x)$ no esté definida
2) Hallar la derivada $f'(x)$.
3) Calcular las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ (puntos singulares).
4) Marcar sobre el eje *OX* los puntos singulares y aquellos en los que la función no esté definida. Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos.
5) Estudiar el signo de la derivada en cada intervalo anterior: deducir si la función es creciente o decreciente. (Basta con probar un punto de cada intervalo y ver si $f'(x)$ es positiva o negativa).
6) Deducir (de lo anterior) dónde se dan los máximos y los mínimos, si es el caso.
7) Trazar la gráfica ajustándose a la información obtenida y dando algunos de sus puntos, entre ellos los correspondientes a los puntos singulares y a los cortes con los ejes de coordenadas.

Ejemplos:

a) Proceso para trazar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$.

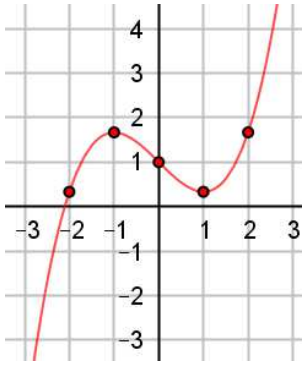
1) Está definida siempre: Dom (*f*) = **R**.



2) y 3) se deriva e iguala a 0: $f'(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1;\ x = 1$.

4), 5) y 6) Se marcan los puntos $x = -1$ y $x = 1$ en la recta, y se observa que:

- Si $x < -1$, (por ejemplo, $x = -2$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-1 < x < 1$, (por ejemplo, $x = 0$), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.



Por consiguiente, en $x = -1$ hay máximo.

- Si $x > 1$, (por ejemplo, $x = 3$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente; además, en $x = 1$ hay mínimo.

7) Dando algunos valores se obtiene la gráfica adjunta.
Puntos: (−2, 1/3); (−1, 5/3), máx; (0, 1); (1, 1/3), mín; (2, 5/3).

b) Esbozo de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, determinando su dominio y asíntotas, y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

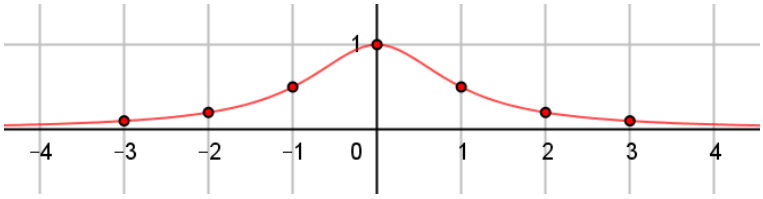
→ La función está definida en todo **R**. Tiene una asíntota horizontal, pues $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$.

La asíntota es la recta $y = 0$, el eje *OX*; la curva va por encima del eje (siempre es positiva).

→ Para determinar el crecimiento y decrecimiento hay que estudiar el signo de su derivada.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \text{ en } x = 0.$$

Luego:

- Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 2$), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente; además, en $x = 0$ hay máximo.

→ Algunos puntos: (−3, 0,1); (−2, 0,2); (−1, 0,5); (0, 1), máx; (1, 0,5); (2, 0,2); (3, 0,1).