

1. O ESPAZO VECTORIAL DOS VECTORES LIBRES

Exames e Textos de Matemática
de Pepe Sacau ten unha licenza
[Creative Commons Atribución](#)
[Compartir igual 4.0 Internacional](#)



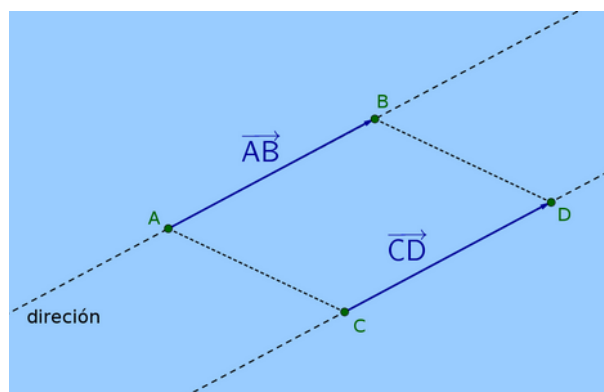
1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR LIBRE

Def 1 Define-se un vector fixo $\overrightarrow{AB}$ do espazo tri-dimensional como unha flecha orientada, que ten orixe no punto A e extremo no punto B . O vector fixo posúe tres características, que son:

- módulo do vector: é a lonxitude da flecha e indica-se por $|\overrightarrow{AB}|$;
- dirección do vector: é a recta do espazo que contén a flecha, ou calquer outra recta paralela a esta;
- sentido do vector: enténdese por tal cada unha das dúas posibilidades de percorrer a recta que determina a dirección do vector.

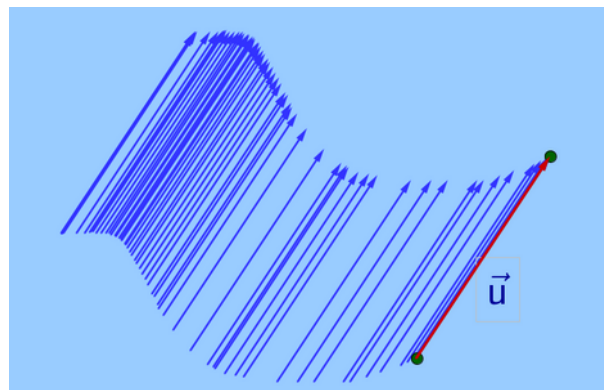
O vector que ten orixe e extremo coincidentes, chama-se vector nulo. Este vector ten módulo cero e carece de dirección e sentido.

Di-se que dous vectores fixos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes : $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ teñen o mesmo módulo, dirección e sentido. Tal relación de equipolencia indica-se da forma $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.



Def 2 Define-se un vector libre $[\overrightarrow{AB}]$ como o conxunto de todos os vectores fixos que son equipolentes ao vector fixo $\overrightarrow{AB}$, é dicir, o conxunto de todos os vectores fixos que, independentemente da súa posición no espazo (orixe e extremo), teñen igual módulo, dirección e sentido que o propio $\overrightarrow{AB}$. Cada elemento deste conxunto que denominamos vector libre é un representante do vector libre $[\overrightarrow{AB}]$. Así, dous vectores fixos equipolentes determinan o mesmo vector libre.

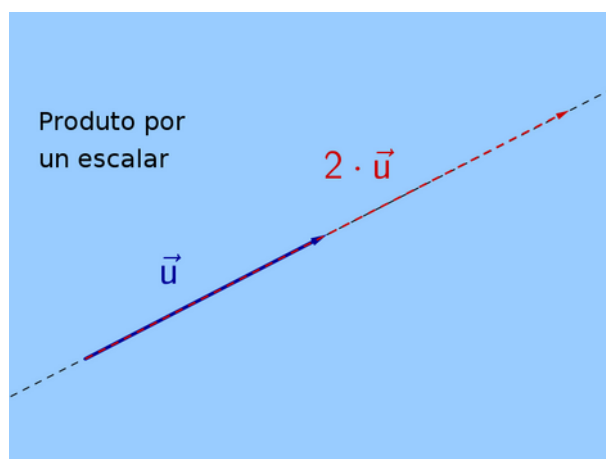
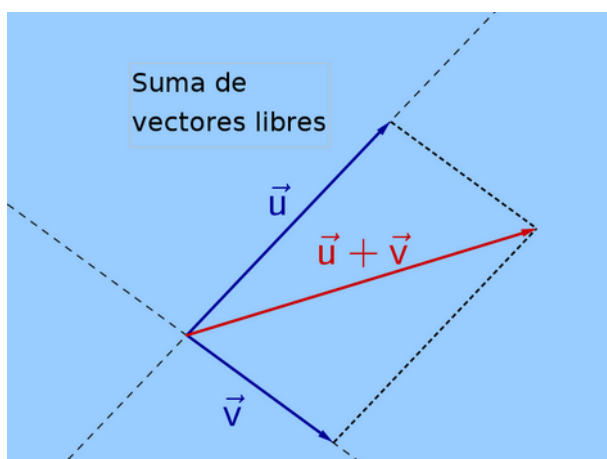
Designaremos por V_3 ao conxunto dos vectores libres do espazo, e de agora en diante falaremos simplemente de vectores para referir-nos aos vectores libres, agás que se especifique o contrario. Para evitar particularizar un vector libre en algún dos seus representantes, designaremos os vectores libres da forma $\vec{u}$ ou similar.



1.2. O ESPAZO VECTORIAL DOS VECTORES LIBRES

O conxunto V_3 está dotado dunha estrutura de espazo vectorial, definindo as seguintes operacións:

- Suma de vectores libres: esta operación define-se de forma gráfica, utilizando a "regra do paralelogramo".
- Produto dun escalar por un vector libre: o produto dun escalar $\alpha \neq 0$ por un vector $\vec{u}$, define-se como outro vector que ten as seguintes características: igual dirección que $\vec{u}$, o mesmo sentido que $\vec{u}$ se $\alpha > 0$ e sentido contrario se $\alpha < 0$ e módulo $|\alpha|$ veces o módulo de $\vec{u}$. Se $\alpha = 0$, o produto $\alpha \cdot \vec{u}$ é o vector nulo, que non ten dirección nin sentido, e ten módulo 0.

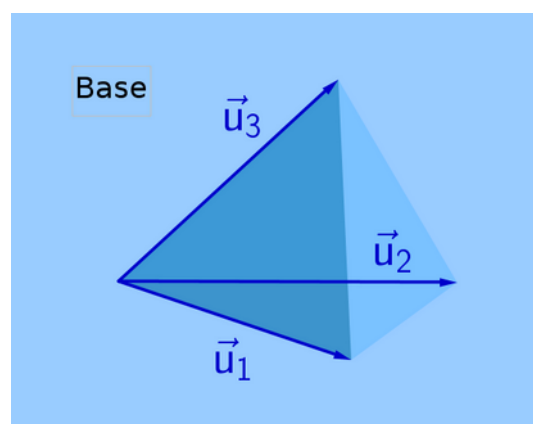


Pode demostrarse sen dificultade que estas dúas operacións, definidas de forma gráfica, cumpren as propiedades requiridas para conformar un espazo vectorial, chamado espazo vectorial dos vectores libres do espazo.

Def 3 Un conxunto B formado por tres vectores non co-planares forman o que se denomina unha base do espazo V_3 . A idea de base implica dúas condicións:

- B é un conxunto linearmente independente;
- B é un conxunto xerador, é dicir, calquer vector do espazo V_3 é combinación linear dos vectores de B .

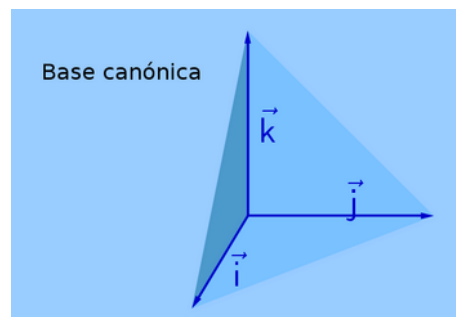
Polo tanto, se o conxunto $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é unha base de V_3 , entón calquer vector $\vec{u}$ poderá obter-se como combinación linear dos seus vectores, ou sexa, existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$. Os escalares (x, y, z) chaman-se coordenadas do vector $\vec{u}$ a respecto da base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.



É inmediato demostrar que as coordenadas dun vector son únicas para cada base que se manexa: supoñamos que o vector $\vec{u}$ ten como coordenadas (x, y, z) e tamén (x', y', z') , a respecto dunha base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Isto significa que $\vec{u} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$ e tamén que $\vec{u} = x' \cdot \vec{u}_1 + y' \cdot \vec{u}_2 + z' \cdot \vec{u}_3$. Se restamos ambas expresións resulta $(x - x') \cdot \vec{u}_1 + (y - y') \cdot \vec{u}_2 + (z - z') \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$. Pero como os vectores da base B forman un conxunto independente, a única posibilidade de obter o vector nulo a partir deles é que sexan nulos os escalares, é dicir: $x - x' = y - y' = z - z' = 0$, que equivale a afirmar que $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$.

A conclusión é que dada unha base e un vector libre, existe unha única forma de obter tal vector como combinación linear da base, é dicir, o vector ten coordenadas únicas a respecto da base escollida. Isto permite-nos identificar cada vector coas súas coordenadas a respecto dunha base pré-fixada. Así, se temos unha base B e un vector $\vec{u}$ que ten por coordenadas (x, y, z) , diremos simplemente que $\vec{u} = (x, y, z)$.

En particular, se os vectores da base son unitarios (de módulo 1) e perpendiculares entre si (ortogonais), díse que é unha base ortonormal. Unha base destas características é a que usaremos habitualmente, agás que se indique o contrario, e referiremo-nos a ela como a base canónica do espazo vectorial V_3 . Esta base está formada por tres vectores $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, unitarios e ortogonais, e representaremo-la como se indica no gráfico adxunto.



Expresados nunha base calquer, a suma de vectores e o produto dun vector por un escalar toman a seguinte forma:

i. Suma de vectores libres

Se $\vec{u} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$ e $\vec{v} = x' \cdot \vec{u}_1 + y' \cdot \vec{u}_2 + z' \cdot \vec{u}_3$, entón o vector suma será:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3) + (x' \cdot \vec{u}_1 + y' \cdot \vec{u}_2 + z' \cdot \vec{u}_3) = (x + x') \cdot \vec{u}_1 + (y + y') \cdot \vec{u}_2 + (z + z') \cdot \vec{u}_3.$$

Expresado en termos de coordenadas: se $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (x', y', z')$, entón $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$.

ii. Produto dun escalar por un vector libre

Se $\vec{u} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto resulta:

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3) = (\alpha \cdot x \cdot \vec{u}_1 + \alpha \cdot y \cdot \vec{u}_2 + \alpha \cdot z \cdot \vec{u}_3)$$

Usando coordenadas resulta: se $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, entón $\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$.

Ex 1 Dados os vectores $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (4, -1, -2)$, expresados a respecto da base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, obter as coordenadas do vector $\vec{w} = 4 \cdot \vec{u} - \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$. Se os vectores da base B son $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$ e $\vec{u}_3 = (0, 1, -1)$ a respecto da base canónica, obter as coordenadas do vector $\vec{w}$ a respecto desta mesma base.

A respecto da base B o vector será $\vec{w} = 4 \cdot \vec{u} - \frac{1}{2} \cdot \vec{v} = 4 \cdot (-1, 2, 0) - \frac{1}{2} \cdot (4, -1, -2) = (-4, 8, 0) - (2, -\frac{1}{2}, -1) = (-6, \frac{17}{2}, 1)$.

Se queremos obter as coordenadas deste mesmo vector a respecto da base canónica abonda con interpretar o concepto de coordenadas; deste xeito temos: $\vec{w} = (-6, \frac{17}{2}, 1) = -6 \cdot \vec{u}_1 + \frac{17}{2} \cdot \vec{u}_2 + 1 \cdot \vec{u}_3 =$

$$= -6 \cdot (1, -1, 0) + \frac{17}{2} \cdot (-1, 0, 1) + 1 \cdot (0, 1, -1) = (-6, 6, 0) + \left(-\frac{17}{2}, 0, \frac{17}{2}\right) + (0, 1, -1) = \left(-\frac{29}{2}, 7, \frac{15}{2}\right)$$

Así que o vector $\vec{w}$ poderá expresarse como $\vec{w} = (-6, \frac{17}{2}, 1)$ a respecto da base B e como $\vec{w} = (-\frac{29}{2}, 7, \frac{15}{2})$ a respecto da base canónica.

2. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES LIBRES

2.1. DEFINICIÓN E PROPIEDADES

Def 4 Dados dous vectores libres $\vec{u}$ e $\vec{v}$, define-se o produto escalar da seguinte forma:

$$V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} := |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

O produto escalar posúe as seguintes propiedades:

i. Definida positiva: $\forall \vec{u} \in V_3 \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$; e ademais $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

ii. Comutativa: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

iii. Homoxénea: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \cdot \vec{v})$.

iv. Distributiva a respecto da suma de vectores libres:

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3 \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

v. Ortogonalidade: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \quad \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2.2. EXPRESIÓN ANALÍTICA

As propiedades descritas anteriormente permiten obter unha fórmula para o cálculo do produto escalar de dous vectores a partir das súas expresións en coordenadas a respecto dunha base de V_3 .

