

1. ÁLXEBRA DE SUCESOS

Exames e Textos de Matemática de Pepe Sacau ten unha licenza

[Creative Commons Atribución](#)[Compartir igual 4.0 Internacional](#)

1.1. INTRODUCCIÓN AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

A estatística é unha disciplina que trata de obter información a partir de fenómenos que a priori parecen non responder a regras deterministas. Así, é impredicíbel o resultado que obteremos ao lanzar ao ar unha moeda, mas si que se pode predicir a dilatación que experimentará unha barra metálica ao subir a temperatura. Este segundo fenómeno é de tipo determinista, en tanto que aqueles outros que non se poden predicir chaman-se fenómenos aleatórios.

Dunha forma mais precisa, chamaremos fenómeno determinista a aquel que proporciona o mesmo resultado sempre que se repita nas mesmas condicións, e fenómeno aleatorio será aquel de imposible predición, apesar de que se realice repetidas veces en condicións análogas.

Dentro desta disciplina, o Cálculo de Probabilidades ocupa-se de deseñar modelos teóricos que podan servir para predicir o comportamento de diversos fenómenos de carácter aleatorio. Isto fai-se estudando o comportamento real de distintos tipos de fenómenos aleatorios para extraer as características que lles son esenciais, e a partir delas elaborar os modelos mediante un proceso de abstracción.

1.2. TEORIA DE CONXUNTOS E LEIS DE DE MORGAN

Todo o cálculo de probabilidades fundamenta-se na teoría de conxuntos, polo que antes de proceder ás primeiras definicións é necesario establecer algúns resultados propios da álgebra de conxuntos^[1]. Sexan A e B dous conxuntos:

- i. igualdade de conxuntos: $A=B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$
- ii. intersección e unión: $A \cap B \subset A$ e $A \subset A \cup B$
- iii. diferenza de conxuntos: $A-B = A \cap \bar{B}$
- iv. inclusión de contrários: $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
- v. propiedade asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- vi. Leis de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ e $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

[1] Estes resultados son compartidos pola álgebra de sucesos (que se presenta a continuación) e pola lóxica proposicional, e as Leis de De Morgan tamén pola álgebra de Boole.

1.3. EXPERIMENTO ALEATORIO E ÁLXEBRA DE SUCESOS

Chama-se experimento aleatorio (EA) a todo experimento que responda ás características seguintes:

- 1ª pode repetir-se tantas veces como sexa necesario;
- 2ª é imposible coñecer de antemán o seu resultado.

Dado un experimento aleatorio, chámase espazo mostral ao conxunto E formado por todos os resultados posibles do experimento; cada un dos elementos deste conxunto chama-se punto mostral.

Chama-se suceso aleatorio a calquer subconxunto do espazo mostral: $A \subset E$.

O conxunto formado por todos os sucesos aleatorios chama-se espazo ou álgebra de sucesos: $\Omega = \mathcal{P}(E)$.

Diremos que “se realiza” un suceso cando o resultado do experimento é un dos elementos que pertencen ao mesmo.

Tipos de sucesos

- suceso elemental é o que contén un só elemento do espazo mostral;
- suceso composto é o que contén dous ou mais elementos de espazo mostral;
- suceso seguro é o que contén todos os elementos do espazo mostral, e polo tanto, é un suceso que se realiza sempre;
- suceso nulo ou imposible é o que non contén elemento algún do espazo mostral, e polo tanto, non se realiza nunca.

Álgebra de sucesos

- Sucesos contrarios: di-se que dous sucesos son contrarios ou complementares se a realización dun deles equivale á non realización do outro: se A é un suceso, o seu contrario identifica-se por $\bar{A}$, e verifican que $A \cup \bar{A} = E$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- Inclusión de sucesos: dados dous sucesos A e B , di-se que A está incluído en B , e representa-se $A \subset B$, se todos os elementos de A están en B . Isto significa que sempre que se realice A tamén se realizará B , ou tamén que A implica B .
- Igualdade de sucesos: dados dous sucesos A e B , di-se que son iguais, e expresa-se $A = B$, se $A \subset B$ e $B \subset A$.
- Unión de sucesos: $A \cup B$ é o suceso que contén todos os elementos contidos en A ou en B . O suceso $A \cup B$ realiza-se sempre e cando se realice algún dos dous sucesos A ou B .
- Intersección de sucesos: $A \cap B$ é o suceso que contén todos os elementos contidos simultaneamente en A e en B . O suceso $A \cap B$ realiza-se sempre e cando se realicen simultaneamente os dous sucesos A e B .
- Diferenza de sucesos: $A - B$ é o suceso que contén todos os elementos de A que non están en B . Este suceso realiza-se sempre que se realiza A mas non B .
- Incompatibilidade de sucesos: dous sucesos A e B son incompatíbeis se $A \cap B = \emptyset$, que equivale a dicir que non se poden realizar A e B simultaneamente.

Chama-se experimento aleatorio composto ao experimento aleatorio que está formado por dous ou mais experimentos aleatorios simples.

Ex 1 Sexa o EA "lanzar un dado ao ar".

O espazo mostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cada un dos elementos do conxunto E é un punto mostral.

Calquer subconxunto do conxunto E é un suceso.

Suceso elemental: $S = \{4\}$, descrito da forma "obter un 4".

Suceso composto: $A = \{1, 3, 5\}$, descrito "obter un número impar".

O suceso "obter un número menor que 12" realiza-se con toda seguridade, polo que se chama suceso seguro e coincide co propio espazo mostral E .

O suceso "obter un número maior que 12" nunca se realiza, polo que se chama suceso imposible e corresponde-se con $\emptyset$.

Dado o suceso $B = \{1, 2, 3\}$, que se pode describer como "obter un número menor que 4", o seu complementar será $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$, que pode ser descrito por "obter mais de 3". É evidente que sempre que se faga o experimento realizará-se un e só un dos dous sucesos: $B \cup \bar{B} = E$ e $B \cap \bar{B} = \emptyset$. Logo, como consecuencia de seren complementares, son ademais incompatíbeis.

O suceso C "obter un 3" está incluído no suceso D "obter un número impar", xa que $C \subset D$. É evidente que sempre que se realice C tamén se realiza D , ou de xeito equivalente, C implica D .

Os sucesos "obter un 6" e "obter un número maior que 5" son iguais.

O suceso "obter un número impar menor que 4" é a unión dos sucesos "obter un 1" e "obter un 3", e de igual xeito o suceso "obter un 5" é a intersección dos sucesos "obter un número impar" e "obter un número maior que 3".

O suceso "obter un 2 ou un 4" é a diferenza dos sucesos "obter menos de 5" e "obter impar".

Os sucesos "obter impar" e "obter mais de 5" son incompatíbeis.

Ex 2 O experimento “lanzar un dado mais unha moeda” é un experimento composto de dous EA simples: “lanzar un dado” e “lanzar unha moeda”.

O espazo mostral será $E = \{1C, 1+, 2C, 2+, 3C, 3+, 4C, 4+, 5C, 5+, 6C, 6+\}$.

O suceso A “obter no dado un número maior que 4” estará formado por todos os elementos de E que cumpran a condición, é dicir: $A = \{5C, 5+, 6C, 6+\}$.

2. PROBABILIDADE: CONCEITOS E DEFINICIÓNS

2.1. INTRODUCCIÓN Á PROBABILIDADE

O concepto de probabilidade procede da necesidade de medir o grao de confianza que podemos depositar en que certo suceso aconteza.

Inicialmente é un concepto empírico, é dicir, derivado da observación, con todas as limitacións que isto implica. Unha vez estudadas as propiedades que son esenciais a este concepto, define-se o concepto axiomático de probabilidade, que dará lugar ao modelo teórico no que se fundamenta esta nova disciplina.

Sexa E o espazo mostral dun experimento aleatorio, sexa A un suceso calquer $A \subset E$ e sexa N o número de veces que se fai o experimento en condicións análogas; chama-se frecuencia absoluta do suceso A , e representa-se por $f(A)$, ao número de veces que se realiza o suceso A . Chama-se frecuencia relativa do suceso A , e representa-se por $h(A)$, ao cociente entre a frecuencia absoluta e o número de veces que se fai o experimento: $h(A) = \frac{f(A)}{N}$.

Ex 3 No experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, o espazo mostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ao facermos o experimento 10 veces obtemos tres veces o “4”, dúas o “6”, dúas o “5”, dúas o “2” e unha vez o “1”.

O suceso A “obter par” é $A = \{2, 4, 6\}$; a súa frecuencia absoluta é $f(A) = 7$, e a súa frecuencia relativa é $h(A) = \frac{7}{10} = 0,7$.

Propiedades

- 1ª A frecuencia relativa está comprendida entre 0 e 1: $\forall A \subset E \quad 0 \leq h(A) \leq 1$.
- 2ª O suceso seguro ten frecuencia relativa 1 e o suceso nulo ten frecuencia relativa 0: $h(E) = 1$ e $h(\emptyset) = 0$.
- 3ª Se $A \subset B$, entón $h(A) \leq h(B)$.
- 4ª Se A e B son dous sucesos incompatíbeis, ou sexa, $A \cap B = \emptyset$, entón $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$.

No século XVIII, Jacob Bernouilli formulou a súa Lei dos Grandes Números, que afirma que dado un suceso, a súa frecuencia relativa tende a estabilizar-se arredor de certo valor, a medida que crece o número de veces que se fai o experimento.

Esta lei permite facer unha estimación da probabilidade que ten de realizarse certo suceso. Atendendo a esta idea, a probabilidade dun suceso A , $p(A)$, obteríase calculando o límite da frecuencia relativa cando $N \rightarrow +\infty$, ou sexa: $p(A) = \lim_{N \rightarrow +\infty} h(A)$.

Esta definición formal recibiu, entre outras, as seguintes críticas:

- a definición resulta inadecuada na práctica, xá que ao facer fai referencia a magnitudes empíricas, como é a frecuencia relativa, a única maneira de calcular realmente a probabilidade consistiría en facer o experimento un número grande de veces, método custoso e exposto á influencia de factores externos ao propio experimento, e que poderían afectar ás frecuencias obtidas e, polo tanto, á probabilidade final do suceso;

- ao estar definida como un límite, non asegura a existencia dese límite nen a “velocidade” de converxencia, no caso de que exista.

Estes e outros motivos fixeron necesario seguir profundizando nas propiedades da probabilidade, que levaron finalmente á súa definición axiomática, concepto que recolle as propiedades esenciais das frecuencias relativas para, a partir delas, estudar o comportamento dos fenómenos aleatorios.

Definición axiomática de probabilidade (Axiomática de Kolmogorov)

Sexa E o espazo mostral dun experimento aleatorio e sexa $A \subset E$ un suceso calquer; chama-se probabilidade a toda aplicación $p: \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que:

$$1^a \quad \forall A \in \Omega \quad p(A) \geq 0$$

$$2^a \quad p(E) = 1$$

$$3^a \quad \text{se } A \text{ e } B \text{ son dous sucesos incompatíbeis, ou sexa, } A \cap B = \emptyset, \text{ entón } p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Derivado desta definición, pode-se demostrar facilmente que unha aplicación nestas condicións verifica ademais as seguintes propiedades:

$$1^a \quad \text{Se } \bar{A} \text{ é o suceso contrario de } A, \text{ entón } p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$2^a \quad p(\emptyset) = 0$$

$$3^a \quad \text{Se } A \subset B, \text{ entón } p(A) \leq p(B)$$

$$4^a \quad \forall A \in \Omega \quad p(A) \leq 1$$

5^a Regra de Laplace: nun espazo equiprobábel, é dicir, un espazo mostral E no que todos os sucesos elementares teñen a mesma probabilidade, a probabilidade de calquer suceso A obtén-se dividindo o número de elementos de A entre o número de elementos de E : $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } E}$. Esta fórmula enuncia-se habitualmente como “número de casos favorábeis a A ($\text{card } A$) entre número de casos posíbeis ($\text{card } E$)”.

6^a Probabilidade da unión de sucesos: se $A_1, A_2, \dots, A_n$ son sucesos incompatíbeis, entón $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$; se A e B son dous sucesos compatíbeis, ou sexa, $A \cap B \neq \emptyset$, entón $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Ex 4 No experimento aleatorio consistente en “lanzar dúas moedas” o espazo mostral é $E = \{CC, C+, +C, ++\}$. Se supoñemos que a probabilidade de obter cara ou cruz en calquer das dúas moedas é a mesma, estaríamos ante un espazo equiprobábel no que podemos aplicar a Regra de Laplace.

Así o suceso A “obter polo menos unha cara” é $A = \{CC, C+, +C\}$, logo $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } E} = \frac{3}{4}$.

2.2. PROBABILIDADE CONDICIONADA

Normalmente a información da que dispoñamos acerca da realización de certo suceso resulta de utilidade á hora de coñecer a probabilidade de que se realicen outros; isto dá lugar á definición de probabilidade condicionada. Así, se A é un suceso posíbel, é dicir, $p(A) > 0$, define-se a probabilidade do suceso B condicionada por A , e representa-se por $p(B/A)$, como o cociente $p(B/A) := \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Nota: A probabilidade de B condicionada por A , $p(B/A)$, tamén se representa con frecuencia da forma $p_A(B)$, reforzando a idea de que p_A é á súa vez unha probabilidade, é dicir, p_A cumpre as condicións da definición de probabilidade.

Ex 5 Unha urna contén nove bólas vermellas e cinco pretas; o experimento consiste en extraer sucesivamente e sen reemprazo dúas bólas e trata-se de calcular a probabilidade de que as dúas bólas resulten ser da mesma cor.