Sexan os vectores $\vec{u} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$ e $\vec{v} = x' \cdot \vec{u}_1 + y' \cdot \vec{u}_2 + z' \cdot \vec{u}_3$, ou equivalentemente $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (x', y', z')$, expresados na base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

E usando as propiedades anteriores resulta: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x \vec{u}_1 + y \vec{u}_2 + z \vec{u}_3) \cdot (x' \vec{u}_1 + y' \vec{u}_2 + z' \vec{u}_3) =$
 $= xx' \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + xy' \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + xz' \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 + yx' \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + yy' \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 + yz' \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 + zx' \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 + zy' \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 + zz' \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3$

No caso de que a base utilizada sexa a canónica $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, a fórmula reduce-se a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, xá que os produtos $\vec{i} \cdot \vec{j}$, $\vec{i} \cdot \vec{k}$ e $\vec{j} \cdot \vec{k}$ son nulos e os produtos $\vec{i} \cdot \vec{i}$, $\vec{j} \cdot \vec{j}$ e $\vec{k} \cdot \vec{k}$ son 1. Esta fórmula coñece-se como expresión analítica do produto escalar a respecto dunha base ortonormal.

A expresión analítica a respecto dunha base ortonormal permite desenvolver os seguintes procedementos:

i. Cálculo do módulo dun vector: xá que $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$, se $\vec{u} = (x, y, z)$, entón $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ii. Normalización dun vector: se $\vec{u} = (x, y, z)$, entón o vector $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot (x, y, z)$ é un vector unitario (de módulo 1).

iii. Cálculo do ángulo determinado por dous vectores: se $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (x', y', z')$ entón $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$.

iv. Ortogonalidade de vectores: se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son vectores non nulos, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$.

2.3. INTERPRETACIÓN XEOMÉTRICA

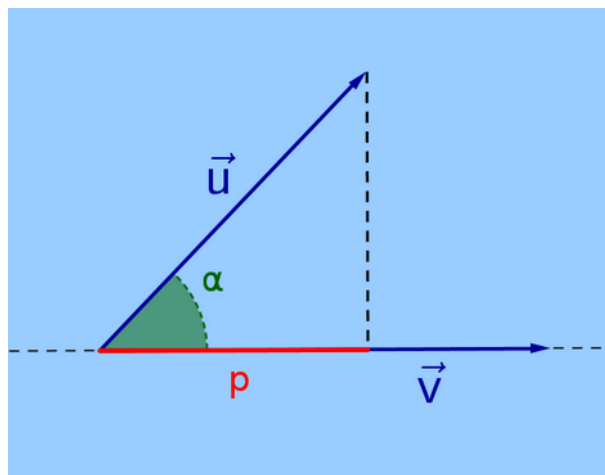
Se denominamos p á proxección ortogonal do vector $\vec{u}$ sobre o vector $\vec{v}$, resulta que:

$$p = |\vec{u}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Ao multiplicar polo módulo de $\vec{v}$ obtén-se:

$$|\vec{v}| \cdot p = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

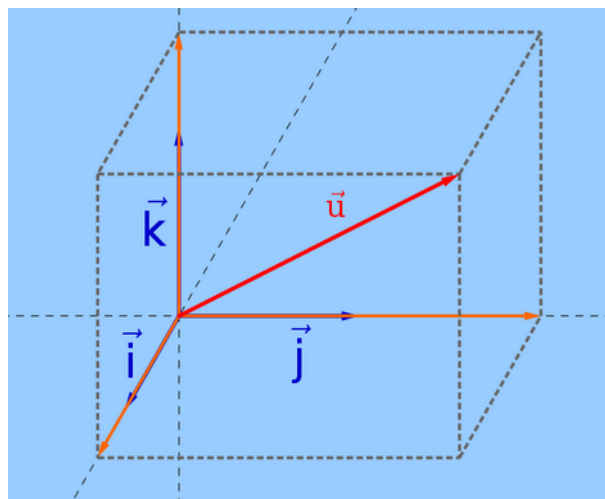
Logo a proxección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é $p = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$.



Se ademais o vector $\vec{v}$ fose unitário, entón a proxección será $p = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Se $\vec{u} = (x, y, z)$ son as coordenadas dun vector a respecto da base canónica $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e calculamos o produto escalar de $\vec{u}$ por cada un dos vectores da base, obtemos respectivamente as tres coordenadas de $\vec{u}$. Cada unha delas representa, polo tanto, a proxección de $\vec{u}$ sobre cada un dos vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$:

$$x = \vec{u} \cdot \vec{i}, \quad y = \vec{u} \cdot \vec{j} \quad \text{e} \quad z = \vec{u} \cdot \vec{k}$$



Ex 2 Dados os vectores $\vec{u} = (5, -2, 3)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$, expresados a respecto da base canónica, obter o seu produto escalar, os seus módulos, o ángulo que forman e a proxección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. Obter un vector unitário de igual dirección que $\vec{u}$ e sentido contrário.

Ao estar expresados a respecto da base canónica o produto escalar é:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (5, -2, 3) \cdot (1, 0, 1) = 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 5 + 3 = 8.$$

Os módulos son $|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$ e $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

O ángulo será: $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{8}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{76}} = \frac{4\sqrt{19}}{19}$, logo é un ángulo agudo por ter coseno positivo.

A proxección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é $p = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

O vector unitário de igual dirección e sentido oposto obtén-se facendo $-\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{38}} \cdot (5, -2, 3) = \left(-\frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{2}{\sqrt{38}}, -\frac{3}{\sqrt{38}}\right)$.

Ex 3 Obter as proxeccións do vector $\vec{u} = (-4, 2, -1)$ sobre os vectores da base canónica.

Como a base canónica está formada por vectores unitários, as proxeccións obteñen-se simplemente multiplicando escalarmente o vector $\vec{u}$ por cada un dos vectores da base:

$$p_x = (-4, 2, -1) \cdot (1, 0, 0) = -4, \quad p_y = (-4, 2, -1) \cdot (0, 1, 0) = 2 \quad \text{e} \quad p_z = (-4, 2, -1) \cdot (0, 0, 1) = -1$$

Evidentemente obtemos as coordenadas x , y e z do propio vector $\vec{u}$

3. PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES LIBRES

3.1. DEFINICIÓN, PROPIEDADES E EXPRESIÓN ANALÍTICA

Def 5 Dados dous vectores libres $\vec{u}$ e $\vec{v}$, define-se o produto vectorial da seguinte forma:

$V_3 \times V_3 \rightarrow V_3$
 $(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \vec{u} \times \vec{v}$, onde $\vec{u} \times \vec{v}$ é un vector que ten as seguintes características:

- Módulo de $\vec{u} \times \vec{v}$: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\vec{u}, \vec{v})$.
- Direción de $\vec{u} \times \vec{v}$: perpendicular ao plano determinado polos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$: o sentido do vector $\vec{u} \times \vec{v}$ ven indicado pola "regra do desparafusador" ou tamen "da man direita".

No caso de que algún dos vectores sexa o vector nulo, ou ben se os vectores forman un conxunto linearmente dependente, entón $\vec{u} \times \vec{v}$ é o vector nulo.

O produto vectorial posúe as seguintes propiedades:

- Anti-comutativa**: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \quad \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
- Homoxénea**: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v})$.
- Distributiva a respecto da suma**: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3 \quad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

Se traballamos nunha base ortonormal e as coordenadas dos vectores son $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (x', y', z')$, entón o produto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ obtén-se calculando o determinante

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

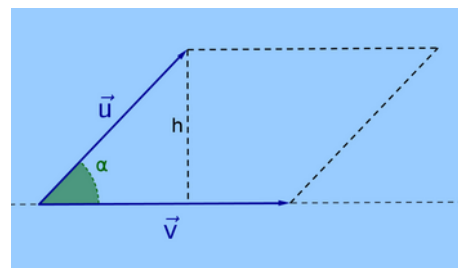
3.2. INTERPRETACIÓN XEOMÉTRICA

Dous vectores libres $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinan un paralelogramo. A súa área A obterá-se como o produto da lonxitude da base b pola altura h . A lonxitude da base é o módulo do vector $\vec{v}$ e a altura é o produto do módulo de $\vec{u}$ polo seno do ángulo que determinan ambos vectores, logo:

$A = b \cdot h = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|$. Así, a área do paralelogramo determinado polos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o módulo do produto vectorial de ambos.

Como consecuencia inmediata disto, a área do triángulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ será:

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|.$$



Ex 4 Obter dous vectores unitarios e ortogonais a $\vec{u} = (2, -2, -1)$ e $\vec{v} = (-3, 0, 4)$ e a área do triángulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

O produto escalar $\vec{u} \times \vec{v}$ dá por definición un vector perpendicular a ambos; logo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 5\vec{j} - 6\vec{k} \equiv (-8, -5, -6)$$

O módulo deste vector é $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-8)^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{125}$; logo os dous vectores pedidos son $\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{125}} \cdot (-8, -5, -6)$ e $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{125}} \cdot (8, 5, 6)$.

A área do triángulo determinado polos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{\sqrt{125}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

4. PRODUTO MISTO DE TRÉS VECTORES LIBRES

4.1. DEFINICIÓN, PROPIEDADES E EXPRESIÓN ANALÍTICA

Def 6 O produto misto de três vectores define-se da seguinte forma:

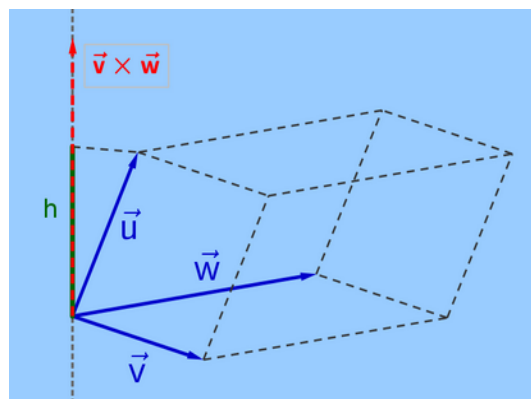
$$\begin{aligned} V_3 \times V_3 \times V_3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &\rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \end{aligned}$$

Esta operación posúe as propiedades seguintes:

- Permutación de vectores:** $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$
- Rotación de vectores:** $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$
- Homoxénea:**
 $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad [\alpha \cdot \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha \cdot \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha \cdot \vec{w}] = \alpha \cdot [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
- Distributiva a respecto da suma de vectores:**
 $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w} \in V_3 \quad [\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$
- Co-planariedade de vectores:** $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3 \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{O} \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow$ o conxunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente dependente $\Leftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é un conxunto de vectores co-planares.

Se os vectores teñen coordenadas $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ e $\vec{w} = (x'', y'', z'')$, a respecto dunha base ortonormal, entón o produto misto obtén-se como un determinante:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$



4.2. INTERPRETACIÓN XEOMÉTRICA

Trés vectores non co-planares determinan un paralelepípedo. O seu volume V é o produto da área A da súa base pola altura h . Xá que a base da figura está determinada polos vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, a área é o módulo do produto vectorial $|\vec{v} \times \vec{w}|$. A altura do paralelepípedo é a proxección do vector $\vec{u}$ sobre o vector $\vec{v} \times \vec{w}$, que é perpendicular á base:

$$h = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}{|\vec{v} \times \vec{w}|}. \text{ Logo o volume será: } V = A \cdot h = |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \frac{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

Ademais, o tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é a sexta parte do paralelepípedo, polo tanto o seu volume é $V_t = \frac{1}{6} \cdot [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

[Nota: As expresións que dan o volume han de tomar-se en valor absoluto, para obter volumes positivos.]

Ex 5 Estudar se os vectores $\vec{u} = (-1, 4, 0)$, $\vec{v} = (5, 1, -1)$ e $\vec{w} = (0, -3, 3)$ determinan un tetraedro e, en caso afirmativo, calcular o seu volume.

O produto misto dos tres vectores é $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$, e polo tanto, non son vectores coplanares, así que determinan un tetraedro.

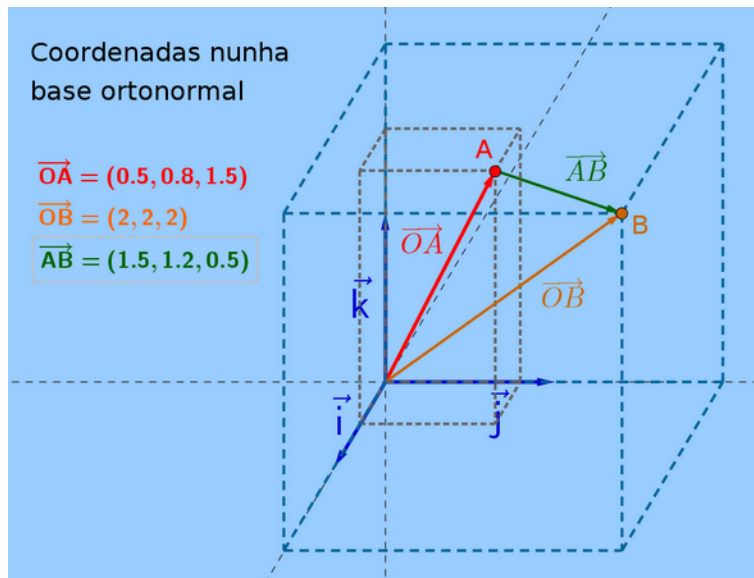
$$\text{O seu volume será } V = \frac{1}{6} \cdot [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \frac{60}{6} = 10 \text{ u}^3.$$

5. O ESPAZO AFÍN

5.1. COORDENADAS DUN PONTO

Entendemos por espazo afín tri-dimensional E^3 o conxunto formado polos puntos, rectas e planos no espazo clásico de tres dimensións. Para realizar o estudo deste espazo é necesario identificar esas figuras mediante ecuacións. Con esta fin, imos dotar ao conxunto E^3 dun sistema de referencia, que consiste no seguinte: escolleremos un punto O que será a orixe de referencia e unha base ortonormal $C=\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, tal e como foi descrita no inicio do tema. O conxunto formado por estes catro elementos $R=\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é un sistema de referencia ortonormal do espazo afín tri-dimensional.

Dado calquer punto A de E^3 , podemos obter o vector $\vec{OA}$, que ten a súa orixe en O e extremo en A . Este vector chama-se vector de posición do punto A . O vector $\vec{OA}$, contemplado como vector libre, pode expresarse como combinación linear dos vectores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, da forma $\vec{OA}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$. Os escalares x , y e z son as coordenadas do vector $\vec{OA}$ a respecto da base $C=\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; así, diremos que (x, y, z) son as coordenadas do punto A a respecto do sistema de referencia $R=\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



Conforme este modelo, dados dous puntos A e B , de coordenadas $A(x_0, y_0, z_0)$ e $B(x_1, y_1, z_1)$ o vector $\vec{AB}$ é a diferenza entre os vectores de posición $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ e polo tanto $\vec{AB}=(x_1-x_0)\cdot\vec{i}+(y_1-y_0)\cdot\vec{j}+(z_1-z_0)\cdot\vec{k}$, ou o que é o mesmo, o vector $\vec{AB}$ ten coordenadas $\vec{AB}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$.

Ex 6 Dado o paralelogramo $ABCD$, no que se coñecen os vértices $A(-1, 3, 4)$, $B(2, -2, 0)$ e $C(1, 0, 3)$, obter as coordenadas do vértice D , as coordenadas do punto medio do lado $\overline{AB}$ e as coordenadas do punto de corte das dúas diagonais.

Os lados $\overline{BA}$ e $\overline{CD}$ son iguais, e polo tanto tamén son iguais os vectores $\vec{BA}$ e $\vec{CD}$. Así que as coordenadas do punto D serán as coordenadas do seu vector de posición $\vec{OD}$, que se pode obter vectorialmente como:
 $\vec{OD}=\vec{OC}+\vec{CD}=\vec{OC}+\vec{BA}=(1, 0, 3)+(-3, 5, 4)=(-2, 5, 7)$; logo $D(-2, 5, 7)$.

O punto medio M do lado $\overline{AB}$ obtén-se do xeito:

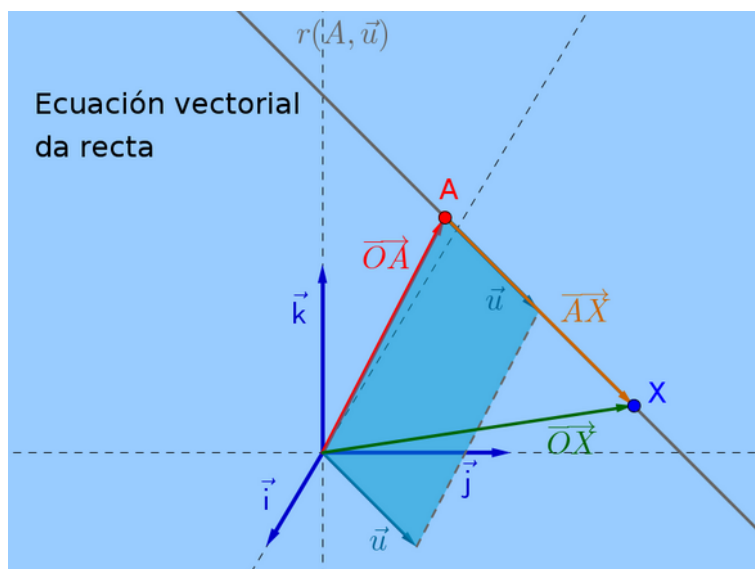
$$\vec{OM}=\vec{OB}+\frac{1}{2}\cdot\vec{BA}=(2, -2, 0)+\frac{1}{2}\cdot(-3, 5, 4)=(2, -2, 0)+\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right); \text{ polo tanto } M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right).$$

O punto de corte das diagonais será $\vec{OG}=\vec{OA}+\frac{1}{2}\cdot\vec{AC}=(-1, 3, 4)+\frac{1}{2}\cdot(2, -3, -1)=(-1, 3, 4)+\left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)=\left(0, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, logo $G\left(0, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

5.2. ECUACIONES DA RECTA

Unha recta r fica completamente determinada se identificamos algún punto que pertenza a ela e a súa dirección. Se $A(x_0, y_0, z_0) \in r$ e $\vec{u}=(a, b, c)$ é un vector que indica a dirección de r , di-se que $r(A, \vec{u})$ é unha determinación linear da recta r . Partindo desta determinación a ecuación vectorial da recta é: $\vec{OX} = \vec{OA} + t \cdot \vec{u}$, ou de xeito equivalente:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$



Nesta ecuación (x, y, z) son as coordenadas de calquer punto X (ponto xenérico) de r , (x_0, y_0, z_0) son as coordenadas do punto A , (a, b, c) son as coordenadas do vector director $\vec{u}$ e t é un parámetro que toma valores libremente no conxunto $\mathbb{R}$.

O desglose da ecuación vectorial dá as ecuacións paramétricas da recta: $r \equiv \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$.

Ao resolver o parámetro t nas ecuacións paramétricas e igualar obtemos a ecuación continua: $r \equiv \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

Por último, se tomamos dúas das igualdades que conforman a ecuación continua, eliminamos denominadores e reducimos as expresións resultantes, pasando todo ao primeiro membro de xeito que se anule o segundo membro, aparece un sistema de dúas ecuacións que se coñece co nome de ecuación xeral, implícita ou cartesiana de r .

Ex 7 Obter as ecuacións implícitas da recta r , que é paralela á recta $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = t - 2 \end{cases}$ e contén ao punto $A(2, -3, 0)$.

A recta fica determinada por un punto e un vector director. Ao ser paralelas, r e s teñen a mesma dirección e polo tanto podemos usar o vector director de s ; así que a recta buscada é $r(A, \vec{u}_s)$.

O vector $\vec{u}_s$ pode-se determinar de varias formas. Unha delas consiste en observar os coeficientes de t nas ecuacións paramétricas de s , co que obtemos $\vec{u}_s = (-2, 3, 1)$.

Outra forma sería dar-lle dous valores a t , co que obtemos dous puntos $B, C \in s$, e o vector $\overline{BC}$ serve tamén como vector director: a recta r será: $r(A, \vec{u}_s) \equiv (x, y, z) = (2, -3, 0) + t(-2, 3, 1)$ en forma vectorial.

En forma paramétrica temos $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = t \end{cases}$, e resolvendo t nas tres ecuacións, resulta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = z$.

As implícitas obteñen-se eliminando denominadores:

$$\frac{x-2}{-2} = z \Leftrightarrow x-2 = -2z \Leftrightarrow x+2z-2=0 \text{ e } \frac{y+3}{3} = z \Leftrightarrow y+3=3z \Leftrightarrow y-3z+3=0$$

Reunindo ambas ecuacións resulta $r \equiv \begin{cases} x+2z-2=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$.

Ex 8 Obter as ecuacións paramétricas e continua da recta r , de ecuacións implícitas $r \equiv \begin{cases} x=y \\ x-y-2z=0 \end{cases}$.

$r \equiv \begin{cases} x=y \\ x-y-2z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$, que é un sistema compatíbel indeterminado de rango 2:

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, onde o menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$; logo podemos expresar o sistema da forma $\begin{cases} x=y \\ x-2z=y \end{cases}$ e

resolvendo en función do parámetro y temos: $\begin{cases} x=y \\ x-2z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ [1]. Se mudamos o parámetro y por t , temos

as paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$. E de aquí, a ecuación continua será: $r \equiv x=y=\frac{z}{0}$.

Esta ecuación merece desde logo un comentário, xá que debemos interpretar corretamente o denominador nulo. A interpretación resulta evidente se facemos $x=\frac{y}{0} \Leftrightarrow x \cdot 0 = z \Leftrightarrow z=0$; así que realmente estamos a falar da recta

$$r \equiv \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}.$$

Nota [1]: É completamente inecesário resolver o sistema pasando polo estudo do rango e demais, mas convén ter claro que non sempre é posíbel escoller como parámetro calquer das tres variábeis; en particular neste caso non se pode escoller como parámetro z , xá que non é libre: $z=0$.

5.3. ECUACIONES DO PLANO

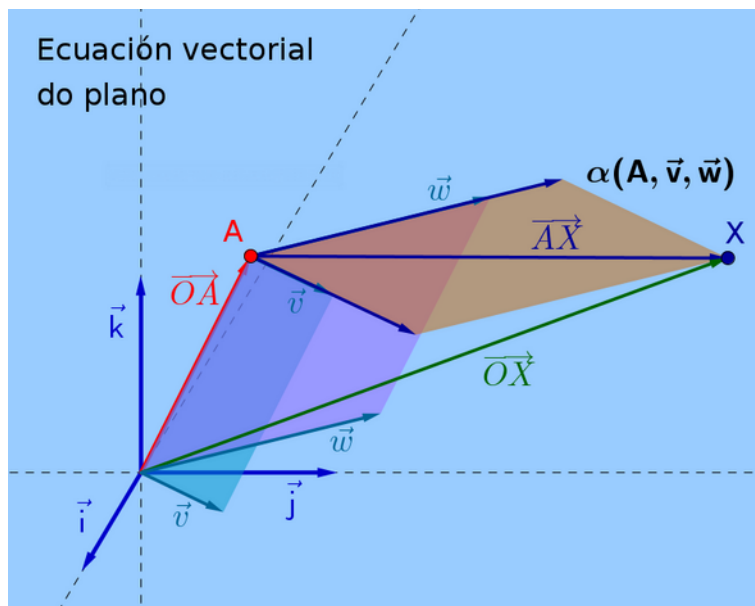
Un plano α determina-se identificando un punto $A(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e dous vectores $\vec{v}=(a, b, c)$ e $\vec{w}=(a', b', c')$ que indican dúas direccións non coincidentes do plano, ou equivalentemente, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tal que $\text{rang} \{\vec{v}, \vec{w}\}=2$.

Di-se que $\alpha(A, \vec{v}, \vec{w})$ é unha determinación linear do plano α .

A ecuación vectorial do plano determinado desta forma é:

$$\vec{OX} = \vec{OA} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}, \quad \text{ou}$$

equivalentemente $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) + s(a', b', c')$. Nesta ecuación (x, y, z) son as coordenadas do punto xenérico X de α , (x_0, y_0, z_0) son as coordenadas de A , (a, b, c) e (a', b', c') son as coordenadas dos vectores directores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e t e s son parámetros que toman valores en $\mathbb{R}$.



Ao desglosar a ecuación vectorial obtemos as paramétricas: $\alpha \equiv \begin{cases} x = x_0 + ta + sa' \\ y = y_0 + tb + sb' \\ z = z_0 + tc + sc' \end{cases}$.

Outra forma de obter o plano é pensar no seguinte: os vectores $\vec{AX}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ son coplanares e polo tanto $\text{rang} \{\vec{AX}, \vec{v}, \vec{w}\}=2$. Isto implica que $\det(\vec{AX}, \vec{v}, \vec{w})=0$, ou tamén:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Ao calcular o determinante e reducir esta expresión, obtén-se unha ecuación da forma $Ax+By+Cz+D=0$, que é a ecuación xeral ou implícita do plano.

Hai aínda outra vía alternativa para obter a ecuación dun plano. Sexa o punto $A(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e sexa $\vec{n}=(A, B, C)$ un vector perpendicular ao plano α ; entón $\alpha(A, \vec{n})$ chama-se determinación normal do plano α . Xá que calquer vector $\vec{AX}$ contido no plano há de ser perpendicular ao vector $\vec{n}$, o produto escalar de ambos vectores debe ser nulo, polo que a ecuación do plano virá dada pola expresión seguinte: $\vec{n} \cdot \vec{AX} = (A, B, C) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = A \cdot (x-x_0) + B \cdot (y-y_0) + C \cdot (z-z_0) = 0$.