Podemos descompór o experimento en dous: “extracción da primeira bóla” e “extracción da segunda bóla”. Ambos experimentos son distintos porque no segundo experimento a urna contén unha bóla menos que no primeiro, e resulta evidente que o resultado do primeiro experimento afecta ás probabilidades do segundo.

Así, chamando A ao suceso “as dúas bólas son da mesma cor”, tal suceso pode expresarse por comprensión como “obter a primeira bóla vermella e a segunda vermella ou obter a primeira bóla preta e a segunda preta”.

Sexan B_1 “obter unha bóla vermella na 1ª extracción”, B_2 “obter unha bóla vermella na 2ª extracción”, C_1 “obter unha bóla preta na 1ª extracción”, C_2 “obter unha bóla preta na 2ª extracción”; así o noso suceso pode expresarse como $A = (B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)$.

Podemos calcular as probabilidades de B_1 e C_1 , que son $p(B_1) = \frac{9}{14}$ e $p(C_1) = \frac{5}{14}$, mas non podemos calcular as de B_2 e C_2 , porque o número de bólas de cada cor varia segundo acontecese B_1 ou C_1 .

Aplicando a definición de probabilidade condicionada aos sucesos B_1 e B_2 temos que:

$p(B_2/B_1) := \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_1)} \Leftrightarrow p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2/B_1)$, onde $p(B_2/B_1) = \frac{8}{13}$, xá que fican 8 bólas vermellas de 13 que hai na urna.

De igual xeito, para C_1 e C_2 : $p(C_2/C_1) := \frac{p(C_1 \cap C_2)}{p(C_1)} \Leftrightarrow p(C_1 \cap C_2) = p(C_1) \cdot p(C_2/C_1)$, onde $p(C_2/C_1) = \frac{4}{13}$.

Como ademais os sucesos $B_1 \cap B_2$ e $C_1 \cap C_2$ son incompatíbeis (é evidente que non se poden realizar simultaneamente), resulta:

$$p(A) = p((B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)) = p(B_1 \cap B_2) + p(C_1 \cap C_2) = p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) + p(C_1) \cdot p(C_2/C_1) = \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} + \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{92}{182} = \frac{46}{91}$$

Independencia de sucesos

Sexan dous sucesos posíbeis A e B , é dicir $p(A) > 0$ e $p(B) > 0$; di-se que A e B son independentes: $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

En caso contrario diremos que A e B son dependentes.

Supoñendo que A e B son dous sucesos independentes, pola definición temos $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ [1], e da definición de probabilidade condicionada temos ademais que $p(B/A) := \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$ [2].

Das igualdades [1] e [2] resulta $p(A) \cdot p(B) = p(A) \cdot p(B/A)$, e por ser $p(A) > 0$, obtemos que $p(B) = p(B/A)$; de igual xeito podemos demostrar que $p(A) = p(A/B)$, polo que finalmente temos a seguinte equivalencia: A e B son independentes $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Leftrightarrow p(A) = p(A/B) \Leftrightarrow p(B) = p(B/A)$.

En termos de probabilidade isto quere dicir que a realización dun dos dous sucesos non altera as probabilidades de que se realice o outro, polo que o concepto de independencia fica xustificado.

Como consecuencia das definicións anteriores, a probabilidade da intersección de sucesos obtén-se do seguinte xeito:

- i. sucesos independentes: A e B son independentes $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
- ii. sucesos dependentes: A e B son dependentes
 $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B)$

Ex 6 Calcular a probabilidade de que ao extraermos unha carta da baralla resulte ser unha sota. Calcular a probabilidade de que sexa unha sota sabendo que a carta extraída resultou ser de espadas.

Sexa E o espazo mostral formado polas 40 cartas da baralla, e sexan os sucesos A "a carta extraída é unha sota" e B "a carta extraída é de espadas".

No primeiro caso utilizando a Regra de Laplace calcularemos $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } E} = \frac{4}{40} = 0,1$.

No segundo caso, sabendo que a carta resultou ser unha espada, o espazo mostral reduce-se a 10 cartas das que só

unha é unha sota, logo temos $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{10}{40}} = \frac{1}{10} = 0,1$.

Como resultou que ambas probabilidade son iguais, os sucesos son independentes:

$p(A/B) = p(A) \Rightarrow$ o facto de que a carta sexa unha de espadas non modifica a probabilidade de que sexa unha sota.

Ex 7 Calcular a probabilidade de que ao extraermos unha carta da baralla resulte ser unha sota sabendo que é unha figura.

Sexan A "a carta extraída é unha sota" e C "a carta extraída é unha figura".

Sabemos que $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } E} = \frac{4}{40} = 0,1$.

Se a carta resultou ser unha figura temos $p(A/C) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{4}{40}}{\frac{12}{40}} = \frac{1}{3}$.

Neste caso $p(A/C) \neq p(A) \Rightarrow$ os sucesos A e C son dependentes ou, doutro xeito, o facto de que se realice C fai que mude a probabilidade de A .

2.3. LEI DAS PROBABILIDADES TOTAIS E TEOREMA DE BAYES

O concepto de probabilidade condicionada permite obter información sobre a probabilidade de sucesos ligados entre si por certas relacións de causalidade.

Este é o caso da Lei das Probabilidades Totais, que permite calcular a probabilidade de certo suceso a partir da casuística que pode dar lugar a tal suceso, no que se denomina "probabilidade a priori":

Lei das Probabilidades Totais

Supoñamos un conxunto de sucesos $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, incompatíbeis entre si, é dicir, $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall \quad i \neq j$, e que recubran todo o espazo mostral E , é dicir, $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = E$; nestas condicións, a probabilidade de calquer suceso A pode obter-se como:

$$p(A) = p(B_1) \cdot p(A/B_1) + p(B_2) \cdot p(A/B_2) + \dots + p(B_n) \cdot p(A/B_n).$$

Demostración

Ao ser $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = E$, o suceso A pode expresar-se da forma: $A = A \cap E = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$, e como os sucesos da forma $A \cap B_i$ son todos eles incompatíbeis entre si, temos que $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n)$ [1].

Finalmente, pola definición de probabilidade condicionada, temos que $p(A \cap B_i) = p(B_i) \cdot p(A/B_i)$, e substituíndo na fórmula [1], resulta:

$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n) = p(B_1) \cdot p(A/B_1) + p(B_2) \cdot p(A/B_2) + \dots + p(B_n) \cdot p(A/B_n)$ co que obtemos a fórmula que estábamos a procurar.

A interpretación desta fórmula é sinxela: a probabilidade dun suceso é igual á suma das súas probabilidades condicionadas pola casuística que se poda producir a priori.

Ex 8 Três urnas conteñen triplo número de bólas brancas que pretas a primeira, duplo número de brancas que de pretas a segunda e igual número de cada cor a terceira. O experimento consiste en extraer unha bóla da primeira urna de xeito que, se sai branca, extrae-se unha bóla da segunda, e se sai preta, extrae-se unha bóla da terceira urna. Calcular a probabilidade de que a segunda bóla extraída sexa preta.

Se chamamos B ao suceso “a primeira bóla extraída é preta”, e A ao suceso “a segunda bóla extraída é preta” temos o seguinte: $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A/B) \cdot p(B) + p(A/\bar{B}) \cdot p(\bar{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

A interpretación desta fórmula consiste en que para obter finalmente unha bóla preta, ou ben obtemos unha primeira bóla branca e da urna segunda obtemos unha preta, ou ben obtemos unha primeira bóla preta e da terceira urna, polo tanto, outra preta. Estes dous camiños son incompatíbeis, polo que suman as súas probabilidades.

Cada un destes dous camiños posíbeis é o produto da probabilidade de obter cada unha das dúas posibilidades para a primeira bóla, pola probabilidade condicionada.

De igual xeito é posíbel calcular as probabilidades dun suceso analisando as consecuencias derivadas do mesmo, no que se chama “probabilidade a posteriori”, e que vén dada polo Teorema de Bayes:

Teorema de Bayes

Supoñamos un conxunto de sucesos $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ incompatíbeis entre si, é dicir, $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall \quad i \neq j$, e que recubran todo o espazo mostral E , é dicir, $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = E$, e supoñamos un suceso A ; nestas condicións, a probabilidade de calquer dos B_i condicionada por A pode obter-se como:

$$p(B_i/A) = \frac{p(B_i) \cdot p(A/B_i)}{p(B_1) \cdot p(A/B_1) + p(B_2) \cdot p(A/B_2) + \dots + p(B_n) \cdot p(A/B_n)}.$$

Demostración

Pola definición de probabilidade condicionada temos que $p(A/B_i) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(B_i)}$ [1] mas

tamén $p(B_i/A) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(A)}$ [2].

Da expresión [1] obtemos que $p(A \cap B_i) = p(B_i) \cdot p(A/B_i)$, e pola Lei das Probabilidades Totais temos que $p(A) = p(B_1) \cdot p(A/B_1) + p(B_2) \cdot p(A/B_2) + \dots + p(B_n) \cdot p(A/B_n)$, logo substituindo estas dúas expresións respectivamente no numerador e denominador de [2], resulta:

$$p(B_i/A) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(A)} = \frac{p(B_i) \cdot p(A/B_i)}{p(B_1) \cdot p(A/B_1) + p(B_2) \cdot p(A/B_2) + \dots + p(B_n) \cdot p(A/B_n)}, \quad \text{que é a expresión buscada.}$$

A interpretación desta nova fórmula consiste en que, á vista do resultado obtido nun experimento, é posíbel estudar as probabilidades de que este resultado se producise nunhas condicións iniciais e non noutras.

Ex 9 Unha estudante vai á facultade no coche de dúas compañeiras distintas, dous días á semana coa primeira e tres días á semana coa segunda. A primeira compañeira retrasa-se nun 35 % das ocasións e a segunda fai-no un 50 %. Se un día chegan tarde a clase, calcular a probabilidade de que fose por causa da primeira das condutoras.

Chamemos A ao suceso “chegar tarde a clase” e chamemos B_1 e B_2 aos sucesos “ir coa primeira compañeira” e “ir coa segunda compañeira” respectivamente.

A probabilidade que nos piden é $p(B_1/A)$, que podemos calcular utilizando a fórmula de Bayes, xá que B_1 e B_2 son sucesos incompatíbeis e que recubren o espazo mostral: $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e $B_1 \cup B_2 = E$.

Ademais coñecemos as probabilidades $p(B_1) = \frac{2}{5} = 0,4$ e $p(B_2) = \frac{3}{5} = 0,6$, e as probabilidades condicionadas $p(A/B_1) = 0,35$ e $p(A/B_2) = 0,5$.

$$\text{Logo } p(B_1/A) = \frac{p(B_1) \cdot p(A/B_1)}{p(B_1) \cdot p(A/B_1) + p(B_2) \cdot p(A/B_2)} = \frac{0,4 \cdot 0,35}{0,4 \cdot 0,35 + 0,6 \cdot 0,5} = \frac{0,14}{0,44} \approx 0,32.$$

2.4. COMBINATORIA E OUTRAS TÉCNICAS DE RECONTO

No estudo da probabilidade é necesario proceder á análise de distintos modelos de experimentos aleatorios e en consecuencia, para a aplicación da Regra de Laplace, é preciso contar o número de casos posibles e casos favorables, é dicir, o número de elementos que contén o espazo mostral E e o número de elementos que conteñen determinados sucesos (subconxuntos do espazo mostral).

Estes recontos son simples no caso de experimentos aleatorios sinxelos como, por exemplo, lanzar unha moeda, mas poden resultar mais tediosos se o experimento é complexo, particularmente se é un experimento composto como, por exemplo, extraer dúas bólas consecutivamente e sen reempazo dunha urna que contén 20 bólas brancas e 21 bólas verdes.

A combinatoria é unha disciplina que permite identificar diferentes casos e fornece técnicas e fórmulas para facer estes recontos de maneira áxil.

Supoñamos un conxunto Z formado por m elementos. Cos elementos de Z temos que formar novos conxuntos de n elementos, atendendo a certos criterios que, simplificando un pouco, poden ser resumidos en dous:

- i. repetición: para formar os nosos conxuntos podemos seleccionar un mesmo elemento de Z mais de unha vez (di-se “con repetición”) ou, pola contra, un mesmo elemento de Z pode ser seleccionado unha soa vez (“sen repetición”);
- ii. orde: para formar os nosos conxuntos é relevante a orde en que seleccionemos os elementos de Z (chaman-se arranxos ou variacións) ou ben esta orde resulta indiferente, sempre que os elementos escollidos sexan os mesmos (neste caso chaman-se combinacións).

Ex 10 Nunha urna con 10 bólas numeradas do 0 ao 9, escollemos 4 bólas de xeito consecutivo, reempazando cada unha das bólas despois de cada extracción.

O noso conxunto Z está formado polas 10 bólas numeradas $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Como reempazamos cada bóla despois da extracción, podemos obter como resultado o conxunto $(8, 3, 4, 3)$, é dicir, a bóla 3 pode ser extraída (seleccionada) mais dunha vez.

No caso de que non se reempaze cada bóla inmediatamente antes de extraer a seguinte, poderíamos obter como resultado o conxunto $(8, 3, 4, 1)$, mas non $(8, 3, 4, 3)$.

No primeiro caso dicimos que “hai repetición”.

Ex 11 Nunha urna con 10 bólas numeradas do 0 ao 9, escollemos 4 bólas de xeito consecutivo sen reempazá-las despois de cada extracción.