Ao desenvolver esta expresión resulta unha ecuación do tipo $Ax+By+Cz+D=0$, co que obtemos outra vía que nos proporciona de novo a ecuación xeral do plano. O vector $\vec{n}$ denomina-se vector normal do plano α .

Ex 9 Obter a ecuación xeral do plano α , que contén á recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = -2y = z+3$ e ao punto $A(2, 3, -4)$.

A ecuación do plano α pode obter-se a partir da determinación linear ou ben da determinación normal.

Polo primeiro método debemos contar con un punto do plano e dous vectores direcionais. Contamos co vector director de r como primeiro vector direcional de α , e como segundo vector podemos utilizar $\vec{AP}$, onde P pode ser calquer punto de r .

Así, tomando $P(1, 0, -3) \in r$ e $\vec{u}_r = (2, -\frac{1}{2}, 1)$ como vector director de r , podemos obter a ecuación de α da

$$\text{forma } \alpha(A, \vec{AP}, \vec{u}_r), \text{ que será: } \alpha \equiv \det(\vec{AX}, \vec{AP}, \vec{u}_r) = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}(x-2) + 3(y-3) + \frac{13}{2}(z+4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5(x-2) + 6(y-3) + 13(z+4) = 0 \Leftrightarrow -5x + 6y + 13z + 44 = 0.$$

Outra forma de obter o plano é utilizar o produto vectorial $\vec{AP} \times \vec{u}_r$ como vector normal de α e obter a ecuación a través da determinación normal $\alpha(A, \vec{AP} \times \vec{u}_r)$.

$$\vec{n} = \vec{AP} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{13}{2}\vec{k} = \left(-\frac{5}{2}, 3, \frac{13}{2}\right); \text{ logo } \alpha \equiv \vec{n} \cdot \vec{AX} = \left(-\frac{5}{2}, 3, \frac{13}{2}\right) \cdot (x-2, y-3, z+4) = 0, \text{ co que}$$

obtemos unha ecuación equivalente á obtida anteriormente.

6. POSICIÓN RELATIVAS

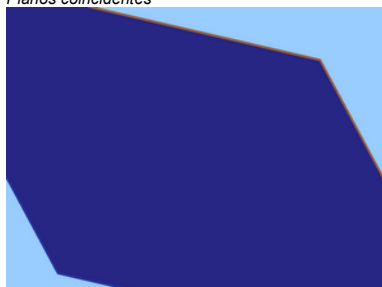
Neste epígrafe estudarán-se as distintas configuracións espaciais que poden adoptar entre si as rectas e os planos no espazo afín. Para isto utilizarán-se as ecuacións xerais das figuras e estudarás a compatibilidade dos sistemas de ecuacións resultantes, que equivale a estudar o rango das matrices de coeficientes e ampliada de tal sistemas.

6.1. POSICIÓN RELATIVAS DE DOUS PLANOS

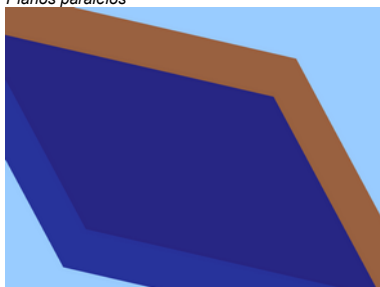
Sexan os planos de ecuacións $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ e $\beta \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$, e as matrices de coeficientes $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ e ampliada $M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$.

$\text{rang } M$	$\text{rang } M^*$	COMPATIBILIDADE	GRAUS DE LIBERDADE	POSICIÓN RELATIVA	INTERSECCIÓN
1	1	Compatíbel indeterminado	2	Planos coincidentes	Plano
1	2	Incompatíbel		Planos paralelos e distintos	$\emptyset$
2	2	Compatíbel indeterminado	1	Planos secantes	Recta

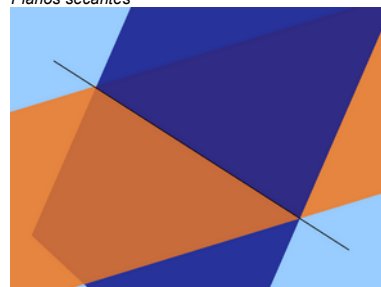
Planos coincidentes



Planos paralelos



Planos secantes



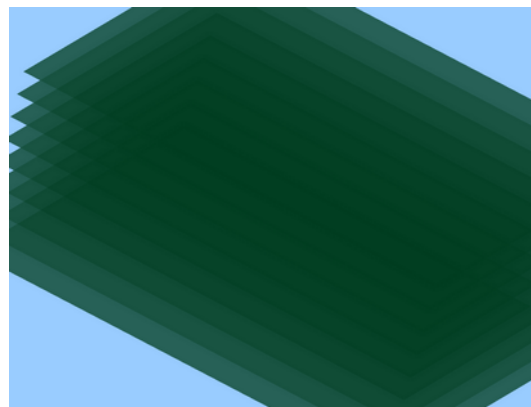
No primeiro caso, os dous planos teñen ecuacións equivalentes, polo que os coeficientes de α e β son proporcionais, isto é: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$.

[Nota: Esta proporción admite consecuentes nulos sempre que o sexan os seus respectivos antecedentes.]

No caso de que os planos sexan paralelos

resulta: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

Chama-se feixe de planos paralelos ao conxunto de todos os planos paralelos a un plano α dado. Se $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, segundo a condición anterior, calquer outro plano δ paralelo a α terá unha ecuación do tipo $\delta \equiv Ax + By + Cz + k = 0$. O feixe de planos paralelos a α é $\Pi = \{\delta \equiv Ax + By + Cz + k = 0 \mid k \in \mathbb{R}\}$.



A recta intersección de dous planos secantes α e β ten por ecuación xeral o sistema formado polas ecuacións de ambos planos: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$. Ao resolver este sistema obteñen-se as ecuacións paramétricas da recta intersección.

6.2. POSICIÓN RELATIVA DE TRÉS PLANOS

Sexan os planos $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, $\beta \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ e

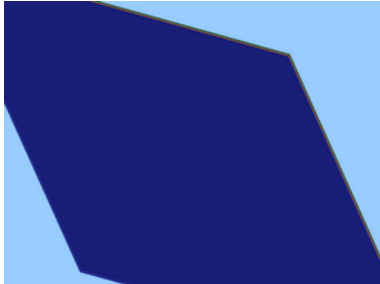
$\gamma \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ e as matrices $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ e

$$M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}.$$

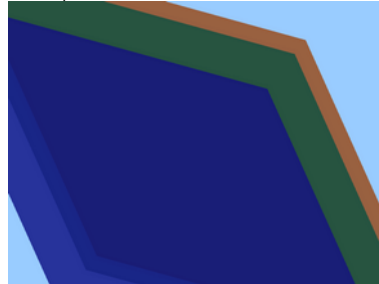
$\text{rang } M$	$\text{rang } M^*$	COMPATIBILIDADE	GRAUS DE LIBERDADE	POSICIÓN RELATIVA	INTERSECCIÓN
1	1	Comp. indeterminado	2	Planos coincidentes	Plano
1	2	Incompatíbel		Planos paralelos [1]	$\emptyset$
2	2	Comp. indeterminado	1	Feixe de planos secantes [1]	Recta
2	3	Incompatíbel		Planos secantes dous a dous [2]	$\emptyset$
3	3	Comp. determinado	0	Triedro	Ponto

[Notas: [1] Dous dos tres planos poden ser coincidentes; [2] pode acontecer que cada plano corte aos outros dous formando un prisma, ou ben que dous deles sexan paralelos e corten ao outro.]

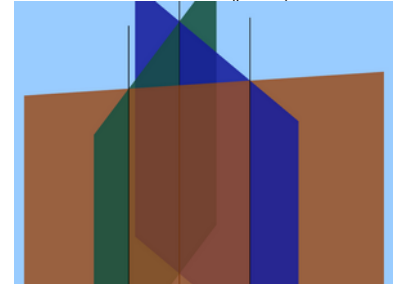
Planos coincidentes



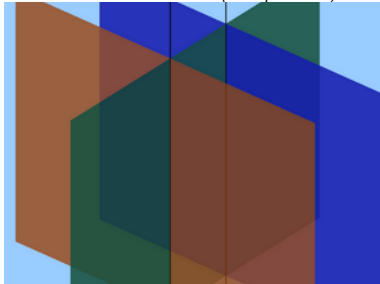
Planos paralelos



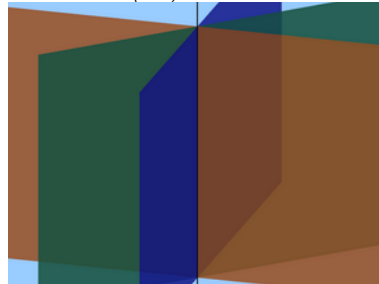
Planos secantes dous a dous (prisma)



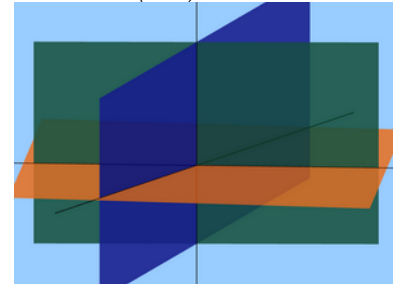
Planos secantes dous a dous (dous paralelos)



Planos secantes (feixe)

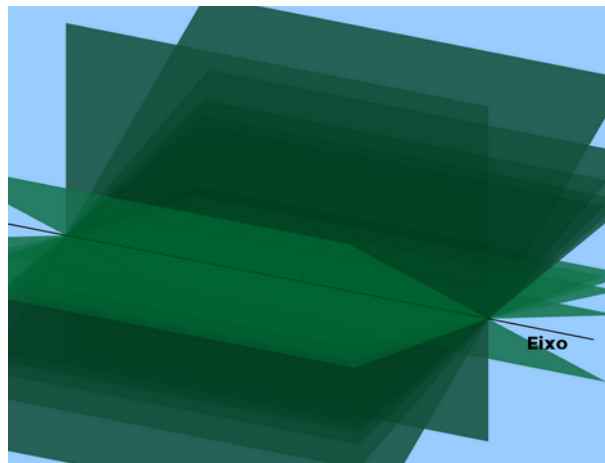


Planos secantes (triedro)



No caso do feixe de planos secantes, a recta intersección denomina-se eixo do feixe e obtén-se resolvendo o sistema formado polas ecuacións de dous dos seus planos.

En xeral, entende-se por feixe de planos secantes o conxunto de todos os planos que conteñen a unha determinada recta. A ecuación de calquer plano deste conxunto obtén-se como combinación linear das ecuacións de dous deles, que non sexan coincidentes, da seguinte forma.



Se $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ e $\beta \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ son as ecuacións de dous planos distintos do feixe, calquer outro plano δ deste feixe de planos secantes terá ecuación $\delta \equiv \lambda \cdot (Ax + By + Cz + D) + \mu \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0$.

Así, o feixe de planos secantes é o conxunto:

$$\Sigma = \{ \delta \equiv \lambda \cdot (Ax + By + Cz + D) + \mu \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

No caso do triedro, o punto intersección calcula-se resolvendo o sistema formado polas tres ecuacións.

Ex 10 Estudar a posición relativa dos planos $\alpha \equiv x + y - z - 1 = 0$, $\beta \equiv x - y + z + 3 = 0$ e $\gamma \equiv 2x - y + z + 4 = 0$. No caso de que sexan secantes, obter a ecuación da recta intersección e a ecuación do plano que pertence ao mesmo feixe de planos secantes e que contén ao punto $O(0, 0, 0)$.

O estudo dos rangos das matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dá como resultado

$\text{rang } M = \text{rang } M^* = 2$, polo que estamos ante un sistema compatible indeterminado con 1 grau de liberdade, así que os tres planos cortan-se nunha recta (feixe de planos secantes). As ecuacións implícitas da recta intersección r (eixo do feixe de planos secantes) serán o sistema formado por dous dos planos, sempre que non sexan coincidentes.

Logo podemos tomar como ecuacións implícitas da recta: $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$.

Calquer outro plano do mesmo feixe terá por ecuación unha combinación linear destes dous planos, así que será da forma $\delta \equiv t(x + y - z - 1) + s(x - y + z + 3) = 0$.

Nesta ecuación, facendo que $O(0, 0, 0) \in \delta$, resulta $-t + 3s = 0$. E tomando por exemplo $t = 3$ e $s = 1$ obtemos $\delta \equiv 3(x + y - z - 1) + (x - y + z + 3) = 0 \Leftrightarrow \delta \equiv 4x + 2y - 2z = 0$, ou tamén $\delta \equiv 2x + y - z = 0$ que é o plano que buscamos.

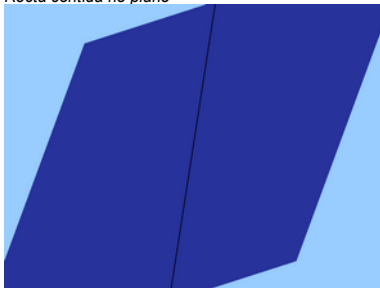
6.3. POSICIÓNS RELATIVAS DUNHA RECTA E UN PLANO

Sexan o plano $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ e a recta $r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$, co que se forman as matrices $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$.

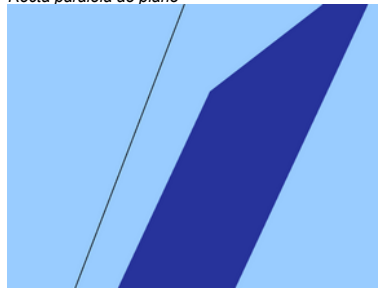
<i>rang</i> M	<i>rang</i> M^*	COMPATIBILIDADE	GRAUS DE LIBERDADE	POSICIÓN RELATIVA	INTERSECCIÓN
2	2	Comp. indeterminado	1	A recta está contida no plano	Recta r
2	3	Incompatíbel		A recta e o plano son paralelos	$\emptyset$
3	3	Comp. determinado	0	Secantes	Ponto

[Nota: É imposible que o rango de M sexa inferior a dous. De ser así as dúas ecuacións que determinan a recta serían equivalentes e polo tanto non determinarían unha recta.]

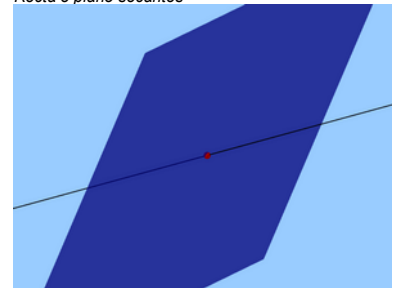
Recta contida no plano



Recta paralela ao plano



Recta e plano secantes



O punto intersección, no caso de seren secantes, calcula-se resolvendo o sistema de tres ecuacións.

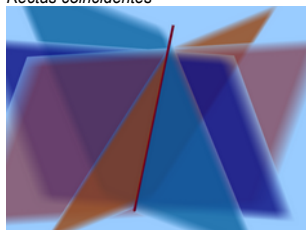
Outra posibilidade para o cálculo do punto intersección é introducir as ecuacións paramétricas da recta na ecuación xeral do plano e resolver a ecuación resultante no parámetro t da recta.

6.4. POSICIÓNS RELATIVAS DE DUAS RECTAS

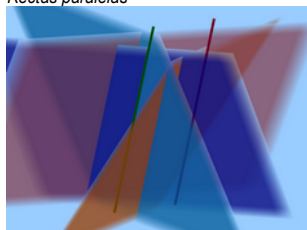
Sexan $r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{cases}$ dúas rectas e as matrices $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$.

$\text{rang } M$	$\text{rang } M^*$	COMPATIBILIDADE	GRAUS DE LIBERDADE	POSICIÓN RELATIVA	INTERSECCIÓN
2	2	Comp. indeterminado	1	Rectas coincidentes	Recta
2	3	Incompatíbel		Rectas paralelas e distintas	$\emptyset$
3	3	Comp. determinado	0	Rectas secantes (cortan-se)	Ponto
3	4	Incompatíbel		Rectas que se cruzan	$\emptyset$

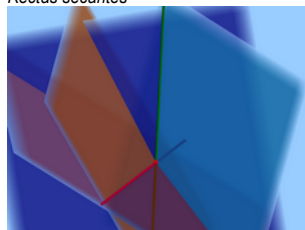
Rectas coincidentes



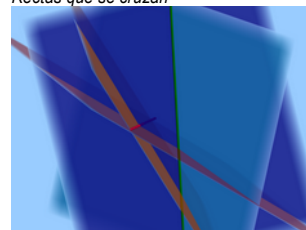
Rectas paralelas



Rectas secantes



Rectas que se cruzan



Ex 11 Estudar a posición relativa das rectas $r \equiv x=y-1=z+3$ e $s \equiv x-1=y-2=2z+4$. No caso de seren secantes, obter as coordenadas do punto intersección e a ecuación do plano que as contén.

Podemos transformar as ecuacións en implícitas, facendo:

$$r \equiv x=y-1=z+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z-3=0 \end{cases} \text{ e } s \equiv x-1=y-2=2z+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-2z-5=0 \end{cases}.$$

O estudo dos rangos das matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ dá como resultado

$\text{rang } M = \text{rang } M^* = 3$, polo que estamos ante un sistema compatíbel determinado, así que as rectas cortan-se nun punto.

Resolvendo o sistema por calquer método coñecido obtemos o punto intersección: $r \cap s \equiv P(1, 2, -2)$.

O plano que contén a ambas rectas pode obter-se da forma $\alpha(P, \vec{u}_r, \vec{u}_s)$, onde $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ son os vectores directores de r e s , ou sexa: $\alpha \equiv \det(\vec{PX}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 0$

7. ÁNGULOS E DISTÁNCIAS

7.1. ÁNGULOS

Ángulo determinado por duas rectas

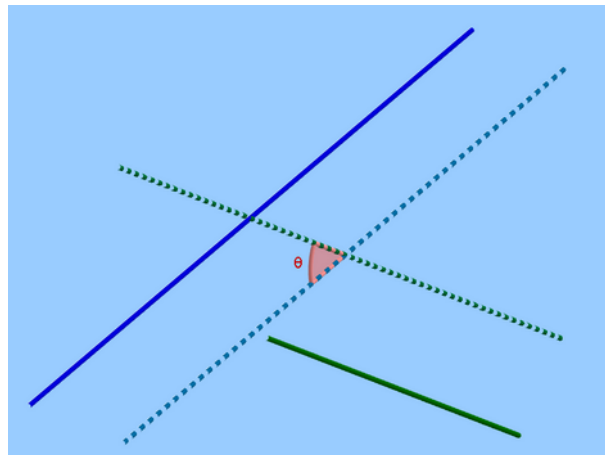
Dadas duas rectas, define-se o ángulo determinado por ambas como o menor dos seguintes ángulos: o determinado polos vectores directores das duas rectas e o seu suplementar. En calquer caso ambos ángulos teñen o mesmo coseno, en valor absoluto, polo que o ángulo buscado fica determinado polo signo positivo do coseno.

Así que, se $\vec{u}_r = (a, b, c)$ e $\vec{u}_s = (a', b', c')$ son os vectores directores das rectas r e s temos:

$$\cos(\hat{r}, \hat{s}) = |\cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s)| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \text{ logo o ángulo determinado polas rectas } r \text{ e } s \text{ será } \theta(\hat{r}, \hat{s}) = \arccos \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

i. Perpendicularidade de duas rectas: $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$.

ii. Paralelismo de duas rectas: $r \parallel s \Leftrightarrow \text{rang}\{\vec{u}_r, \vec{u}_s\} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, sempre que os denominadores non sexan nulos.



Ángulo determinado por dous planos

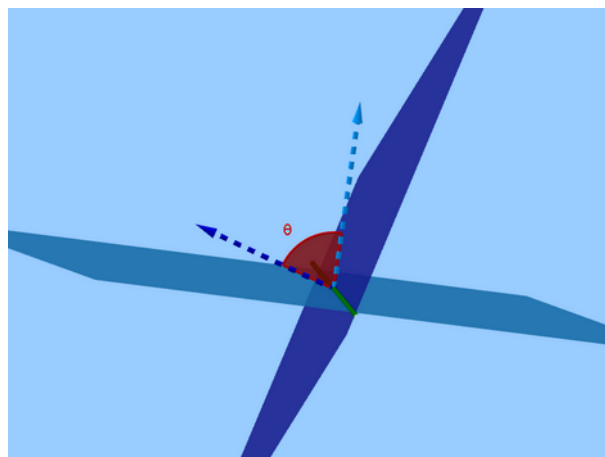
Dados dous planos, define-se o ángulo determinado por ambos como o menor dos seguintes ángulos: o determinado polos vectores normais dos dous planos e o seu suplementar.

Utilizando o mesmo criterio que no caso das rectas, se $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ e $\vec{n}_\beta = (A', B', C')$ son os vectores normais dos planos α e β :

$$\cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, \text{ logo o ángulo determinado polos planos } \alpha \text{ e } \beta \text{ será } \theta(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arccos \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

i. Perpendicularidade de dous planos: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

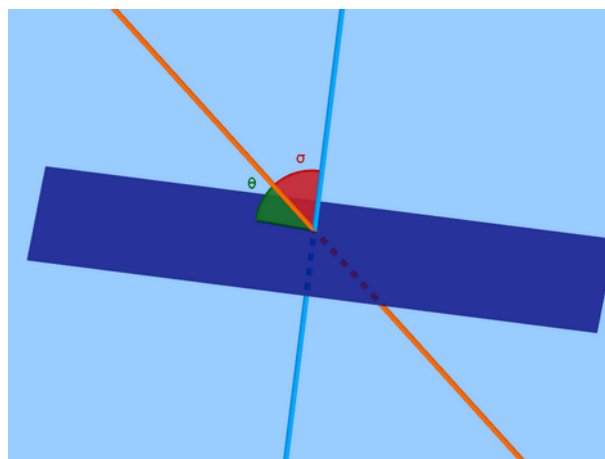
ii. Paralelismo de dous planos: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \text{rang}\{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta\} = 1 \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, sempre que os denominadores non sexan nulos.



Ángulo determinado por unha recta e un plano

Dados unha recta e un plano, define-se o ángulo determinado por ambos como o ángulo determinado pola recta e a súa proxección ortogonal o plano.

Este ángulo é complementario do formado pola recta e a dirección normal do plano, así que se $\vec{u}_r = (a, b, c)$ é o vector director da recta e $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ o normal do plano, entón:



$$\widehat{\theta(r, \alpha)} = \left| \cos(\vec{u}_r, \vec{n}_\alpha) \right| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ logo o ángulo determinado pola recta } r \text{ e o plano } \alpha \text{ será } \theta(r, \alpha) = \arcsen \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- i. Perpendicularidade de recta e plano: $r \perp \alpha \Leftrightarrow \text{rang} \{ \vec{u}_r, \vec{n}_\alpha \} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$, sempre que os denominadores non sexan nulos.
- ii. Paralelismo dunha recta e un plano: $r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow aA + bB + cC = 0$.

Ex 12 Calcular o ángulo determinado polo plano $\alpha \equiv x - 2y + 3z = 4$ e a recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = 2z$.

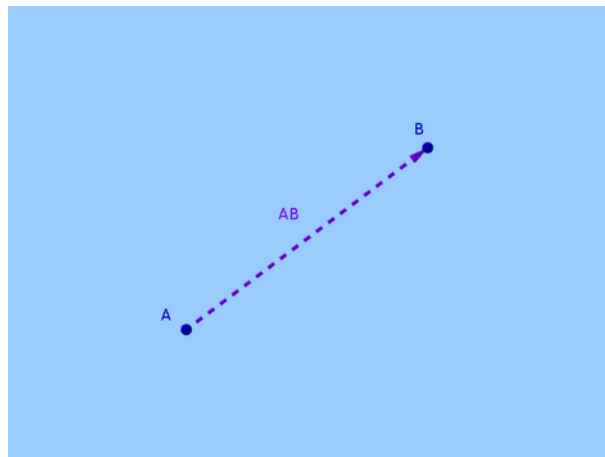
O ángulo pedido será $\widehat{\theta(r, \alpha)} = \arcsen \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{v}_\alpha|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{v}_\alpha|}$, onde $\vec{u}_r$ e $\vec{v}_\alpha$ son os vectores director de r e normal de α respectivamente.

$$\vec{u}_r = \left(2, 1, \frac{1}{2} \right) \text{ e } \vec{v}_\alpha = (1, -2, 3), \text{ logo } \widehat{\theta(r, \alpha)} = \arcsen \frac{\left| \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{\frac{21}{4}} \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{14}$$

7.2. DISTÁNCIAS

Distancia entre dous puntos

A distancia entre dous puntos A e B é o módulo do vector $\overrightarrow{AB}$: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$.