O noso conxunto Z está formado polas 10 bólas numeradas $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ao non haber reempazo, un posíbel resultado da extracción é $(8, 3, 4, 1)$, no que a posición de cada número indica a orde de extracción da bóla correspondente; así, a primeira bóla extraída foi o 8, a segunda o 3, a terceira o 4 e por último o 1. É evidente que o resultado $(3, 1, 4, 8)$ é distinto de $(8, 3, 4, 1)$.

No caso de que as catro bólas sexan extraídas de xeito simultáneo, os resultados $(3, 1, 4, 8)$ e $(8, 3, 4, 1)$ serían para nós indistinguíbeis. Neste caso diremos que non hai orde.

Á vista dos criterios de “repetición” e “orde”, hai catro modelos principais de reconto, coas súas correspondentes fórmulas e aplicacións.

Variacións con repetición

Nun conxunto Z con m elementos distintos, tomamos conxuntos ordenados de n elementos con repetición, é dicir, un mesmo elemento de Z pode ser seleccionado máis dunha vez: cada escolla chámase “*arranxo ou variación de m elementos tomados de n en n* ”, e o número total de arranxos que se poden obter no conxunto Z inicial é: $VR_{m,n} = m^n$.

Ex 12 Calcular o número de quinielas (15 prognósticos) distintas que se poden cubrir.

Unha quiniela é un conxunto ordenado de 15 elementos tomados do conxunto $Z = \{1, X, 2\}$, no que ademais pode dar-se a repetición, xá que calquer dos tres signos pode aparecer en varios prognósticos. Así, estamos ante arranxos con repetición de 3 elementos tomados de 15 en 15, e o número total de quinielas distintas será $VR_{3,15} = 3^{15}$.

Arranxos sen repetición ou arranxos ordinarios

Nun conxunto Z con m elementos distintos tomamos conxuntos ordenados de n elementos sen repetición (un mesmo elemento de Z non pode ser seleccionado máis dunha vez polo que, neste caso, resulta evidente que $n \leq m$): cada escolla chámase “*arranxo ordinario de m elementos tomados de n en n* ”, e o número total de arranxos que se poden obter do conxunto Z inicial é: $V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$.

Ex 13 Nunha carreira de 100 m lisos femininos na que participan 8 corredoras, calcular o número de formas distintas en que pode estar ocupado o pódio.

Cada forma de ocupar o pódio é un conxunto ordenado de 3 corredoras seleccionado entre o conxunto das 8 que participan na carreira. Estamos polo tanto ante arranxos ordinarios de 8 elementos tomados de 3 en 3, así que o número total de posibilidades é $V_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Permutacións

Nun conxunto Z con m elementos distintos tomamos conxuntos ordenados de m elementos sen repetición; en outras palabras, ordenamos os m elementos de Z .

Cada escolla chama-se “*permutación ordinaria de m elementos*” e é un caso particular dos arranxos ordinarios, con $n = m$.

O número total de permutacións que se poden formar no conxunto Z é: $P_m = m!$.

Evidentemente coincide con $V_{m,m} = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = \frac{m!}{1} = m!$

Ex 14 Se na carreira anterior queremos saber de cantas formas diferentes pode ficar a clasificación final das 8 corredoras, estamos ante un conxunto ordenado formado polas 8 corredoras, é dicir, ante unha permutación de 8 elementos. O número total de permutacións é $P_8 = 8! = 40.320$ (que coincide co número de variacións ordinarias de 8 elementos tomados de 8 en 8).

Combinacións

Nun conxunto Z con m elementos distintos tomamos subconxuntos de n elementos, con $n \leq m$. Nestes subconxuntos a orde é irrelevante e non existe repetición.

Cada escolla chama-se “*combinación ordinaria de m elementos tomados de n en n* ”, e o número total de combinacións que se poden formar no conxunto Z é:

$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$, que coincide co cociente entre $V_{m,n}$ e P_n , xá que

$$\frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = C_{m,n}.$$

Ex 15 Se a carreira anterior cualifica ás 3 primeiras corredoras para a fase galega, cantas cualificacións diferentes poden producir-se?

Cada cualificación para a fase galega é un conxunto de 3 corredoras seleccionado entre as 8 participantes, sen importar a orde en que chegasen estas tres primeiras. En outras palabras, cada cualificación é un subconxunto de 3 elementos tomado entre as 8 corredoras, é dicir, unha combinación de 8 elementos tomados de 3 en 3, e o número total de posibilidades é $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$.

Ex 16 Calcular o número de subconxuntos de 5 elementos que se poden formar dentro dun conxunto de 11 elementos.

O cálculo do número de subconxuntos dun conxunto é precisamente a esencia das combinacións e dá lugar á definición dos números combinatórios, que son os números da forma $\binom{m}{n}$; neste caso temos

$$C_{11,5} = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5! \cdot (11-5)!} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462.$$

Existen outros métodos de recuento tamén de utilidade e uso frecuente, como son as tabelas de dupla entrada e os diagramas de árbore.

Ex 17 Calcular a probabilidade de que ao lanzar dous dados ao ar, o segundo dea como resultado un número maior que o primeiro.

Se colocamos nunha tabela de dupla entrada os posibles resultados do primeiro dado (primeira columna) e os do segundo (primeira fila), é sinxelo contabilizar os casos posibles e os favorábeis.

dado 1 \ dado 2	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

O número de casos posibles é 36 e, deles, os que son favorábeis ao suceso son 15, logo a probabilidade pedida é $p = \frac{15}{36}$.

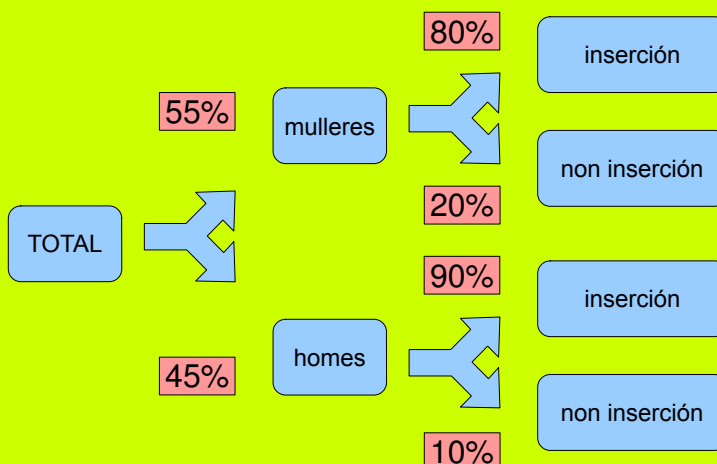
Ex 18 Do total de persoas que se gradúan nunha facultade, o 55 % son mulleres. O índice de inserción laboral é do 80 % entre as mulleres e do 90 % entre os homes. Calcular a probabilidade de que unha persoa escollida ao azar logre entrar no mercado laboral. Calcular probabilidade de que unha persoa escollida ao azar sexa muller sabendo que está no paro.

A partir dos datos do problema é doado completar o diagrama de árbore adxunto, e a partir del, é tamén inmediato obter as probabilidades pedidas:

A probabilidade de entrar no mercado laboral é:
 $p = 0,55 \cdot 0,80 + 0,45 \cdot 0,90 = 0,845 = 84,5 \%$

A segunda probabilidade é unha condicionada:

$$p = \frac{0,55 \cdot 0,20}{0,55 \cdot 0,20 + 0,45 \cdot 0,10} = \frac{0,11}{0,155} \approx 0,71 = 71 \%$$



Como regra xeral para este tipo de diagramas, as probabilidades consecutivas multiplican, e as simultáneas suman.

Ex 19 O mesmo exercício anterior pode-se pensar mediante unha tabela de dupla entrada.

Nesta tabela, o valor correspondente ao suceso “*ser muller e inserir-se laboralmente*” obtén-se como produto $0,55 \cdot 0,80 = 0,44$, e o resto de intersección obteñen-se do mesmo xeito.

	inserción	non inserción	TOTAL
muller	0,44	0,11	0,55
home	0,405	0,045	0,45
TOTAL	0,845	0,155	1

As sumas por filas e columnas dan os totais.

3. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADE

3.1. VARIÁBEL ALEATORIA DISCRETA

Unha variábel aleatoria é unha aplicación definida sobre o espazo mostral E , tal que a cada suceso elemental lle fai corresponder un número real: $X: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Se o conxunto imaxe da aplicación $X(E)$ é finito ou infinito numerábel, a variábel chama-se discreta e se, pola contra, $X(E)$ é infinito non numerábel, chama-se variábel aleatoria continua.

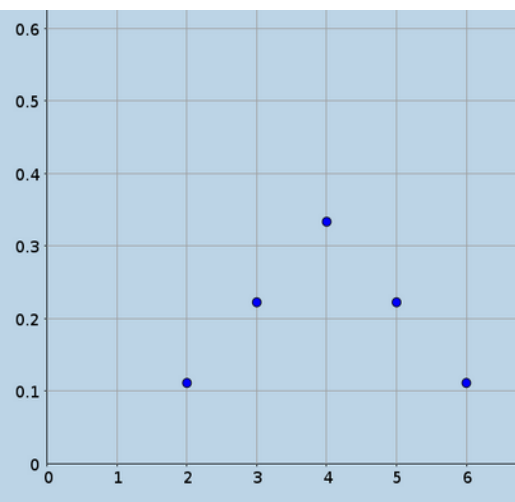
Sexa $X: E \rightarrow \mathbb{R}$ unha variábel aleatoria discreta; chama-se masa de probabilidade da variábel X a toda función $f: X(E) \rightarrow [0, 1]$ que cumpra a condición de que a suma de todos os valores que toma a función f sexa 1: $\sum_{x \in X(E)} f(x) = 1$.

Así, a función de masa de probabilidade representa a probabilidade de que a variábel X tome o valor x : $f(x) = p[X=x]$.

Ex 20 Supoñamos dúas urnas con tres bólas cada unha, numeradas do 1 ao 3. O experimento aleatorio consiste en extraer unha bóla de cada urna e a variábel aleatoria é $X = \text{“suma das dúas bólas”}$. Os posibles valores que pode tomar X están no conxunto $X(E) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e as probabilidades, calculadas pola Regra de Laplace, supoñendo que en cada urna as tres bólas son equiprobábeis, son:

$$f(2) = p[X=2] = \frac{1}{9}, \quad f(3) = p[X=3] = \frac{2}{9}, \quad f(4) = p[X=4] = \frac{3}{9}, \\ f(5) = p[X=5] = \frac{2}{9} \text{ e } f(6) = p[X=6] = \frac{1}{9}.$$

Por ser unha función de tipo discreto, a súa gráfica é a que aparece na imaxe.



Dada unha variábel aleatoria X e a súa función de masa de probabilidade f , chama-se función de distribución da variábel X á función definida da forma $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$, ou tamén, atendendo á definición de masa de probabilidade, $F(x) = p[X \leq x]$.

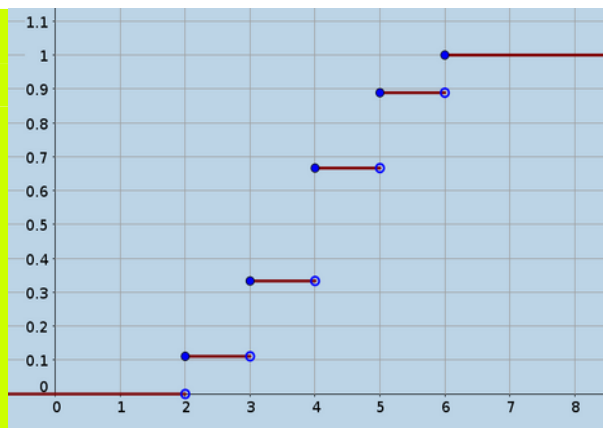
Esta función representa a probabilidade de que a variábel X tome valores menores ou iguais que x , é dicir, algo así como a “probabilidade acumulada”, e ten as seguintes propiedades evidentes:

- 1ª F é unha función crecente;
- 2ª F é unha función escalonada;

3ª $F(x_j) - F(x_i) = p[x_i < X \leq x_j]$, é dicer, a probabilidade de que a variábel X tome valores comprendidos entre x_i e x_j , excluído o próprio x_i , obtén-se como a diferenza entre $F(x_j)$ e $F(x_i)$.

Ex 21 No caso da VA do exemplo anterior, a función de distribución é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{9} & \text{se } x \in [2, 3) \\ \frac{3}{9} & \text{se } x \in [3, 4) \\ \frac{6}{9} & \text{se } x \in [4, 5) \\ \frac{8}{9} & \text{se } x \in [5, 6) \\ 1 & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$



3.2. VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

O paso dunha VA discreta a outra contínua implica modificar substancialmente a definición de “masa de probabilidade”, debido a que nunha variábel aleatória contínua a imaxe da variábel X é un conxunto infinito non numerábel.

No seu lugar define-se a función de densidade da seguinte maneira: sexa unha VA contínua, chama-se función de densidade da variábel X a toda función definida do xeito $f: X(E) \rightarrow [0, 1]$ coa condición de que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Esta condición representa a idea de que a función de densidade debe “repartir” unha probabilidade total igual a 1 en todo o percorrido da variábel aleatória.

Chama-se función de distribución da variábel aleatória X asociada a f , á función $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

A función de distribución interpreta-se como a probabilidade acumulada, é dicer, a probabilidade de que a variábel aleatória tome valores menores ou iguais que x , $F(x) = p[X \leq x]$ e, dacordo coa definición, resulta evidente que $F'(x) = f(x)$, é dicer, F é unha primitiva de f .