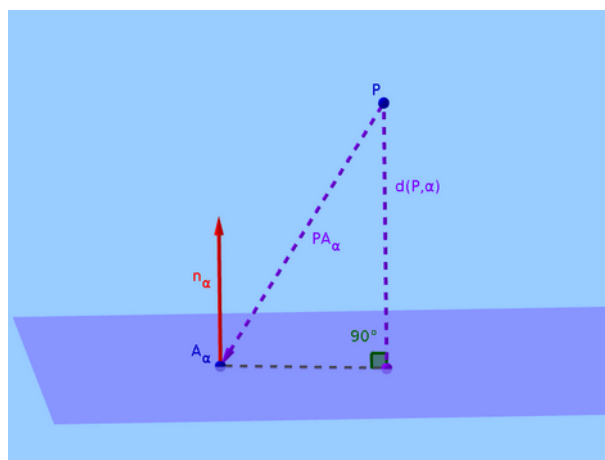


Distancia entre un punto e un plano

Se A e $\vec{n}$ son un punto e un vector normal do plano, a distancia dun punto P ao plano é a proxección do vector $\overrightarrow{AP}$ sobre o vector normal $\vec{n}$, así que:

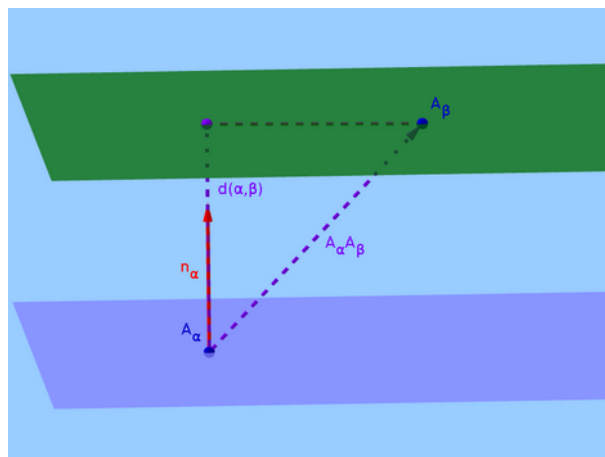
$$d(P, \alpha) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \text{con}$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{n} = (A, B, C)$.



Distancia entre dous planos paralelos

Se α e β son dous planos paralelos e A_α é un punto do plano α , resulta $d(\alpha, \beta) = d(A_\alpha, \beta)$, de forma que este caso non é senón unha aplicación do anterior.



Ex 13 Obter a ecuación do plano paralelo a $\alpha \equiv 2x - 3y + z + 3 = 0$ que diste deste 5 unidades.

Os planos paralelos a α son da forma $\pi \equiv 2x - 3y + z + k = 0$, e precisamos que $d(\alpha, \pi) = 5$.

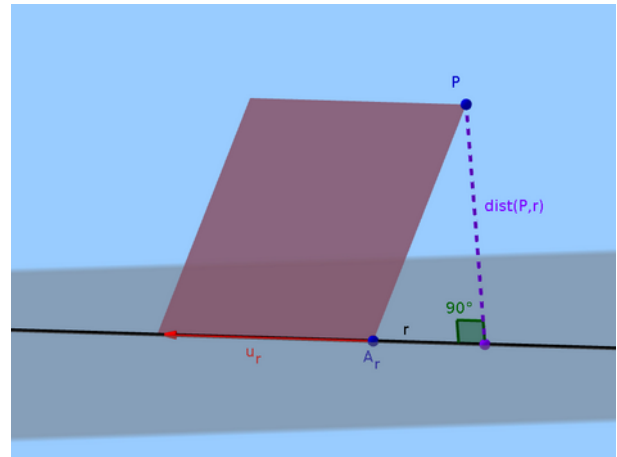
Sexa $A_\alpha(0, 0, 3) \in \alpha$; $d(\alpha, \pi) = d(A_\alpha, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 3 + k|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|3 + k|}{\sqrt{14}} = 5 \Leftrightarrow |3 + k| = 5\sqrt{14}$.

Logo: $3 + k = \pm 5\sqrt{14} \Leftrightarrow k = -3 \pm 5\sqrt{14}$, polo que obtemos dúas solucións, que son $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 3 + 5\sqrt{14} = 0$ e $\pi_2 \equiv 2x - 3y + z - 3 - 5\sqrt{14} = 0$.

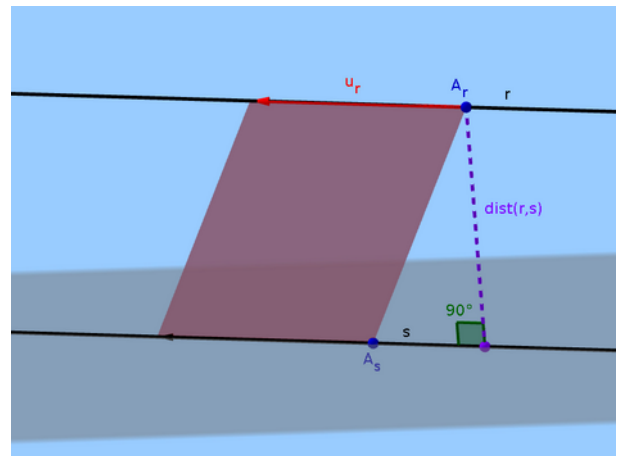
Distância entre un punto e unha recta

A distancia entre un punto P e unha recta $r(A, \vec{u})$ coincide coa altura do paralelogramo determinado polos vectores $\vec{AP}$ e $\vec{u}$, así que $d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

[Nota: Hai que lembrar a interpretación xeométrica do produto vectorial.]

Distância entre dúas rectas paralelas

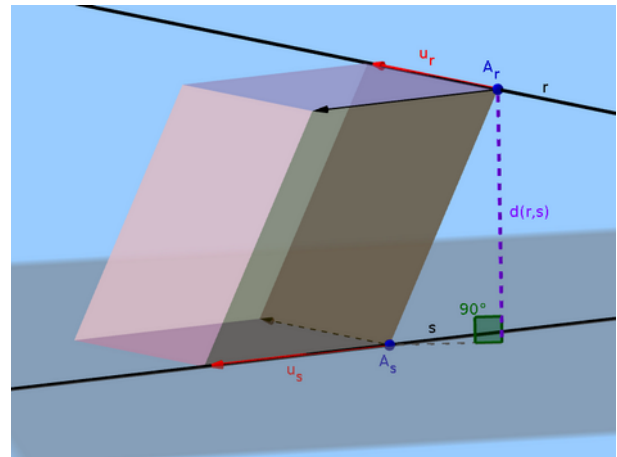
Este caso reduce-se a unha aplicación do anterior, sen mais que tomar un punto calquer dunha das rectas e calcular a distancia entre ese punto e a outra recta, así que $d(r, s) = d(A_r, s)$, onde $A_r \in r$.

Distância entre dúas rectas que se cruzan

Se temos as rectas $r(A_r, \vec{u}_r)$ e $s(A_s, \vec{u}_s)$, entón $\alpha(A_r, \vec{u}_r, \vec{u}_s)$ é o plano que contén ao punto A_r e ten por vectores direcionais os vectores directores de r e s , e así

$$d(r, s) = \frac{\| \vec{A_r A_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s \|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$$

[Nota: Esta fórmula é consecuencia da interpretación xeométrica do produto escalar como proxección.]

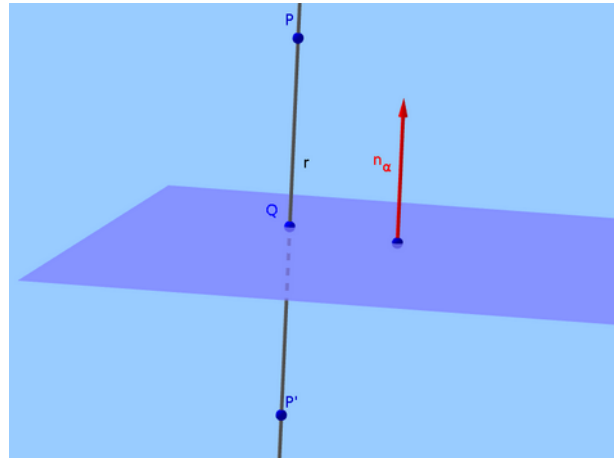


8. TRÉS PROBLEMAS CLÁSICOS

8.1. SIMÉTRICO DUN PONTO A RESPEITO DUN PLANO

Dado un punto P e un plano α , chama-se simétrico de P a respeito do plano ao punto P' tal que a recta PP' sexa perpendicular a α e que estea á mesma distancia do plano que o punto P : $PP' \perp \alpha$ e $d(P, \alpha) = d(P', \alpha)$.

Á vista da definición resulta evidente que a condición da distancia non é suficiente para determinar o punto P' . O problema resolve-se facilmente de xeito construtivo en tres pasos:

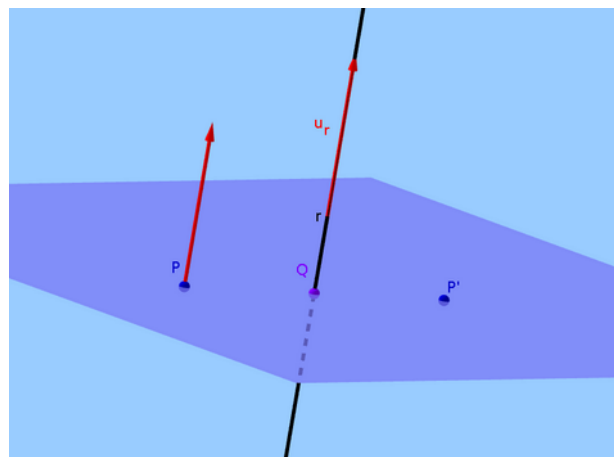


- traza-se a recta perpendicular a α e que contén ao punto P , $r(P, \vec{n}_\alpha)$, onde $\vec{n}_\alpha$ é o vector normal de α ;
- obtéñen-se en segundo lugar o punto Q , intersección de α e r ;
- finalmente calcula-se vectorialmente o punto P' facendo $\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PQ}$.

8.2. SIMÉTRICO DUN PONTO A RESPEITO DUNHA RECTA

Define-se o punto simétrico de P a respecto dunha recta r como o punto P' tal que a recta PP' sexa perpendicular a r e que estea á mesma distancia de r que o punto P : $PP' \perp r$ e $d(P, r) = d(P', r)$.

Este problema resolve-se de xeito semellante ao anterior:



- traza-se o plano $\alpha(P, \vec{u}_r)$, perpendicular a r e que contén ao punto P , onde $\vec{u}_r$ é o vector director de r ;
- obtéñen-se o punto Q , intersección de α e r ;
- finalmente calcula-se vectorialmente o punto P' facendo $\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PQ}$.

Ex 14 Obter o simétrico do punto $P(0, -1, 1)$ a respeito da recta $r \equiv x=y=2-z$.

Usando o vector director da recta $\vec{u}_r = (1, 1, -1)$ como vector normal dun plano perpendicular a r e que pase por P resulta: $\alpha \equiv x+y-z+k=0$; $P \in \alpha \Leftrightarrow -1-1+k=0 \Leftrightarrow k=2 \Leftrightarrow \alpha \equiv x+y-z+2=0$

A recta en forma paramétrica será $r \equiv x=y=2-z \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$ e introducindo na ecuación de α obtemos:

$t+t-(2-t)+2=0 \Leftrightarrow 3t=0 \Leftrightarrow t=0$, co que o punto intersección $r \cap \alpha$ é $Q(0, 0, 2)$.

Logo o oposto de $P(0, -1, 1)$ obtén-se como: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ} = (0, -1, 1) + 2(0, 1, 1) = (0, 1, 3)$; así que o oposto de P será $P'(0, 1, 3)$.

8.3. PERPENDICULAR COMÚN A DUAS RECTAS

Dadas dúas rectas r e s que se cruzan, chama-se perpendicular común á recta p que corta a ambas perpendicularmente. Se $r(A_r, \vec{u}_r)$ e $s(A_s, \vec{u}_s)$ son as dúas rectas, a

perpendicular común p terá por ecuacións implícitas: $p \equiv \begin{cases} \det(\overrightarrow{A_r X}, \vec{u}_r, \vec{u}_r \times \vec{u}_s) = 0 \\ \det(\overrightarrow{A_s X}, \vec{u}_s, \vec{u}_r \times \vec{u}_s) = 0 \end{cases}$.

Abonda con pensar que estas son as ecuacións de dous planos que conteñen ás rectas r e s respectivamente.

Existe outra forma de resolver o problema utilizando as expresións paramétricas das rectas. Sexan $P_r(x_1+ta, y_1+tb, z_1+tc)$ e $P_s(x_2+sa', y_2+sb', z_2+sc')$ dous puntos xenéricos das rectas r e s . Se establecemos a condición de que ambos puntos pertencen ademais á perpendicular común, entón o vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ há de ser ortogonal aos vectores $\vec{u}_r = (a, b, c)$ e $\vec{u}_s = (a', b', c')$.

Polo tanto obteremos as ecuacións da perpendicular común a r e a s resolvendo o

sistema: $\begin{cases} \overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_r = 0 \\ \overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_s = 0 \end{cases}$.

Ex 15 Obter a ecuación da recta perpendicular común ás rectas $r \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = z+4$ e $s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2t-2 \\ z=-3 \end{cases}$.

Sexan $P_r(2u-2, 3u+1, u-4)$ e $P_s(t, 2t-2, -3)$ dous puntos xenéricos de r e s respectivamente (ver nota ao pé) e sexan $\vec{u}_r = (2, 3, 1)$ e $\vec{u}_s = (1, 2, 0)$ dous vectores de r e s respectivamente.

Facendo os produtos $\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_r = 0$ e $\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_s = 0$, obtemos:

$$\begin{cases} 2(t-2u+2)+3(2t-2-3u-1)-3-u+4=0 \\ t-2u+2+2(2t-2-3u-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t-14u-4=0 \\ 5t-8u-4=0 \end{cases}$$

$$\text{Resolvendo o sistema obtemos } t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -14 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{24}{6} = 4 \text{ e } u = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -14 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{12}{6} = 2.$$

Logo introducindo nas ecuacións de r e s os valores $u=2$ e $t=4$ obtemos os puntos P_r e P_s e podemos construír a ecuación da recta perpendicular común p a partir da súa determinación linear $p(P_r, \overrightarrow{P_r P_s})$.

Nota: escollemos u como parámetro da recta r para evitar que coincida co parámetro t que corresponde a s .

1. O ESPAZO VECTORIAL DOS VECTORES LIBRES

1. Dados os vectores $\vec{u}=(2,-3,5)$ e $\vec{v}=(-6,1,0)$, achar:
 - i. os módulos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
 - ii. o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$;
 - iii. o coseno do ángulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
 - iv. a proxección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ e a de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$;
 - v. o valor de m para que o vector $(m,2,3)$ sexa ortogonal a $\vec{u}$.
2. Estudarse se $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(0,-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\right\}$ é unha base ortonormal do espazo V_3 .
3. Calcular o módulo do vector $\vec{u}$, que ten coordenadas $(1,1,1)$ a respecto da base $B=[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]$, sabendo que $|\vec{u}_1|=|\vec{u}_2|=|\vec{u}_3|=2$ e que $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=(\vec{u}_1,\vec{u}_3)=(\vec{u}_2,\vec{u}_3)=\frac{\pi}{3}$.
4. Calcular o valor de m para que os vectores $\vec{u}=11\vec{u}_1+m\vec{u}_2+3\vec{u}_3$ e $\vec{v}=\vec{u}_1+2\vec{u}_2+\vec{u}_3$ sexan ortogonais, sabendo que $B=[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]$ é unha base do espazo V_3 tal que $|\vec{u}_1|=2$, $|\vec{u}_2|=3$, $|\vec{u}_3|=1$ e $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2=4$, $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3=3$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3=12$.
5. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son vectores tal que $(\vec{u}+\vec{v})^2=25$ e $(\vec{u}-\vec{v})^2=9$, calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
6. Se $|\vec{u}|=9$ e $(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v})=17$, calcular $|\vec{v}|$.
7. Calcular os valores de x e y para que o vector $(x,y,1)$ sexa ortogonal aos vectores $(3,2,0)$ e $(2,1,-1)$.
8. Dados os vectores $\vec{u}_1=(2,0,0)$, $\vec{u}_2=(0,1,-3)$ e $\vec{u}_3=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2$, que relación han de satisfacer a e b para que $|\vec{u}_3|=1$?
9. Achar dous vectores unitarios e ortogonais a $(2,-2,3)$ e $(3,-3,2)$.
10. Determinar os valores de a e b , con $a>0$, para que os vectores $\vec{v}_1=(a,b,b)$, $\vec{v}_2=(b,a,b)$ e $\vec{v}_3=(b,b,a)$ sexan unitarios e ortogonais dous a dous.
11. Demostrar que se dous vectores teñen igual módulo, entón o vector suma e o vector diferenza son ortogonais.
12. Dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son tal que $(\vec{u}-\vec{v})^2=|\vec{u}|=|\vec{v}|=9$. Calcular o ángulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
13. Determinar o vector ou vectores unitarios $\vec{v}=(a,b,c)$, $a,b,c>0$, que forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radiáns co vector $\vec{u}=(1,1,1)$ e $\frac{\pi}{4}$ radiáns co vector $\vec{w}=(2,0,2)$.

14. Dados $\vec{u}=(3,1,-1)$ e $\vec{v}=(2,3,4)$, achar:
- os seus módulos;
 - o seu produto vectorial;
 - un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
 - a área do paralelogramo determinado polos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
15. Dados os vectores $\vec{u}=(-2,0,4)$ e $\vec{v}=(-1,0,\alpha)$, para que valores de α o módulo do vector $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$ é 4?
16. Calcular o volume do paralelepípedo determinado polos vectores $\vec{u}=(2,1,3)$, $\vec{v}=(1,2,3)$, e $\vec{w}=(-1,1,0)$. Interpretar o resultado.

2. O ESPAZO AFÍN EUCLIDIANO TRI-DIMENSIONAL

17. Calcular as coordenadas do punto A , sabendo que $\overrightarrow{AB}=(2,3,4)$ e $B(5,-3,7)$.
18. Comprobar se son equipolentes os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, con $A(2,1,3)$, $B(5,4,1)$, $C(2,1,5)$ e $D(3,2,-1)$. En caso negativo, dar un punto D' de forma que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD'}$ sexan equipolentes.
19. Calcular as coordenadas do punto medio do segmento de extremos $A(3,2,-5)$ e $B(3,1,7)$.
20. Dados os vértices $A(3,3,6)$ e $B(6,12,18)$, que determinan o segmento $\overrightarrow{AB}$, calcular as coordenadas dos puntos que dividen a $\overrightarrow{AB}$ en dúas partes iguais e dos puntos que o dividen en tres partes iguais.
21. Nun triángulo $\triangle ABC$ o baricentro é $G(1,2,1)$, o punto medio de $\overrightarrow{BC}$ é $M(2,4,6)$ e o punto medio de $\overrightarrow{AC}$ é $N(3,2,1)$. Calcular as coordenadas dos vértices A , B e C .
22. Achar a ecuación da recta que contén aos puntos $A(2,3,4)$ e $B(8,-2,3)$. Estudar se o punto $C(2,1,3)$ está alineado con A e B .
23. Estudar se os puntos $A(2,3,1)$, $B(5,4,3)$ e $C(2,1,2)$ están alineados.
24. Demostrar a seguinte proposición: os puntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ están alineados $\Leftrightarrow \text{rang} [\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}] = 1$.
25. Achar a ecuación do plano $\alpha(A, \vec{v}, \vec{w})$, con $A(1,0,1)$, $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{w}=3\vec{j}-\vec{k}$.
26. Estudar se os planos determinados por $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,-1)$ e por $A'(3,0,0)$, $B'(0,6,0)$ e $C'(0,0,-3)$ son paralelos.
27. Achar a ecuación do plano que contén á recta $r \equiv \begin{cases} x=2t \\ y=3+t \\ z=1-t \end{cases}$ e ao punto $A(2,-1,2)$.
28. Achar a ecuación do plano que contén á orixe de coordenadas e á recta de ecuacións $\frac{x-3}{3} = -\frac{y+2}{2} = z-1$.
29. Dados os puntos $P(3,4,1)$ e $Q(7,2,7)$, determinar a ecuación xeral do plano que é perpendicular ao segmento $\overrightarrow{PQ}$ e contén ao punto medio deste segmento.

30. Achar a ecuación do plano que contén ao punto $A(1,0,0)$ e é paralelo ao plano $x-2y+4z+2=0$.
31. Achar a ecuación do plano determinado polas rectas $r \equiv x-1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$ e $s \equiv x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.
32. Achar a ecuación da recta s que contén a $A(1,0,1)$ e é paralela á recta r intersección dos planos $\alpha \equiv x+y+z-3=0$ e $\beta \equiv 2x-2y+z=1$.
33. Achar a ecuación do plano que contén á orixe e é paralelo ás rectas $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4}$ e $s \equiv x=y=z$.
34. Achar a ecuación do plano que contén ao punto $A(1,1,2)$ e é paralelo ás rectas $r \equiv \begin{cases} 3x+y=0 \\ 4x+z=0 \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} 2x-2y=4 \\ y-z=-3 \end{cases}$.
35. Determinar o plano que contén á recta $r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ e é paralelo á recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$.
36. Estudar se os puntos $A(1,2,3)$, $B(4,7,8)$, $C(3,5,5)$, $D(-1,-2,-3)$ e $E(3,2,-1)$ son co-planares.
37. Que relación deben verificar os parámetros a , b e c para que os puntos $A(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$ e $D(a,b,c)$ sexan co-planares?
38. Demostrar a seguinte proposición: os puntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son co-planares $\Leftrightarrow \text{rang} [\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n}] = 2$.

3. POSICIÓN RELATIVA DE RECTAS E PLANOS

39. Determinar a posición relativa do plano $\alpha \equiv 3x-2y+z=3$ e a recta $r \equiv 2x-2=3y=6z+1$.
40. Determinar n e m para que os planos $6x-my+4z+9=0$ e $9x-3y+nz=n$ sexan paralelos.
41. Estudar a intersección dos planos $x-y+z=0$, $3x+2y-2z=1$ e $5x=1$, especificando se é vacía ou se trata dun punto, unha recta ou outra figura.
42. Discutir, segundo o valor de k , a posición relativa dos planos $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+y+4z=11 \end{cases}$.
43. Discutir a posición de $\begin{cases} 3x-ay+2z=a-1 \\ 2x-5y+3z=1 \\ x+3y-(a-1)z=0 \end{cases}$.
44. Discutir e interpretar xeometricamente, segundo o parámetro α , o sistema $\begin{cases} 3x-y=\alpha x \\ 5x+y+2z=\alpha y \\ 4y+3z=\alpha z \end{cases}$.

45. Dada a recta $r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$ e o plano $\alpha \equiv 2x+y+mz=n$, determinar m e n de modo que:
- r e α sexan secantes;
 - r e α sexan paralelos;
 - $r \subset \alpha$.
46. Determinar a posición relativa de $r \equiv x=-y=-z$ e $s \equiv z=2, y=x+2$.
47. Dadas as rectas $r \equiv \begin{cases} x=z-1 \\ y=2-3z \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} x-4=5z \\ y=4z-3 \end{cases}$:
- indicar se se cortan, son paralelas ou se cruzan;
 - achar a ecuación da recta que contén á orixe e corta ás dúas rectas dadas.
48. Determinar a e b para que os planos $\alpha \equiv 2x-y+z=3$, $\beta \equiv x-y+z=2$ e $\gamma \equiv 3x-y-az=b$ se corten nunha recta r . Achar a ecuación do plano que contén a esta recta r e ao punto $P(2,1,3)$.
49. Dadas as rectas r , que pasa polos puntos $P(0,8,3)$ e $Q(2,8,5)$, e $s \equiv \begin{cases} x-y+7=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$:
- estudar a súa posición relativa e o punto de corte, se é o caso;
 - obter a ecuación da recta que contén a P e é perpendicular ao plano que contén a r e a s .
50. Averiguar para que valor de m a recta $r \equiv \begin{cases} x+2y+z=m \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$ se corta coa recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$. Calcular o punto intersección de ambas, no caso de que exista.
51. Achar as ecuacións dos planos que pasan polo punto $A(-7,2,-3)$, coa condición de que as proxeccións ortogonais da orixe de coordenadas sobre eses planos pertencen á recta $(x,y,z)=(0,4,1)+t(1,0,0)$.
52. Para cada valor de a , os puntos $P(1,2,3)$ e $A(0,1,a)$ son simétricos a respecto dun plano. Obter a ecuación deste plano e dar, en particular, o plano que corresponde ao caso $a=2$.
53. Obter a ecuación dun plano que conteña á orixe de coordenadas e non teña puntos comúns coa recta $r \equiv \begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$.
54. Dados os planos $\alpha(A_\alpha, \vec{n}_\alpha)$ e $\beta(A_\beta, \vec{n}_\beta)$, demostrar que: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \text{rang} [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = 1$. Baixo que condicións α e β serán planos coincidentes?

55. Dadas as rectas $r(A_r, \vec{u}_r)$ e $s(A_s, \vec{u}_s)$, demostrar:

i. $r \parallel s \Leftrightarrow \text{rang} [\vec{u}_r, \vec{u}_s] = 1$;

ii. r e s cortan-se $\Leftrightarrow \text{rang} [\vec{u}_r, \vec{u}_s] = \text{rang} [\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{A_r A_s}] = 2$;

iii. r e s cruzan-se $\Leftrightarrow \text{rang} [\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{A_r A_s}] = 3$.

56. Dada a recta $r(A_r, \vec{u})$ e o plano $\alpha(A_\alpha, \vec{n})$, demostrar que: $r \parallel \alpha \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

57. Determinar a ecuación dos vectores que son ortogonais á recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$ e interpretar xeometricamente o resultado.

4. ÁNGULOS E DISTÁNCIAS

58. Calcular o ángulo que ven determinado polas rectas $r \equiv 2x=y=z$ e $s \equiv 2x-4=y-1=z+3$. Achar, se é posíbel, o plano que as contén.

59. Calcular o ángulo determinado polos planos $\alpha \equiv x-y-3z=1$ e $\beta \equiv 3x+2y-z+3=0$.

60. Calcular o ángulo determinado polo plano $\alpha \equiv 3x+y-2z+7=0$ e a recta $r \equiv \begin{cases} x-2y=8 \\ 3y+z+8=0 \end{cases}$.