Ex 22 Calcular o valor de k para que a función $f(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-3x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$ caso sexa unha función de densidade.

Para que f sexa unha función de densidade debe ser $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$ e ademais $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$; a primeira condición é evidente e para a segunda temos:

$\int_0^{+\infty} k \cdot e^{-3x} dx = k \cdot \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = k \cdot \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\lambda} e^{-3x} dx = k \cdot \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^{\lambda} = -\frac{k}{3} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (e^{-3\lambda} - e^0) = -\frac{k}{3} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{3\lambda}} - 1 \right) = \frac{k}{3}$; logo para que f sexa unha función de densidade debe ser $\frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$, e a función fica $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 3e^{-3x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

A función de distribución asociada á f é $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x 3e^{-3t} dt & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ ou, integrando, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-3x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

3.3. CARACTERÍSTICAS DUNHA VARIÁBEL ALEATORIA: MÉDIA E DESVIACIÓN TÍPICA

De igual xeito que para as variábeis estatísticas podemos obter diferentes parámetros que explican o seu comportamento empírico, as variábeis aleatorias presentan certas características propias da súa distribución probabilística, das que estudaremos a media como medida de centralización, e a desviación típica e a varianza como medidas de dispersión.

A media representa o valor central arredor do que se distribue a probabilidade dunha variábel aleatoria, e define-se, segundo a variábel aleatoria sexa discreta ou continua:

- i. $\mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x_i) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \dots + x_n \cdot f(x_n)$ para unha VA discreta, onde x_i son os valores que toma a variábel X e f é a súa función de masa de probabilidade;
- ii. $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$ para unha VA continua, onde f é a función de densidade.

A varianza e a desviación típica son medidas de dispersión da probabilidade a respecto da media; a varianza representa-se da forma σ^2 e a desviación típica é a súa raíz cuadrada σ . Estas medidas obteñen-se da seguinte maneira:

- i. para unha VA discreta, onde x_i son os valores que toma a variábel X e f é a súa función de masa de probabilidade, a varianza é:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) = (x_1 - \mu)^2 \cdot f(x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot f(x_2) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot f(x_n), \text{ ou tamén,}$$

$$\text{de xeito equivalente e mais doado para o cálculo: } \sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot f(x_i) - \mu^2;$$

- ii. para unha VA continua con función de densidade f , a media é $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$.

Ex 23 Na variábel aleatoria discreta utilizada anteriormente a media é $\mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{3}{9} + 5 \cdot \frac{2}{9} + 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{36}{9} = 4$.

$$\text{A varianza é } \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) = (2-4)^2 \cdot \frac{1}{9} + (3-4)^2 \cdot \frac{2}{9} + (4-4)^2 \cdot \frac{3}{9} + (5-4)^2 \cdot \frac{2}{9} + (6-4)^2 \cdot \frac{1}{9} = 4 \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{12}{9} \approx 1,33.$$

O cálculo da varianza é mais doado na súa segunda versión:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot f(x_i) - \mu^2 = \left(2^2 \cdot \frac{1}{9} + 3^2 \cdot \frac{2}{9} + 4^2 \cdot \frac{3}{9} + 5^2 \cdot \frac{2}{9} + 6^2 \cdot \frac{1}{9} \right) - 4^2 = \frac{156}{9} - 16 = \frac{144}{9} \approx 1,33$$

No caso da VA continua descrita anteriormente, a media é $\mu = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot 3e^{-3x} dx$.

$$\text{Integrando por partes obtemos: } \int x \cdot 3e^{-3x} dx = x \cdot (-e^{-3x}) + \int e^{-3x} dx = x \cdot (-e^{-3x}) - \frac{1}{3} e^{-3x} = -\frac{e^{-3x}}{3} (3x+1) + C$$

$$\text{Logo } \mu = \int_0^{+\infty} x \cdot 3e^{-3x} dx = \left[-\frac{e^{-3x}}{3} (3x+1) \right]_0^{+\infty} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-3\lambda}}{3} (3\lambda+1) \right]_0^{\lambda} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$\text{A varianza é } \sigma^2 = \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 \cdot 3e^{-3x} dx = \frac{1}{9} \approx 0,11, \text{ e polo tanto a desviación típica é } \sigma = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$\text{O cálculo da varianza fai-se mais cómodo facendo } \sigma^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot 3e^{-3x} dx - \left(\frac{1}{3} \right)^2.$$

3.4. A DISTRIBUCIÓN BINOMIAL $B(n, p)$

Unha vez introducido o concepto de variábel aleatoria, discreta ou continua, as funcións de probabilidade (masa e densidade respectivamente) e as funcións de distribución, pasamos a estudar dous modelos de distribucións de probabilidade, un do tipo discreto e outro do tipo continuo, que se corresponden teoricamente con dúas grandes clases de fenómenos aleatorios e que, polo tanto, poden servir para obter as probabilidades dos sucesos relativos a multitude de experimentos aleatorios con características comúns.

A distribución binomial é unha distribución de probabilidade que corresponde a unha variábel aleatoria de tipo discreto que presente as seguintes características:

- 1ª temos un experimento que se realiza n veces en idénticas condicións e de xeito independente
- 2ª para cada realización do experimento, coñecemos a probabilidade de certo suceso A ; esta probabilidade identifica-se como $p = p(A)$ e o suceso A denomina-se “éxito”, mentres que a probabilidade de que A non suceda é $q = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - p$, e o suceso $\bar{A}$ chama-se “fracaso”.

Nestas condicións, a variábel aleatoria X representa o número de veces que acontece o suceso A nas n repeticións do experimento, á que tamén nos referiremos de xeito habitual como $X = \text{“número de éxitos nas } n \text{ realizacións”}$, e di-se que X é unha variábel aleatoria discreta con distribución binomial $B(n, p)$, ou de xeito resumido $X \sim B(n, p)$.

As probabilidades nun experimento con estas características responden á seguinte fórmula: $p[X=k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, onde k representa o número de veces que acontece o suceso A , é dicir, o número de éxitos nas n realizacións.

Os parámetros característicos dunha distribución binomial son:

- i. media $\mu = n \cdot p$
- ii. desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

O cálculo das probabilidades $p[X=k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ pode facer-se facilmente con calculadora ou ben utilizando as tabelas específicas nas que aparecen os valores de $p[X=k]$, para os diferentes valores de n , p e k , que normalmente veñen aproximados a 4 cifras decimais significativas.

Ex 24 Nun experimento que consiste en lanzar seis dados (supón-se que non están carregados), pide-se a probabilidade de obter dous “5”, a media e a desviación típica.

Considerando o suceso $A = \text{“obter un 5 ao lanzar un dado”}$, que será o suceso “éxito”, resulta que $p = p(A) = \frac{1}{6}$, e o lanzamento de seis dados non carregados é equivalente a lanzar un dado seis veces consecutivas, polo que temos $n = 6$, e así a variábel aleatoria $X = \text{“número de éxitos”} \sim B\left(6, \frac{1}{6}\right)$.

Logo a probabilidade de obter dous “5” nos seis lanzamentos é $p[X=2] = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,2009$.

A media de éxitos nos seis lanzamentos é $\mu = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$, a varianza é $\sigma^2 = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \approx 0,83$ e a desviación típica polo tanto é $\sigma = \sqrt{0,83} \approx 0,91$.

Isto quer dicir que ao lanzar seis dados debemos esperar obter por termo medio un só “5”, con desviación típica de 0,91, que representa un grao de dispersión bastante alto.

3.5. A DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(\mu, \sigma)$

A distribución normal é un modelo de distribución de probabilidade para variábeis aleatorias de tipo contínuo, correspondentes a multitude de fenómenos que dependen dunha grande cantidade de variábeis, mas que poden ser medidos a partir da observación dunhas poucas magnitudes independentes, algo habitual na observación de fenómenos da natureza, motivo que fai que este modelo sexa de uso frecuente.

As características que identifican o modelo son a media μ e a desviación típica σ da mostra, e diremos que a variábel ten unha distribución normal de media μ e desviación típica σ , ou de xeito habitual $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Ao ser unha variábel contínua non ten sentido, desde o punto de vista teórico, que nos preguntemos pola probabilidade de que unha observación en particular coincida cun valor preciso, xá que esta probabilidade teoricamente é nula. Abonda pensar na probabilidade de que unha persoa ao azar teña unha estatura de exactamente $1,72538\text{ m}$; ten mais sentido que nos preguntemos por sucesos como que a estatura estea comprendida no intervalo $[1.60, 1.75]$ ou que sexa inferior a $1,55\text{ m}$.

Neste modelo, polo tanto, ten unha especial importancia a función de distribución xá que permite obter as probabilidades en diferentes intervalos como integrais definidas desa función.

O estudo destes fenómenos fai-se a partir da chamada “normal estándar” ou “tipificada”, que é unha distribución de media $\mu=0$ e desviación típica $\sigma=1$, é dicir, $N(0,1)$.

A función de densidade desta variábel é $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ e a distribución de probabilidade asociada con ela é $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, función que representa a probabilidade de que o valor observado sexa menor ou igual que x , é dicir:

$$p[X \leq x] = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Debido a que a función de densidade $\phi(x)$ non é integrábel, é dicir, a integral $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ non pode ser expresada analiticamente, o cálculo de $\Phi(x)$ fai-se por métodos numéricos ou calculadora, ou ben usando as clásicas tabelas da distribución normal estándar.

Para o cálculo das probabilidades nunha distribución normal non estándar $N(\mu, \sigma)$, debemos proceder en primeiro lugar á tipificación, método que consiste nunha transformación da variábel $X \sim N(\mu, \sigma)$ en outra estándar $Z \sim N(0,1)$. Este proceso recibe o nome de “tipificación” da normal.

Esta transformación fai-se a través do cambio $X \rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, de xeito que a nova variábel é $Z \sim N(0,1)$, para a que as probabilidades desexadas están tabuladas.

Ex 25 As cualificacións obtidas nun proceso de oposición dán-se entre 0 e 10, arredondadas a 1 cifra decimal significativa, e seguen unha distribución normal de media $\mu=4,6$ e desviación típica $\sigma=1,22$; calcular a probabilidade de que ao seleccionar unha das opositoras ao azar, a súa cualificación sexa superior a 5.

A variábel que mide a cualificación é $X \sim N(4,6, 1.22)$ e como a cualificación é arredondada a 1 cifra decimal significativa, obtén-se unha cualificación superior a 5 sempre que a nota exacta sexa maior ou igual que 5,05; polo tanto a probabilidade que nos piden é $p[X \geq 5,05]$.

Antes de pasar ao cálculo debemos tipificar a variábel, para o que definimos $Z = \frac{X-4,6}{1,22} \sim N(0, 1)$. Consonte esta transformación, o valor 5,05 transforma-se en $\frac{5,05-4,6}{1,22} \approx 0,39$, e polo tanto a probabilidade $p[X \geq 5,05]$ convirte-se en $p[Z \geq 0,39]$.

Como as tabelas da normal proporcionan as probabilidades do tipo $p[Z \leq 0,39]$, temos:

$$p[Z \geq 0,39] = 1 - p[Z \leq 0,39] = 1 - 0,6517 = 0,3483.$$

Logo a probabilidade de que a opositora escollida obteña unha nota superior a 5 é $0,3483 \approx 35\%$.

3.6. CONVERXENCIA DA BINOMIAL Á NORMAL E CORRECIÓN DE YATES

Apesar de ser dous modelos diferentes debido ao carácter discreto da distribución binomial e continuo no caso da normal, é posíbel obter probabilidades binomiais aproximadas utilizando o modelo da distribución normal. Este proceso, que se chama de “aproximación da binomial pola normal”, resulta útil por ser en xeral mais cómodo obter probabilidades na distribución normal que na binomial, aínda que por este procedemento introduzamos un erro que, contodo, resulta insignificante en certas condicións.

Supoñamos que X é unha variábel discreta con distribución binomial $B(n, p)$; sabe-se que a media é $\mu = np$ e a desviación típica é $\sigma = \sqrt{npq}$. Nestas condicións podemos aproximar a variábel considerando-a como unha normal $N(\mu, \sigma)$, con $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{npq}$.

Esta aproximación é admisíbel sempre que $n \geq 30$, $n \cdot p \geq 5$ e $n \cdot q \geq 5$ (aínda que estes criterios varían segundo o autor).

Finalmente, e debido a que estamos tratando como continua unha variábel que na realidade é discreta, é necesario facer unha corrección, chamada de Yates ou de medio punto, e que consiste en asignar ao valor inteiro k correspondente á variábel discreta, o intervalo $[k - 0,5, k + 0,5]$ correspondente esta vez á variábel continua.

Por este motivo a probabilidade $p[X = k]$ en $B(n, p)$ obterá-se como a probabilidade $p[k - 0,5 \leq X < k + 0,5]$ en $N(np, \sqrt{npq})$.

Ex 26 Ao lanzar un dado ao ar 15 veces, queremos calcular a probabilidade de obtermos entre 7 e 10 veces un número maior que 4, ambas inclusive.

O experimento pertence claramente ao modelo binomial con $n = 15$ e $p = \frac{1}{3}$, $X \sim B\left(15, \frac{1}{3}\right)$, xa que repetimos a proba 15 veces e o suceso éxito “obter un número maior que 4” ten probabilidade $p = \frac{1}{3}$.

A probabilidade pedida é:

$$p[7 \leq X \leq 10] = p[X = 7] + p[X = 8] + p[X = 9] + p[X = 10] = \binom{15}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{15}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \binom{15}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \binom{15}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

É evidente que este cálculo resulta incómodo.

A aproximación pola normal fai-se como segue: $\mu = n \cdot p = 15 \cdot \frac{1}{3} = 5$ e $\sigma = \sqrt{15 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 1,83$, logo temos $X \sim N(5, 1.83)$ e a probabilidade desexada é $p[6,5 \leq X < 10,5]$.

Tipificando resulta: $X \sim N(5, 1.83) \rightarrow \frac{X-5}{1,83} \sim N(0, 1)$, así que:

$$p[6,5 \leq X < 10,5] = p[0,82 \leq Z < 3,01] = \Phi(3,01) - \Phi(0,82) = 0,9987 - 0,7939 = 0,2048 \approx 20\%$$

Esta aproximación, aínda que non cumpre a condición $n \geq 30$, é suficientemente boa e claramente mais rápida que o cálculo binomial.

1. ÁLXEBRA DE SUCEOS

1. No experimento que consiste en lanzar un dado ao ar, determinar o espazo mostral E e os sucesos “obter un número impar”, “obter par” e “obter un múltiplo de 3”. Construír a álgebra de sucesos Ω .
2. No experimento que consiste en lanzar dúas moedas, determinar o espazo mostral, a álgebra de sucesos e o suceso “obter polo menos unha cara”.
3. No experimento que consiste en lanzar dous dados de distinta cor, indicar o espazo mostral e os sucesos “obter polo menos un seis” e “obter polo menos un múltiplo de dous”. Responder as mesmas cuestións no caso de ser dous dados idénticos.
4. No experimento que consiste en lanzar dous dados, formar os seguintes sucesos: suceso seguro, “obter suma 11”, “obter suma 8”, “obter suma menor ou igual que 4”, “obter suma maior que 10”.
5. Extrae-se unha bóla dunha bolsa que contén nove bólas numeradas do 1 ao 9. Determinar o espazo mostral e os sucesos “obter par”, “obter primo” e “obter múltiplo de 3”.
6. Certo experimento aleatorio ten espazo mostral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e consideran-se os sucesos $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ e $D = \{3\}$; formar os sucesos $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cup C$, $A \cup (B \cap C)$, $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $A \cup (B \cap \bar{C})$, $A \cap (B \cup \bar{C})$, $\bar{A} \cap (B \cap C)$, $A \cap (B \cap C)$.
7. Sexan tres sucesos A , B e C nun experimento aleatorio. Expresar en función deles e dos seus contrarios os sucesos “realizar-se A e B ”, “realizar-se A e B mas non C ”, “realizar-se polo menos un dos tres sucesos”, “non realizar-se ningún dos tres sucesos”.
8. Un experimento consiste na extracción de tres parafusos dunha caixa que contén parafusos bos e outros defectuosos. Indicar o espazo mostral e o número de elementos de que consta. Formar os sucesos “o último parafuso extraído é defectuoso”, “so hai un parafuso defectuoso” e “extraer polo menos un parafuso defectuoso”.
9. Dunha caixa que contén bólas brancas e negras en número superior a tres extraen-se sucesivamente tres bólas. Indicar o espazo mostral e os sucesos “sacar polo menos unha bóla branca” e “sacar as tres bólas da mesma cor”.
10. Nun grupo no que hai sete persoas, das que tres son inmigrantes, escóllen-se ao azar dúas persoas. Indicar o espazo mostral e os sucesos “algúnha das persoas escollidas non é inmigrante”, “ningúnha das persoas escollidas é inmigrante” e “polo menos unha das persoas escollidas é inmigrante”.
11. Unha bolsa contén seis bólas numeradas do 1 ao 6. Extrae-se unha bóla, que identificamos coa variábel x e, sen devolvé-la, extrae-se outra que identificamos como y . Indicar o espazo mostral e os sucesos “extraer dúas bólas de valor consecutivo”, “extraer algúnha bóla par”, “extraer dúas bólas de forma que $2x + y < 13$ ”.

12. Nunha caixa hai oito pezas das que tres son defectuosas. Realízanse dous experimentos distintos consistentes en extraer unha peza da caixa, o primeiro, e extraer dúas pezas, o segundo. Indicar o espazo mostral en cada un dos dous casos e formar tamén o suceso “*obter unha peza defectuosa*” para cada un dos experimentos.
13. Un sorteo consiste en extraer tres bolas, consecutivamente e sen devolución, dun bombo que contén dez bolas numeradas do 0 ao 9. Calcular o cardinal do espazo mostral e indicar os sucesos “*o segundo premio é un número par e o terceiro impar*”, “*o primeiro premio non é par e o segundo non é maior que 4*” e “*nengún número par ten premio*”.
14. Nunha enquisa a 120 persoas obtén-se que 55 ven televisión, 60 escoitan rádio, 45 van ao cinema, 25 ven televisión e escoitan rádio, 28 ven televisión e van ao cinema, 27 escoitan rádio e van ao cinema e 20 fan as tres cousas. Cantas persoas non ven televisión, nen escoitan rádio nen van ao cinema? Cantas ven televisión mas non escoitan rádio nen van ao cinema? Cantas practican só unha das tres actividades?

2. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

15. Calcular a probabilidade de que ao lanzar dous dados a suma sexa 3, 4 ou 5.
16. Determinar a probabilidade de obter polo menos dúas cruces ao lanzar tres moedas ao ar.
17. Unha moeda trucada ofrece tripla probabilidade de obter cara que de obter cruz. Calcular a probabilidade de cada un dos dous sucesos elementares.
18. Un dado trucado ofrece unha probabilidade de obter cada unha das distintas caras proporcional ao seu número. Calcular a probabilidade de cada suceso elementar e a probabilidade de obter un número par.
19. Escólese un número ao azar do 1 ao 240. Achar a probabilidade de que resulte ser: a) múltiplo de 2; b) múltiplo de 5; c) múltiplo de 2 ou de 5; d) múltiplo de 2 e de 5.
20. A un congreso científico asisten cen congresistas, das que 80 falan portugués e 40 falan gaélico. Calcular a probabilidade de que dúas das congresistas escollidas ao azar precisen de intérprete.
21. Comprobouse que nunha cidade hai un 60% da poboación infantil enferma de diarrea, un 50% con catarro e un 20% con ambas doenzas. Calcular a probabilidade de que ao escoller unha crianza ao azar, estaia enferma. Cantas cabe esperar que estean enfermas nunha escola de 450 crianzas?
22. Un xogador expresou a Galileo a súa sorpresa ao observar que con tres dados a suma 10 aparece con maior frecuencia que a suma 9. Explicar este fenómeno.
23. Se p é unha probabilidade definida sobre o conxunto $E=\{a, b, c, d\}$ de forma que $p(a)=0,5$, $p(b)=0,2$ e $p(c)=0,1$, calcular $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$ e $p(A \cap B)$, onde $A=\{a, b, c\}$ e $B=\{a, b, d\}$.
24. Unha estudante preparou 20 dos 24 temas de que consta a materia. Se no comezo do exame se escollen ao azar tres temas, cal é a probabilidade de que saiba polo menos dous dos tres temas escollidos? E a de que non saiba ningún?

25. Un estudante sabe dous dos sete temas que entran nun exame que consiste en explicar dous temas. Calcular a probabilidade de que conteste ben aos dous temas.
26. Queremos telefonar a unha persoa da que sabemos que o seu número comeza por 98176, mas descoñecemos as catro últimas cifras. Calcular a probabilidade de acertar se marcamos ao azar as cifras descoñecidas. Calcular a probabilidade do mesmo suceso sabendo que nengunha das nove cifras é repetida.
27. Calcular a probabilidade de acertar un pleno ao 15 se cubrimos unha quiniela ao azar. Calcular a probabilidade de fallar os 15 prognósticos.
28. Calcular a probabilidade de acertar unha primitiva se xogamos unha soa aposta. Calcular a probabilidade de acertar se marcamos no mesmo boleto oito números. Canto custaría selar ese boleto?
29. Extrae-se unha carta da baralla. Estudar se os sucesos “obter un as” e “obter unha espada” son incompatíbeis. Calcular a probabilidade de que a carta extraída sexa un as ou unha espada.
30. Escollen-se duas cartas da baralla. Calcular a probabilidade de que polo menos unha sexa de copas.
31. Temos duas urnas A e B : a urna A contén 3 bólas verdes e 4 amarelas e a urna B contén 5 verdes e 7 amarelas. Escolle-se unha bóla da urna A e introduce-se en B . Finalmente extrae-se unha bóla de B . Calcular a probabilidade de que a bóla obtida finalmente sexa amarela.
32. Nunha urna hai 4 bólas rosas e 6 marróns e en outra hai 8 rosas e 10 marróns. Escollemos unha urna ao azar e extraemos dúas bólas. Calcular a probabilidade de que: a) as dúas bólas sexan de cor rosa, e b) as dúas bólas sexan de distinta cor.
33. Nunha rifa sortean-se cinco premios entre cen números. Se mercamos tres números, calcular a probabilidade de que nos toque polo menos un premio.
34. A probabilidade de que un touro embista ao toureiro na faena é de $\frac{1}{3}$. Achar a probabilidade de que: a) o toureiro saia ileso despois de lidiar seis touros, e b) o toureiro sexa embestido polo menos por un dos seis touros.

3. PROBABILIDADE CONDICIONADA

35. Dados os sucesos A e B , de forma que $p(A)=\frac{1}{2}$, $p(B)=\frac{1}{3}$ e $p(A \cap B)=\frac{1}{4}$, calcular $p(A/B)$ e $p(B/A)$.
36. Calcular a probabilidade de extraer dúas bólas brancas dunha bolsa que contén 14 bólas brancas e 16 verdes, reempazando a bóla cada vez que se fai unha extracción? E se non hai reempazo?
37. Dunha baralla de 40 cartas extraen-se dúas ao azar. Calcular a probabilidade de que resulten ser dous cabalos.
38. Nunha caixa hai dúas bólas brancas, unha preta e sete vermellas. Ao extraer dúas consecutivas que probabilidade hai de obter unha bóla preta seguida dunha branca, se non se repón a primeira tras a súa extracción? E se hai reposición?
39. Utilizando os axiomas de probabilidade, demostrar que: $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$.

40. Demostrar que se A e B son dous sucesos posibles e incompatíbeis, entón son dependentes.
41. Se A e B son dous sucesos posibles, demostrar que se A e B son independentes, tamén o son os seus contrários.
42. Lanza-se tres dados ao ar. Calcular a probabilidade dos sucesos A "obter un 4 en cada dado" e B "a suma total dos puntos é 8".
43. Unha paciente é tratada con tres medicamentos de acción independente, con probabilidade de éxito 0,9, 0,91 e 0,92 respectivamente. Calcular a probabilidade de que o tratamento teña éxito.
44. Unha persoa aposta a que, lanzando dous dados, obtén sete puntos na primeira tirada e nove na segunda. Calcular a probabilidade de que acerte as dúas veces e a probabilidade de que acerte polo menos unha delas.
45. Extraen-se sucesivamente e sen devolución dúas bolas dunha bolsa que contén dez bolas numeradas do 1 ao 10. Sexa o suceso A "obter par na primeira extracción", o suceso B "a suma dos números extraídos é menor que 8" e o suceso C "obter dous números menores que 6". Son A e B independentes? E B e C ? Calcular $p(A \cap B \cap C)$.
46. Nunha bolsa hai tres dados. Un non está carregado, no segundo as caras pares teñen dupla probabilidade de saír que as impares e o terceiro sempre dá resultado par. Escólese un dado ao azar e lánzase. Calcular a probabilidade de a) obter un número par; b) obter un 5. Calcular a probabilidade de que o dado escollido fose o terceiro sabendo que o resultado foi un 3.
47. Nun instituto de 400 estudantes, onde o 40% son homes, realizouse unha enquisa e resultou que 180 estudantes participan nas actividades extraescolares. Comprobouse que hai 80 homes que non o fan. Calcular a probabilidade de que ao escoller un estudante ao azar: a) sexa muller e participe en actividades; b) sexa muller, sabendo previamente que participa en actividades. Son os sucesos "ser muller" e "participar en actividades" incompatíbeis? Son independentes?
48. No sorteo do "gordo" é sabido que hai números "feos" dos que a xente escapa. Hai algunha razón fundada para non querer xogar o número 11111? Supoñendo que este ano o primeiro premio caíu no 21744, mercarías o ano que vén un número que comece por 21? E un que remate en 44? Mercarías o 21744? Por que?

4. AMPLIACIÓN DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES

49. Tres máquinas fabrican pezas do mesmo tipo. Cada unha delas ten unha porcentaxe de pezas defectuosas do 1%, 2% e 3% respectivamente. Misturaron-se nunha mesma caixa 100 pezas de cada unha das máquinas e ao escoller unha ao azar resultou ser defectuosa. Calcular a probabilidade de que a peza proveña da primeira máquina.
50. Extraen-se ao azar dúas bolas (primeiro unha e, tras volvé-la a bolsa, outra) dunha bolsa que contén m bolas brancas e n pretas. Calcular a probabilidade de "obter dúas bolas da mesma cor", "obter algunha bola branca" e "non obter bolas brancas".
51. O mesmo experimento anterior, só que neste caso as bolas non se volven a bolsa.

52. O grupo de 4º de ESO sortea unha equipa de son para recadar cartos para a excursión de fin de curso. Fixeron 1.000 boletas, numeradas do 000 ao 999, das que venderon as 750 primeiras. a) Que boleta comprarias, se che deran a escoller entre comprar a boleta 000 e a 417; b) calcular a probabilidade de que o prêmio fiquen nas mans da organización, tras realizarse o sorteo; c) supoñendo que non resultou premiada nengunha boleta tras o primeiro sorteo, calcular a probabilidade de que se adxudique o prêmio nun segundo sorteo; d) supoñendo que tras n sorteos seguimos nas mesmas, que probabilidade hai de que toque no sorteo $n+1$? e) O grupo de 4º é xeneroso e queren que algunha das boletas vendidas resulte premiada. Por esta razón deciden repetir o sorteo tantas veces como sexa necesario até que lle toque o equipo a alguén. Calcular o número mínimo de veces que hai que realizar o sorteo para ter un 99% de confianza en que efectivamente lle toque a alguén.

5. VARIÁBEL ALEATORIA DISCRETA

53. O espazo mostral E dun experimento aleatorio está formado polos puntos (a, b) de coordenadas inteiras tais que $0 \leq a \leq 4$ e $0 \leq b \leq 2$. Considera-se a variábel aleatoria $X(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$. Achar o conxunto imaxe $X(E)$.
54. No conxunto das figuras dunha baralla española, define-se a variábel aleatoria "número correspondente a carta":
 a) escribir o conxunto imaxe da variábel aleatoria;
 b) achar a anti-imaxe do 11;
 c) é unha variábel aleatoria discreta ou continua?
 d) Facer unha tabela da función de probabilidade.
55. Un experimento aleatorio ten espazo mostral $E = \{-1, -2, -3, 1, 2, 4\}$, de sucesos elementares equiprobábeis. Considera-se a variábel aleatoria que asigna a cada número o seu cuadrado. Determinar a súa función de probabilidade.
56. Lanza-se un dado dúas veces e suman-se os puntos:
 a) determinar o conxunto imaxe da variábel aleatoria $X(E)$;
 b) calcular $p[X=8]$;
 c) calcular $p[X \leq 4]$.
57. 57. Lanza-se unha moeda e un dado e anota-se 7 se sai cara e 8 se sai cruz, seguido do número obtido no dado, formando-se así un número de dúas cifras. Calcular $p[X=75]$, representar a función de distribución e calcular a media.
58. Se a función de masa de probabilidade dunha variábel aleatoria é $f(x) = \frac{1}{3}$ se $x \in \{0, 1, 2\}$ e $f(x) = 0$ no resto dos casos, representar a función de distribución $F(x)$ e calcular $F(0,5)$.
59. A función de masa de probabilidade dunha variábel aleatoria é $f(x) = \frac{1}{5}$ se $x=0$ ou $x=1$, $f(x) = \frac{3}{5}$ se $x=2$ e $f(x)=0$ no resto dos casos. Calcular $\frac{F(3)-F(1)}{F(5)+F(-1)}$, onde $F(x)$ é a función de distribución.

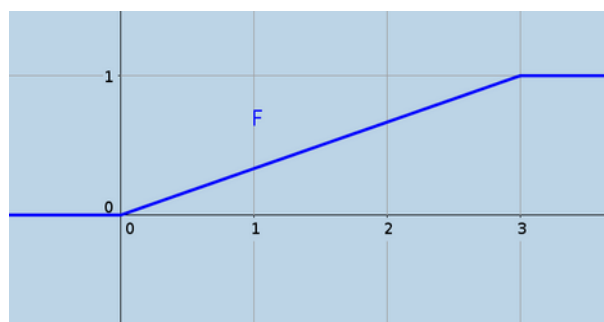
60. Lanza-se un dado e asignan-se os valores: 1 se sai un número menor ou igual que 3, 2 se sai un 4 ou un 5 e 3 se sai un 6. Representar as funcións de masa de probabilidade $f(x)$ e de distribución $F(x)$.
61. Lanza-se tres moedas e anota-se o número de cruces obtidas:
 a) determinar o espazo mostral E e a imaxe $X(E)$;
 b) determinar e representar $f(x)$ e $F(x)$;
 c) indicar que tipo de variábel é;
 d) calcular a media, varianza e desviación típica.
62. A variábel X é tal que $X(E) = \{1, 2, 5\}$, con $p[X=1]=0,3$ e $p[X=2]=0,4$. Representar $f(x)$ e $F(x)$.
63. Lanza-se unha moeda de forma que se gaña un euro se sai cara e perde-se un euro se sai cruz. Definir a variábel aleatoria do xogo e representar as funcións de masa de probabilidade e de distribución.
64. Nunha urna con tres bólas brancas, cinco vermellas e oito pretas, toma-se unha bóla e anota-se 1 se a bóla é branca, 2 se é vermella e 3 se é preta. Representar as funcións de masa de probabilidade e distribución. Calcular a media, varianza e desviación típica.
65. Definir a variábel aleatoria do xogo que consiste en lanzar dúas moedas, de forma que se perden cinco euros se saíñ dúas caras, gañan-se dez euros se saíñ dúas cruces e perden-se tres euros no resto dos casos. Representar $f(x)$ e $F(x)$. Participarías nun xogo como este?
66. Calcular a media, varianza e desviación típica da variábel aleatoria que asigna á letra a ao número 0 e ás letras b , c e d o número 1, onde o espazo mostral $E = \{a, b, c, d\}$ compón-se de sucesos elementares equiprobábeis.

6. VARIÁBEL ALEATORIA CONTÍNUA

67. A función de densidade dunha variábel aleatoria contínua é $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 2 \\ 1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases}$;

calcular $p\left[X \leq \frac{11}{13}\right]$, a media e a desviación típica.

68. A gráfica adxunta corresponde á función de distribución $F(x)$ dunha variábel aleatoria contínua X . Calcular $p[X \leq 1]$, a media e a desviación típica.



69. O percorrido dunha variábel aleatoria contínua é o intervalo $[1, 3]$. Calcular a probabilidade de que X tome valores entre 1 e 2 se a función de densidade é $f(x) = k(x-1)$. Calcular a media e a desviación típica.

70. A probabilidade de que X tome valores entre a e $a+1$ é $0,5$, para unha variábel aleatoria que ten como función de densidade $f(x) = \frac{x-1}{2}$ no intervalo $[1, 3]$. Calcular o valor de a , a media e a desviación típica.
71. A variábel aleatoria “tempo de funcionamento dunha componente eléctrica, medido en anos” ten por función de densidade $f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{se } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{se } x \notin (0, 2) \end{cases}$; calcular o tempo medio de duración das componentes.
72. A variábel aleatoria “tempo de reparación, en horas, dunha avaria nun taller” ten por función de densidade $f(x) = k - \frac{x^2}{6}$ se $0 < x < 3$ e $f(x) = 0$ en outro caso. Calcular o valor de k e a probabilidade de que unha reparación dure menos de unha hora.
73. Calcular o valor de c para que a función $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ sexa a función de densidade dunha variábel aleatoria X e obter a función de distribución correspondente.

7. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

74. Achar a función de masa de probabilidade da binomial $B(4, 1/3)$.
75. A probabilidade de que A gañe a B nunha man do tute é de $0,4$. Calcular a probabilidade de que A gañe tres mans das sete xogadas.
76. Calcular $p[X \geq 3]$ nunha binomial $B(5, 0.5)$.
77. Nunha familia con cinco descendentes, que probabilidade hai de que sexan dous homes e tres mulleres? E a de ter polo menos unha filla? Nota: supón-se que a probabilidade de nacer muller ou home é a mesma.
78. As cifras de natalidade indican que o 45% dos nacementos son nenos. Considerando unha familia de 6 descendentes, calcular:
a) a probabilidade de que todas sexan nenas;
b) a probabilidade de que sexan metade nenas e metade nenos;
c) a probabilidade de que haxa mais nenos que nenas.
79. A probabilidade de que a impresión dun libro sexa defectuosa é $0,01$. Que probabilidade hai de que saian dous exemplares defectuosos nun lote de 15?
80. Unha moeda presenta tripla probabilidade de saír cara que de saír cruz. Considerase a variábel aleatoria que consiste en contar o número de caras obtidas tras cinco lanzamentos consecutivos. Calcular:
a) a probabilidade de obter dúas caras;
b) a probabilidade de obter como máximo dúas caras;
c) a probabilidade de obter menos de dúas cruces.
81. Dunha urna con 20 bólas brancas e outras tantas pretas extraen-se 16 bólas. Calcular a probabilidade de obter sete bólas pretas.
82. A probabilidade de que unha fábrica produza latas defectuosas é $0,05$. Calcular a media de latas defectuosas que é de esperar que aparezan nun lote de 2.000. Calcular a desviación típica.

83. A probabilidade de que dúas tiradoras A e B fagan diana é $2/3$ e $4/5$. Se A dispara cinco veces e B catro, calcular a media de acertos de cada unha delas e a desviación típica.
84. Calcular a media e desviación típica de pezas defeitosas nun lote de 1.000 pezas, se o 3% son defeitosas.
85. Calcular o número de latas de mexillón que non se poderán comercializar, sabendo que a probabilidade de que unha lata non reúna as condicións é de $0,015$ e que se producen 20.000 latas ao día. Calcular a desviación típica.
86. Nun grupo de 44 estudantes detectan-se seis casos de cáries dental. Achar a probabilidade de que ao escoller catro individuos ao azar, exactamente a metade padezan cáries.
87. A probabilidade de curar a unha persoa enferma con certo medicamento é $0,8$. Calcular a probabilidade de obter éxito con seis pacientes polo menos entre as quince persoas ás que se lles subministró o composto.

8. DISTRIBUCIÓN NORMAL

88. Calcular $p[35 \leq X \leq 39]$ nunha variábel aleatoria normal $N(40, 3)$.
89. Calcular $p[30 \leq X \leq 40]$ nunha variábel aleatoria normal $N(20, 8)$.
90. Calcular $p[10 \leq X \leq 20]$ nunha variábel aleatoria normal $N(18, 4)$.
91. Calcular $p[X \leq 7]$ nunha variábel aleatoria normal con $\mu=4$ e $\sigma=3$.
92. Calcular $p[-0,4 \leq X \leq 1]$ e $p[-1,5 \leq X \leq 0]$ nunha variábel aleatoria normal tipificada $N(0, 1)$.
93. 93. Calcular $p[X \leq 2,3]$ e $p[0,7 \leq X \leq 1,6]$ nunha variábel aleatoria normal tipificada.
94. Calcular $p[1 \leq X \leq 10]$ e $p[-7 \leq X \leq 9]$ nunha variábel aleatoria normal $N(1, 2)$.
95. As notas de Filosofía nun grupo seguen unha distribución normal con media 5 e desviación típica 3 .
 a) Que porcentaxe hai de aprobados?
 b) Que tanto por cento teñen entre 5 e 6 ?
 c) Que probabilidade hai de que ao escoller unha persoa ao azar, a súa nota estea entre 6 e 7 ?
96. Os pesos dos polos dunha granxa distribúen-se normalmente con media $1,8 \text{ kg}$ e desviación típica de 300 gr . Se se rexeitan os polos que pesan menos de $1,65 \text{ kg}$:
 a) que porcentaxe de polos será rexeitada?
 b) que probabilidade hai de que un polo escollido ao azar pese máis de 2 kg ?
97. A temperatura media diaria durante un ano en Muros é de 12°C con desviación típica de 3°C . Cantos días ao ano se espera que a temperatura sexa superior a 9°C se a distribución é normal?

98. A nota média das 900 estudantes do instituto no fin de curso foi 5 con desviación típica 2. Supoñendo que a distribución das notas é normal, calcular a probabilidade de que unha estudante escollida ao azar teña nota:
- a) superior a 6 ;
 - b) inferior a 7 ;
 - c) comprendida entre 5 e 8 .
99. O peso médio das estudantes do mesmo instituto é de 65 kg con desviación típica 4. Se os pesos están distribuídos de forma normal, achar a probabilidade de que o peso de unha estudante escollida ao azar sexa:
- a) superior a 70 kg ;
 - b) inferior a 50 kg ;
 - c) entre 60 e 68 kg ;
 - d) que porcentaxe de estudantes responden ás características do apartado c?
100. Vários test de intelixencia deron unha puntuación que segue unha distribución normal de média 100 e desviación típica 15. Determinar a porcentaxe de populación que obtería un cociente entre 95 e 110. Que intervalo centrado en 100 contén o 50% da populación? Nunha populación de 2.500 persoas, cantas se espera que teñan cociente superior a 125 ?
101. A nota média dos exames das ABAU é de 5,8 e a desviación típica 1,75. Se as cualificacións seguen unha distribución normal e a nota de ingreso debe ser superior a 6,5, cal é a porcentaxe de admitidas?
102. Unha empresa instala 20.000 lámpadas. A súa duración segue unha distribución normal de média 305 días e desviación típica 40. Que número de lámpadas é de esperar que se fundan antes de 365 días? Cantas durarán mais de 401 días?
103. A idade dos membros dunha asociación supón-se normal de média 14 e desviación típica 4. Se en total conta con 500, achar o número deles con idade comprendida entre 12 e 17 anos e o número deles que son maiores de 18 anos.
104. Unha batea produce mexillón de lonxitude média 58 mm e desviación típica 7 mm. Clasifica-se en categoría “extra” o de 62 mm ou mais, “primeira” o de mais de 55 e menos de 62, e “segunda” o de menos de 55. Calcular a porcentaxe que se produce de cada tipo.
105. Os erros de pesada dunha báscula comportan-se como unha distribución normal con média 0 gr e desviación típica 2 gr. Calcular a probabilidade de que un obxecto sexa pesado con erro inferior a 1 gr (por exceso ou defeito). Se se realizan tres pesadas consecutivas deste obxecto, calcular a probabilidade de que polo menos nunha delas o erro sexa inferior a 1 gr.

9. APROXIMACIÓN DA BINOMIAL POLA NORMAL

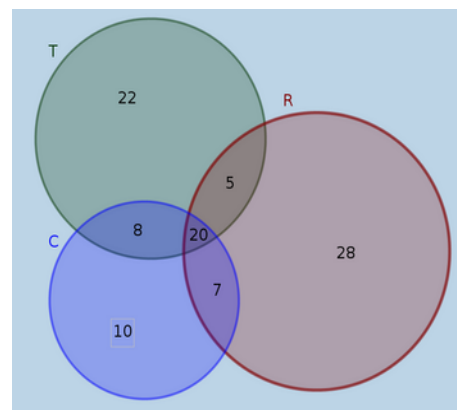
106. Lanza-se unha moeda ao ar 12 veces. Determinar a probabilidade de que saian entre 4 e 6 caras (ambas inclusive):
- a) utilizando a distribución binomial;
 - b) utilizando a aproximación da distribución binomial pola distribución normal.
107. Ao lanzar unha moeda 320 veces, achar a probabilidade de que saian entre 80 e 140 caras, usando a aproximación normal da binomial.

10. SOLUCIÓNS

1. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A "obter impar" = $\{1, 3, 5\}$,
 B "obter par" = $\{2, 4, 6\}$, C "obter múltiplo de 3" = $\{3, 6\}$
 $\Omega = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \dots, E\}$.
2. $E = \{CC, C+, +C, ++\}$,
 $\Omega = \{\emptyset, \{CC\}, \{C+\}, \{+C\}, \{++\}, \{CC, C+\}, \{CC, +C\}, \dots, \{CC, C+, +C\}, \dots, E\}$
 A "obter polo menos unha cara" = $\{CC, C+, +C\}$.
3. Dados distintos:
 $E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, \dots, 64, 65, 66\}$
 A "obter polo menos un 6" = $\{16, 26, 36, 46, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$
 B "obter polo menos un múltiplo de 2" = $\{12, 14, 16, 21, 22, \dots, 26, 32, 34, \dots, 65, 66\}$
 Dados idénticos:
 $E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, \dots, 55, 56, 66\}$
 A "obter polo menos un 6" = $\{16, 26, 36, 46, 56, 66\}$
 B "obter polo menos un múltiplo de 2" = $\{12, 14, 16, 21, 22, 23, \dots, 45, 46, 56, 66\}$
4. $E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, \dots, 64, 65, 66\}$
 A "obter suma 11" = $\{56, 65\}$, B "obter suma 8" = $\{26, 35, 44, 53, 62\}$
 C "obter suma menor ou igual que 4" = $\{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$
 D "obter suma maior que 10" = $\{56, 65, 66\}$
5. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $\Omega = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{9\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, 9\}, \{2, 3\}, \dots, \{2, 9\}, \dots, \{8, 9\}, \{1, 2, 3\}, \dots, E\}$
 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{3, 6, 9\}$
6. $\bar{A} = \{1, 3, 4\}$, $\bar{B} = \{2, 6\}$, $\bar{C} = \{1, 2, 3\}$, $\bar{D} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $A \cup B = E$, $A \cap C = \{5, 6\}$,
 $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cup (B \cap C) = \{2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{5\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$,
 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $A \cup (B \cap \bar{C}) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$,
 $A \cap (B \cup \bar{C}) = \{2, 5\}$, $\bar{A} \cap (B \cap C) = \{4\}$, $A \cap (B \cap C) = \{5\}$.
7. $A \cap B$, $A \cap B \cap \bar{C}$, $A \cup B \cup C$, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.
8. $E = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD\}$, $A = \{BBD, BDD, DBD, DDD\}$,
 $B = \{BBD, BDB, DBB\}$, $C = \{BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD\}$.
9. $E = \{BBB, BBN, BNB, BNN, NBB, NBN, NNB, NNN\}$
 $A = \{BBB, BBN, BNB, BNN, NBB, NBN, NNB\}$, $B = \{BBB, NNN\}$.
10. $E = \{MM, MN, NM, NN\}$, $A = \{MN, NM, NN\}$, $B = \{NN\}$, $C = \{MM, MN, NM\}$.
11. $E = \{12, 13, 14, 15, 16, 21, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 34, 35, \dots, 61, 62, 63, 64, 65\}$
 $A = \{12, 21, 23, 32, 34, 43, 45, 54, 56, 65\}$
 $B = \{12, 14, 16, 21, 23, 24, 25, 26, 32, 34, \dots, 61, 62, 63, 64, 65\}$
 $C = \{12, 13, 14, 15, 16, 21, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 51, 52\}$
12. No primeiro caso: $E = \{BD\}$, $A = \{D\}$;
 no segundo: $E' = \{BB, BD, DB, DD\}$, $A' = \{BD, DB\}$.
13. $\text{card } E = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
 $A = \{023, 025, 027, 029, 043, 045, \dots, 187, 189, 103, 105, 107, 109, 241, \dots, 987\}$
 $B = \{123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 120, 132, 134, \dots, 940\}$
 $C = \{135, 137, 139, 153, 157, 159, \dots, 975\}$

14. Denominando T ao conxunto das persoas que ven televisión, R ao das que escoitan rádio e C ao das que acoden ao cinema, resulta o diagrama adxunto:

$$\begin{aligned} \text{card}(\bar{T} \cap \bar{R} \cap \bar{C}) &= 20, \quad \text{card}(T \cap \bar{R} \cap \bar{C}) = 22, \\ \text{card}[(T \cap \bar{R} \cap \bar{C}) \cup (\bar{T} \cap R \cap \bar{C}) \cup (\bar{T} \cap \bar{R} \cap C)] &= 60. \end{aligned}$$



15. $p[\text{suma} = 3, 4, 5] = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36}$
16. $p[\text{polo menos dúas cruces}] = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
17. $p[\text{obter cara}] = \frac{3}{4}$ e $p[\text{obter cruz}] = \frac{1}{4}$.
18. $p[\text{obter } 1] = \frac{1}{21}$, $p[\text{obter } 2] = \frac{2}{21}$, $p[\text{obter } 3] = \frac{3}{21}$, $p[\text{obter } 4] = \frac{4}{21}$,
 $p[\text{obter } 5] = \frac{5}{21}$, $p[\text{obter } 6] = \frac{6}{21}$, $p[\text{obter par}] = \frac{4}{7}$.
19. $p[\text{múltiplo de } 2] = \frac{1}{2}$, $p[\text{múltiplo de } 5] = \frac{1}{5}$, $p[\text{múltiplo de } 2 \text{ ou de } 5] = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$,
 $p[\text{múltiplo de } 2 \text{ e de } 5] = \frac{1}{10}$.
20. $p[\text{precisan intérprete}] = \frac{\binom{60}{1} \cdot \binom{20}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{60 \cdot 20}{\frac{100 \cdot 99}{2}} = \frac{8}{33}$
21. $p[\text{enferma}] = 0,6 + 0,5 - 0,2 = 0,9$; estarían enfermas un total de $450 \cdot 0,9 = 405$.
22. A diferenza está en deseñar un espazo mostral equiprobábel fronte a outro que non o sexa.
23. $p(A) = 0,8$, $p(B) = 0,9$, $p(A \cap B) = 0,7$, $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,3$, $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0$.
24. $p[\text{saber polo menos 2 temas}] = \frac{\binom{20}{2} \cdot 4 + \binom{20}{3}}{\binom{24}{3}} = \frac{475}{506}$
- $p[\text{non saber nengún}] = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{24}{3}} = \frac{1}{506}$
25. $p[\text{saber os 2 temas}] = \frac{1}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}$
26. $p[\text{acertar}] = \frac{1}{10.000}$, $p[\text{acertar / cifras distintas}] = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{120}$.

27. $p[\text{pleno ao 15}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3} = 3^{-15}$, $p[\text{fallar os 15}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$ (suporemos que a quiniela é un xogo puro de azar, cousa que non se axusta á realidade).

28. $p[6 \text{ acertos}] = \frac{1}{\binom{49}{6}}$; marcando 8 números a probabilidade é $p[6 \text{ acertos}] = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{49}{6}}$.

Neste caso son en total $\binom{8}{6} = 56$ apostas.

29. Os sucesos non son incompatíbeis xá que $p[\text{obter as e espada}] = \frac{1}{40} > 0$;

$$p[\text{obter as ou espada}] = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

30. $p[\text{obter polo menos unha copa}] = 1 - \frac{\binom{30}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{23}{52}$

31. $p[\text{extraer bóla amarela}] = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{13} + \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{13} = \frac{53}{91}$

32. $p[\text{extraer dúas bólas rosas}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{8}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{121}{765}$

$$p[\text{extraer dúas bólas de distinta cor}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 10}{\binom{18}{2}} = \frac{404}{765}$$

33. $p[\text{obter algún premio}] = 1 - \frac{\binom{97}{5}}{\binom{100}{5}} = \frac{4.657}{32.340}$

34. $p[\text{sair ileso}] = \left(\frac{2}{3}\right)^6$, $p[\text{ser embestido}] = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6$

35. $p(A/B) = \frac{3}{4}$ e $p(B/A) = \frac{1}{2}$

36. Se hai reempazo a probabilidade é $p[\text{extraer dúas brancas}] = \left(\frac{14}{30}\right)^2$; en caso

$$\text{contrário é } p[\text{extraer dúas brancas}] = \frac{\binom{14}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{14}{30} \cdot \frac{13}{29} = \frac{91}{435}$$

37. $p[\text{extraer dous cabalos}] = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$
38. Sen reposición: $p[1^a \text{ preta e } 2^a \text{ branca}] = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{45}$;
con reposición: $p[1^a \text{ preta e } 2^a \text{ branca}] = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{50}$.
39. Pista: $A \subset B \Rightarrow \exists A' / A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = B$.
40. Consiste en demostrar que a probabilidade de algún dos sucesos (por exemplo A) é distinta da probabilidade dese mesmo suceso condicionada polo outro (probabilidade de A condicionada por B).
41. Consiste en relacionar as probabilidades condicionadas dos contrários coas probabilidades de A e B .
42. $p(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$, $p(B) = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}$
43. $p[\text{o tratamento é eficaz}] = 1 - (1 - 0,9) \cdot (1 - 0,91) \cdot (1 - 0,92) = 0,99928$
44. $p[\text{acertar as dúas veces}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$,
 $p[\text{acertar polo menos unha vez}] = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} = \frac{7}{27}$
45. A e B son independentes xá que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{6} = p(A) \cdot p(B)$;
 B e C son dependentes porque $p(B) = \frac{1}{3}$, $p(C) = \frac{2}{9}$ e $p(B \cap C) = \frac{8}{15} \neq p(B) \cdot p(C)$;
 $p(A \cap B \cap C) = \frac{7}{90}$.
46. $p[\text{obter par}] = \frac{13}{18}$, $p[\text{obter 5}] = \frac{5}{54}$; a probabilidade é nula porque se se escolleu o terceiro dado é imposible obter un 3 .
47. $p[\text{ser muller e participar}] = \frac{1}{4}$, $p[\text{ser muller} / \text{participa}] = \frac{5}{9}$;
son sucesos compatíbeis xá que $p[\text{ser muller e participar}] \neq 0$;
son dependentes porque $p[\text{ser muller} / \text{participa}] \neq p[\text{ser muller}]$.
48. É un sorteo puramente aleatorio; por esta razón todos os números teñen exactamente a mesma probabilidade de resultar premiados. Ademais é un sorteo independente de anteriores sorteos, así que os sorteos precedentes non modifican en absoluto as probabilidades de nengún número en particular, aínda no caso de que tal número resultase premiado con anterioridade.
49. $p(M_1/D) = \frac{p(M_1 \cap D)}{p(D)} = \frac{p(M_1) \cdot p(D/M_1)}{p(M_1) \cdot p(D/M_1) + p(M_2) \cdot p(D/M_2) + p(M_3) \cdot p(D/M_3)} = \frac{1}{6}$

$$50. \quad p[\text{mesma cor}] = \frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2}; \quad p[\text{algũa branca}] = \frac{m^2 + 2mn}{(m+n)^2};$$

$$p[\text{nengũa branca}] = \frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

$$51. \quad p[\text{mesma cor}] = \frac{\binom{m}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{m+n}{2}}; \quad p[\text{algũa branca}] = \frac{\binom{m}{2} + mn}{\binom{m+n}{2}};$$

$$p[\text{nengũa branca}] = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{m+n}{2}}.$$

52. a) as suas probabilidades son iguais; b) $p[\text{non entregar prémio}] = \frac{1}{4}$; c) ao non haber boleto gañador no primeiro sorteo, o segundo sorteo é independente do anterior, así que a probabilidade é $\frac{3}{4}$; d) é o mesmo razoamento que no caso anterior; e) a probabilidade de que o prémio sexa entregado despois de realizar-se n sorteos como máximo é:

$$p[\text{entregar en } n \text{ sorteos}] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \dots + \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{3}{4^n} = 1 - \frac{1}{4^n};$$

para que esta probabilidade sexa superior ao 99% há de ser $n \geq 4$.

$$53. \quad X(E) = \{0, 1, 2, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{3}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, 4, \sqrt{17}, \sqrt{20}\}$$

$$54. \quad X(E) = \{10, 11, 12\};$$

$$X^{-1}(11) = \{\text{cabalo de ouros}, \text{cabalo de copas}, \text{cabalo de espadas}, \text{cabalo de bastos}\};$$

$$\text{card } X(E) = 3, \text{ logo é unha variábel discreta; } f(10) = f(11) = f(12) = \frac{1}{3}.$$

$$55. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } x=1 \text{ ou } x=4 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x=9 \text{ ou } x=16 \end{cases}$$

$$56. \quad X(E) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}; \quad p[X=8] = \frac{5}{36}; \quad p[X \leq 4] = \frac{1}{6}.$$

57. $p[X=75] = \frac{1}{12}$; a función de distribución F é unha función escalonada con valor 0 se $x < 71$, 1 se $x \geq 86$, de forma que cada salto ten unha altura $\frac{1}{12}$ maior que o anterior; a media é $\bar{X} = 78,5$.

$$58. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x \in [0, 1) \\ \frac{2}{3} & \text{se } x \in [1, 2) \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}; F(0,5) = \frac{1}{3}.$$

$$59. \frac{F(3) - F(1)}{F(5) + F(-1)} = 1$$

$$60. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in [1, 2) \\ \frac{5}{6} & \text{se } x \in [2, 3) \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$61. E = \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\} \quad \text{e} \quad X(E) = \{0, 1, 2, 3\};$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{se } x = 0 \\ \frac{3}{8} & \text{se } x = 1 \\ \frac{3}{8} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{8} & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{se } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in [1, 2) \\ \frac{7}{8} & \text{se } x \in [2, 3) \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}; \text{ é unha variábel discreta;}$$

$$\bar{X} = 1,5, \quad V(X) = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$62. f(x) = \begin{cases} 0,3 & \text{se } x = 1 \\ 0,4 & \text{se } x = 2 \\ 0,3 & \text{se } x = 5 \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 0,3 & \text{se } x \in [1, 2) \\ 0,7 & \text{se } x \in [2, 5) \\ 1 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}.$$

$$63. X(C) = 1 \quad \text{e} \quad X(+) = -1; \quad f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{se } x = -1 \\ 0,5 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases}; \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ 0,5 & \text{se } x \in [-1, 1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

$$64. f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16} & \text{se } x = 1 \\ \frac{5}{16} & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{3}{16} & \text{se } x \in [1, 2) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in [2, 3) \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}; \quad \bar{X} = 2,3125, \quad V(X) = 0,590 \quad \text{e} \\ \sigma_X = 0,768.$$

65. $X(\text{duas caras}) = -5$, $X(\text{duas cruces}) = 10$, $X(\text{unha cara e unha cruz}) = -3$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x = -5 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = -3 \\ \frac{1}{4} & \text{se } x = 10 \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -5 \\ \frac{1}{4} & \text{se } x \in [-5, -3) \\ \frac{3}{4} & \text{se } x \in [-3, 10) \\ 1 & \text{se } x \geq 10 \end{cases};$$

a média é $\mu(X) = \frac{1}{4} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{4} \cdot 10 = \frac{-5-6+10}{4} = -\frac{1}{4}$, logo é un xogo perdedor.

66. $\bar{X} = 0,75$, $V(X) = \frac{3}{16}$ e $\sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

67. $p\left[X \leq \frac{11}{3}\right] = \frac{5}{3}$, $\mu(X) = 2,5$, $\sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

68. $p[X \leq 1] = F(1) = \frac{1}{3}$, $\mu(X) = 1,5$, $\sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

69. O valor de k para que f sexa unha función de densidade é $k = \frac{1}{2}$, logo

$$p[1 \leq X \leq 2] = \frac{1}{4}, \quad \mu(X) = \frac{7}{3}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

70. $a = \frac{3}{2}$, $\mu(X) = \frac{7}{3}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{3}$

71. O valor de k para que f sexa unha función de densidade é $k = \frac{e^2}{e^2-1}$ e a média é

$$\mu(X) = \frac{e^2-3}{e^2-1} \approx 0,687 \text{ anos.}$$

72. $k = \frac{5}{6}$ e $p[X < 1]$.

73. $c = \frac{1}{\pi}$, $F(x) = \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

74. $f(x) = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} \quad \forall x = 0, 1, 2, 3, 4$

75. Se X representa o número de vitorias de A , temos unha distribución binomial $B(7, 0.4)$ e pide-se $p[X=3] = f(3) = \binom{7}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^4$.

76. $p[X \geq 3] = f(3) + f(4) + f(5) = \binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^0 =$
 $= \left[\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \right] \cdot 0,5^5 = 0,5$

77. Se X representa o número de fillas, temos unha distribución binomial $B(5, 0.5)$:

$$p[X=3]=f(3)=\binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 = \frac{5}{16}.$$

$$p[X \geq 1] = 1 - p[X=0] = 1 - f(0) = \binom{5}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 = 2^{-5}.$$

78. Se X representa o número de fillos, temos unha distribución binomial $B(6, 0.45)$:

a) $p[X=0]=f(0)=\binom{6}{0} \cdot 0,45^0 \cdot 0,55^6 = 0,55^6$; b) $p[X=3]=f(3)=\binom{6}{3} \cdot 0,45^3 \cdot 0,55^3$;

c) $p[X > 3] = f(4) + f(5) + f(6) = \binom{6}{4} \cdot 0,45^4 \cdot 0,55^2 + \binom{6}{5} \cdot 0,45^5 \cdot 0,55^1 + \binom{6}{6} \cdot 0,45^6 \cdot 0,55^0$.

79. Se X representa o número de libros defectuosos, temos unha binomial $B(15, 0.01)$ e

píde-se $p[X=2]=f(2)=\binom{15}{2} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{13}$.

80. Se X representa o número de caras, temos $p[\text{obter cara}]=0,75$ e $p[\text{obter cruz}]=0,25$, logo é unha binomial $B(5, 0.75)$:

a) $p[X=2]=f(2)=\binom{5}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^3$;

b) $p[X \leq 2] = f(0) + f(1) + f(2) = \binom{5}{0} \cdot 0,75^0 \cdot 0,25^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,75^1 \cdot 0,25^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^3$;

c) $p[X > 3] = f(4) + f(5) = \binom{5}{4} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^0$.

81. Se identificamos X co número de bólas pretas, temos unha binomial $B(16, 0.5)$ e

$$p[X=7]=f(7)=\binom{16}{7} \cdot 0,5^7 \cdot 0,5^9 = \binom{16}{7} \cdot 0,5^{12}.$$

82. O número de latas defectuosas é unha binomial $B(2.000, 0.05)$, e polo tanto a media é $\mu(X)=100$ e a desviación típica é $\sigma(X)=\sqrt{95}$.

83. Os acertos de A e B seguen distribucións binomiais $B\left(5, \frac{2}{3}\right)$ e $B\left(4, \frac{4}{5}\right)$, con medias

$$\mu(X_A)=\frac{10}{3} \text{ e } \mu(X_B)=\frac{16}{5}, \text{ e desviacións típicas } \sigma(X_A)=\frac{\sqrt{10}}{3} \text{ e } \sigma(X_B)=\frac{4}{5},$$

respectivamente.

84. Se a variábel X representa o número de pezas defectuosas, temos unha binomial $B(1.000, 0.03)$ de media $\mu(X)=30$ e desviación típica $\sigma(X)=\sqrt{29,1}$.

85. O número de latas non comercializábeis é unha binomial $B(20.000, 0.015)$ e o número de latas non comercializábeis por día é $\mu(X)=300$, con desviación típica $\sigma(X)=\sqrt{295,5}$.

86. A probabilidade de que un estudante do grupo padeza cáries é $p=\frac{3}{22}$, e polo tanto

o número de estudantes con cáries é unha binomial $B\left(4, \frac{3}{22}\right)$;

$$p[X=2]=f(2)=\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{3}{22}\right)^2 \cdot \left(\frac{19}{22}\right)^2.$$

87. O número de doentes para quen resultou eficaz o tratamento é unha binomial $B(15, 0,8)$ e a probabilidade pedida é:

$$p[X \geq 6] = 1 - [f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^{13} + \dots + \binom{15}{5} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^{10} \right]$$
88. $p[35 \leq X \leq 39] = p[-1,67 \leq Z \leq -0,33] = p[0,33 \leq Z \leq 1,67] = F(1,67) - F(0,33)$
89. $p[30 \leq X \leq 40] = p[1,25 \leq Z \leq 2,50] = F(2,50) - F(1,25)$
90. $p[10 \leq X \leq 20] = p[-2 \leq Z \leq 1,5] = F(1,50) - F(-2) = F(1,50) - [1 - F(2)] = F(1,50) + F(2) - 1$
91. $p[X \leq 7] = p[Z \leq 1] = F(1)$
92. $p[-0,4 \leq X \leq 1] = F(1) - F(-0,4) = F(1) - [1 - F(0,4)] = F(1) + F(0,4) - 1$,
 $p[-1,5 \leq X \leq 0] = p[0 \leq X \leq 1,5] = F(1,5) - 0,5$
93. $p[X \leq 2,3] = F(2,3)$; $p[0,7 \leq X \leq 1,6] = F(1,6) - F(0,7)$.
94. $p[1 \leq X \leq 10] = p[0 \leq Z \leq 4,5] = F(4,5) - F(0) = F(4,5) - 0,5$;
 $p[-7 \leq X \leq 9] = p[-4 \leq Z \leq 4] = F(4) - F(-4) = F(4) - [1 - F(4)] = 2 \cdot F(4) - 1$.
95. $p[X \geq 5] = p[Z \geq 0] = 0,5 = 50\%$;
 $p[5 \leq X \leq 6] = p[0 \leq Z \leq 0,33] = F(0,33) - F(0) = F(0,33) - 0,5$;
 $p[6 \leq X \leq 7] = p[0,33 \leq Z \leq 0,67] = F(0,67) - F(0,33)$.
96. $p[X < 1,65] = p[Z < 0,5] = F(-0,5) = 1 - F(0,5)$;
 $p[X > 2] = p[Z > 0,67] = 1 - p[Z \leq 0,67] = 1 - F(0,67)$.
97. $p[X > 5] = p[Z > -1] = 1 - p[Z \leq -1] = 1 - F(1)$
98. $p[X > 6] = p[Z > -0,5] = 1 - p[Z \leq -0,5] = 1 - F(0,5)$; $p[X < 7] = p[Z < 1] = F(1)$,
 $p[5 \leq X \leq 8] = p[0 \leq Z \leq 1,5] = F(1,5) - 0,5$.
99. $p[X > 70] = p[Z > 1,25] = 1 - p[Z \leq 1,25] = 1 - F(1,25)$,
 $p[X < 50] = p[Z < -3,75] = 1 - p[Z \leq 3,75] = 1 - F(3,75)$,
 $p[60 \leq X \leq 68] = p[-1,25 \leq Z \leq 0,75] = F(0,75) - (1 - F(1,25)) = F(0,75) + F(1,25) - 1$,
 67% .
100. $p[95 \leq X \leq 100] = p[-0,33 \leq Z \leq 0,67] = F(0,67) - (1 - F(0,33)) = F(0,67) + F(0,33) - 1$;
 $p[100 - k \leq X \leq 100 + k] \geq 0,5 \Rightarrow k = 10,2$, logo o intervalo é $[89,8, 110,2]$;
 $p[X > 125] = p[Z > 1,67] = 1 - p[Z \leq 1,67] = 1 - F(1,67)$.
101. $p[X > 6,5] = p[Z > 0,4] = 1 - p[Z \leq 0,4] = 1 - F(0,4)$.
102. $p[X < 365] = p[Z < 1,5] = F(1,5)$; o número de lámpadas será o produto desta probabilidade pola produción total; $p[X > 401] = p[Z > 2,4] = 1 - p[Z \leq 2,4] = 1 - F(2,4)$.
103. $p[12 \leq X \leq 17] = p[-0,5 \leq Z \leq 0,75] = F(0,75) - (1 - F(0,5)) = F(0,75) + F(0,5) - 1$, logo haberá 232 persoas asociadas entre 12 e 17 anos;
 $p[X \geq 18] = p[Z \geq 1] = 1 - p[Z < 1] = 1 - F(1)$, así que 79 serán maiores de 18 anos.
104. Categoría extra: $p[X \geq 62] = p[Z \geq 0,57] = 1 - p[Z < 0,57] = 1 - F(0,57)$;
categoría 1ª: $p[55 \leq X < 62] = p[-0,43 \leq Z < 0,57] = F(0,57) + F(0,43) - 1$;
categoría 2ª: $p[X < 55] = p[Z < -0,43] = 1 - p[Z \leq 0,43] = 1 - F(0,43)$.

105. Se X é a variábel aleatoria que representa o erro cometido, entón:
 $p[-1 < X < 1] = p[-0,5 < Z < 0,5] = 2F(0,5) - 1 = 0,383$; se Y é a variábel que representa o número de pesadas con erro inferior a 1 g (por exceso ou defeito), entón: $p[Y \geq 1] = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0,383^0 \cdot 0,617^3$, xá que $Y \in B(3, 0,383)$.
106. Como binomial é: $p[4 \leq X \leq 6] = \binom{12}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,6^8 + \binom{12}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,6^7 + \binom{12}{6} \cdot 0,5^6 \cdot 0,6^6$;
 aproximación normal: $p[3,5 \leq X < 6,5] = p[-1,44 \leq Z < 0,29] = F(0,29) + F(1,44) - 1$.
107. Aproximando a unha normal $N(160, \sqrt{80})$ obtemos:
 $p[79,5 \leq X \leq 140,5] = p[-9 \leq Z \leq -2,18] = F(9) - F(2,18)$.