61. Calcular o ángulo determinado polo plano $\pi \equiv x+2y-3z+4=0$ e a recta $r \equiv \begin{cases} 2x-2=0 \\ 3y+2z=12 \end{cases}$.

62. Dada a recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = z+1$ e os puntos $A(1, 1, 0)$ e $B(2, 0, -3)$, determinar razoadamente:

i. as ecuacións dos planos α e β que conteñen á recta r e aos puntos A e B , respectivamente;

ii. o ángulo determinado polas rectas r e AB .

63. Dado o plano $\alpha \equiv 2x-y+2z=4$ e o punto $A(1, -3, 2)$, calcular:

i. a distancia do punto ao plano;

ii. as coordenadas da proxección ortogonal de A sobre α .

64. Calcular a distancia do plano $\pi \equiv 4x-10y+2z=-1$ ao plano $\sigma \equiv \begin{cases} x=2\lambda+3\mu \\ y=\lambda+\mu \\ z=\lambda-\mu \end{cases}$.

65. Dados os planos $\alpha \equiv 2x-y+2z=2$ e $\beta \equiv -4x+2y-4z=1$:

i. demostrar que son paralelos e calcular a distancia entre eles;

ii. determinar a ecuación do plano perpendicular a ambos que contén ao punto A , intersección do plano α e o eixo OX , e ao punto B , intersección de β e OY .

66. Achar a ecuación dun plano paralelo ao plano $\alpha \equiv 2x-2y+z=8$ e que diste 6 unidades do mesmo.

67. Determinar un punto da recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ que equidiste dos planos $\alpha \equiv 3x+4y=1$ e $\beta \equiv 4x-3z=1$. É a solución única?
68. Dados $A(1,1,3)$ e $r \equiv x=t, y=2+t, z=2t$, achar:
- a ecuación do plano perpendicular a r que contén ao punto A ;
 - a intersección deste plano con r ;
 - a distancia de A a r .
69. Calcular a distancia entre as rectas $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ e $s \equiv \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$.
70. Atopar os puntos que pertencen á recta determinada por $A(1,2,5)$ e $B(6,5,6)$ e distan 5 unidades da orixe de coordenadas.
71. Dado o punto $P(1,2,1)$ e a recta $r \equiv x+1=y-2=\frac{z-3}{4}$, achar:
- as ecuacións da recta s que contén a P e corta perpendicularmente a r ;
 - o punto intersección das rectas r e s ;
 - as coordenadas do punto simétrico de P a respecto de r .
72. Determinar a e b para que os planos $\alpha \equiv x+2y=z+1$, $\beta \equiv 2x+y+az=0$ e $\gamma \equiv 3x+3y-2z=b$ conteñan a unha mesma recta e achar o punto simétrico de $O(0,0,0)$ a respecto de tal recta.
73. Dado o punto $P(1,2,-2)$ e a recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z$, calcular as coordenadas do punto simétrico de P a respecto de r .
74. Achar a proxección ortogonal da orixe de coordenadas sobre o plano $x+2y+3z=4$.
75. Demostrar que o punto $A(-1,1,0)$ non é co-planar con $O(0,0,0)$, $C(0,1,0)$ e $D(1,2,1)$ e calcular a distancia de A ao plano determinado por O , C e D .
76. Achar un plano que conteña a $A(0,2,0)$ e $B(0,0,2)$, e corte ao eixo OX nun punto C , de forma que o triángulo $\triangle ABC$ teña área $4 u^2$.
77. Achar a ecuación do plano determinado polos puntos $A(1,-1,1)$, $B(1,2,2)$ e $C(2,1,1)$ e calcular a área do triángulo que determinan as súas interseccións cos eixos de coordenadas.
78. Dado o plano $2x+4y+z=8$, se A , B e C son os seus puntos de intersección cos eixos de coordenadas OX , OY e OZ , respectivamente:
- calcular a área do triángulo $\triangle ABC$;
 - achar as ecuacións da recta perpendicular a ese plano e que contén á orixe de coordenadas;
 - calcular o volume do tetraedro determinado polo plano dado e os tres planos coordenados.

79. As traxectórias de dous avións veñen dadas polas rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}$. Estudar se as traxectórias son coincidentes, secantes ou ben se se cruzan. Obter a distancia mínima entre ambas traxectórias.
80. A traxectória dunha nave ven dada pola recta $r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$. Estudar se a nave atravesará o plano $3x+y-z=0$ e calcular, nese caso, o punto de contacto e a distancia percorrida até ese punto desde o punto inicial $P(2, 3, 1)$.

5. VARIEDADES

81. Achar a ecuación da recta p que sexa perpendicular a $r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ e $r \equiv \begin{cases} x=s \\ y=s-1 \\ z=-1 \end{cases}$ e que teña un punto de intersección con ambas.
82. Dados os puntos $A(0, 2, 0)$ e $B(0, 2, 9)$, determinar o conxunto de puntos que equidistan de A e B . Que figura representa este conxunto?
83. Calcular o volume do tetraedro de vértices $P(1, 1, 1)$ e as interseccións do plano $\alpha \equiv 2x+3y+z=1$ cos eixos de coordenadas. Calcular o simétrico de P a respecto do plano α .
84. Un raio de luz incide no plano $\alpha \equiv 2x+y+z=1$, seguindo a dirección da recta e é reflectido por el. Estudar se o raio reflectido incide no punto $A(2, -3, 1)$ e na recta $s \equiv x=y+2=z-3$.
85. Calcular o volume dun cubo, sabendo que ten unha aresta sobre a recta $r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-6t \\ z=-1-t \end{cases}$ e outra sobre a recta $s \equiv \frac{x}{13} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-6}{14}$.
86. Calcular o ángulo que forman as diagonais dun cubo.
87. No tetraedro $ABCD$ coñecen-se os vértices $A(1, 0, 1)$, $B(0, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$, a recta que contén á aresta $AD \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$ e o plano que contén á cara $BCD \equiv x-y+z=0$. Obter os seguintes elementos:
- vértice D ;
 - ángulo determinado pola recta AC e o plano BCD ;
 - distancia do vértice B á cara ACD ;
 - volume do tetraedro.

88. No paralelepípedo adxunto coñecen-se os puntos $A(2, -1, 1)$, $B(0, 1, -2)$, $C(1, 0, 1)$ e $F(-2, -1, 0)$.

i. Calcular as coordenadas do punto medio da cara $ABCD$.

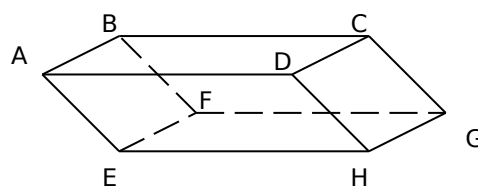
ii. Dar a ecuación da diagonal AG .

iii. Dar a ecuación do plano que contén ás arestas BC e EH .

iv. Calcular o volume do tetraedro de vértices $ABCE$.

v. Calcular o ángulo determinado polas caras $ABCD$ e $CDHG$.

vi. Calcular a altura do paralelepípedo (nota: a base é a cara $EFGH$).



89. Dados os puntos $A(0, 1, 0)$ e $B(2, 2, -1)$ e o plano $\pi \equiv x + y + z = 4$:

i. comprobar que A e B están situados no mesmo lado do plano π ;

ii. determinar un punto P do plano π , tal que a suma das distancias de P a A e de P a B sexa mínima.

90. Estudar por que un trípode sempre ten os tres pés apoiados no chan. Acontece igual con unha mesa de catro patas? Por que?

91. Interpretar xeométricamente o facto de que tres vectores no espazo tri-dimensional formen un conxunto linearmente dependente. Dados os vectores $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 3, 2)$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (3, 8, 5)$, demostrar que os vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ son combinación linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Obter a ecuación xeral do plano que contén á orixe e aos vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e determinar a posición relativa de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ a respecto de tal plano.

6. SOLUCIÓNS

- 1.i. $|\vec{u}| = \sqrt{38}$
- ii. $|\vec{v}| = \sqrt{37}$
- iii. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -15$
- iv. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{15}{\sqrt{38}\sqrt{37}}$
- vi. $p_{\vec{u}}(\vec{v}) = -\frac{15}{\sqrt{38}}$
- v. $p_{\vec{v}}(\vec{u}) = -\frac{15}{\sqrt{37}}$
- vii. $m = -\frac{9}{2}$
2. É unha base normada pero non é ortonormal, xá que os ángulos determinados por cada par de vectores non son rectos.
3. $|\vec{u}| = 2\sqrt{6}$
4. $m = -\frac{249}{34}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$
6. $|\vec{v}| = 8$
7. $x = 2$ e $y = -3$.
8. $|\vec{u}_3| = 1 \Leftrightarrow 4a^2 + 10b^2 = 1$
9. $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0)$ e $\vec{u}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0)$.
10. $a = 1$, $b = 0$ ou $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$.
11. Consiste en comprobar que o produto escalar dos vectores suma e diferenza é nulo.
12. $\theta(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{17}{18}$
13. $\vec{v}_1 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$ ou $\vec{v}_2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$.
- 14.i. $|\vec{u}| = \sqrt{11}$
- ii. $|\vec{v}| = \sqrt{29}$
- iii. $\vec{u} \times \vec{v} = (7, -14, 7)$
- iv. $\vec{w} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}(1, -2, 1)$
- v. a área é $7\sqrt{6}u^2$.
15. $\alpha = 4$ ou $\alpha = 0$.
16. O volume é nulo porque o paralelepípedo en realidade non é unha figura sólida, debido a que os tres vectores son co-planares.
17. $A(3, -6, 3)$
18. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ non son equipolentes; $D'(5, 4, 3)$.
19. $M\left(3, \frac{3}{2}, 1\right)$
20. O punto $M\left(\frac{9}{2}, \frac{15}{2}, 12\right)$ divide $\overrightarrow{AB}$ en dous segmentos iguais; $P(4, 6, 10)$ e $Q(5, 9, 14)$ dividen $\overrightarrow{AB}$ en tres.
21. $A(-1, -2, -9)$, $B(-3, 2, 1)$ e $C(7, 6, 11)$.

22. $r \equiv \frac{x-2}{6} = \frac{3-y}{5} = 4-z$; C non está alineado con A e B .
23. Non están alineados.
24. É suficiente pensar que se os puntos están alineados, os vectores que os unen teñen a mesma dirección.
25. $\alpha \equiv x+2y+6z=7$
26. Son paralelos.
27. $3x+4y+10z=22$
28. Trátase dun feixe de planos secantes xá que a orixe de coordenadas está na recta: logo o plano pedido pode ser calquer do feixe de ecuación $\frac{x-3}{3} = -\frac{y+2}{2} = z-1$, que tamén se pode expresar da forma $\pi \equiv s(x-3z)+t(y+2z)=0$ $s, t \in \mathbb{R}$.
29. $2x-y+3z=19$
30. $x-2y+4z=1$
31. $7x+4y-5z+7=0$
32. $r \equiv \frac{x-1}{3} = y = -\frac{z-1}{4}$
33. $x-2y+z=0$
34. $x-5y+4z=4$
35. $13x-2y+5z=3$
36. Non son co-planares.
37. $a+b+c=2$
38. Abonda con pensar que se os puntos son co-planares, entón os vectores que os unen están contidos nun mesmo plano.
39. Secantes: cortan-se en $P\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{5}{2}\right)$.
40. $m=2$ e $n=6$.
41. A intersección é a recta $r \equiv \left(\frac{1}{5}, z+\frac{1}{5}, z\right)$ $z \in \mathbb{R}$.
42. Os planos son secantes formando de triedro $\Leftrightarrow k \neq \frac{5}{2}$. E son secantes dous a dous, formando un prisma se $k = \frac{5}{2}$.
43. Os planos son secantes en forma de triedro $\Leftrightarrow a \neq 5$ e $a \neq 2$; forman un prisma $\Leftrightarrow a=5$ e determinan un feixe de planos secantes $\Leftrightarrow a=2$.
44. É un sistema homoxéneo polo que é compatíbel en todos os casos. Ten solución única $(0,0,0)$ para $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 3$ e $\alpha \neq 4$; nos casos $\alpha=0$, $\alpha=3$ e $\alpha=4$, o sistema ten solución múltiple (sistema compatíbel indeterminado).

- 45.i. r e α son secantes $\Leftrightarrow m \neq -\frac{23}{7}$;
- ii. $r \parallel \alpha \Leftrightarrow m = -\frac{23}{7}$ e $n \neq \frac{9}{7}$.
- iii. $r \subset \alpha \Leftrightarrow m = -\frac{23}{7}$ e $n = \frac{9}{7}$.
46. Son rectas que se cruzan.
47. Son rectas que se cruzan; a recta secante común as rectas r e s é $v \equiv (7t, -13t, t) \quad t \in \mathbb{R}$.
48. Ten que ser $a = -1$ e $b = 4$; o plano é $x + y - z = 0$.
49. As rectas cortan-se no punto $A(1, 8, 4)$; a recta é $p \equiv \begin{cases} x = -2t \\ y = 8 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.
50. Son secantes $\Leftrightarrow m = \frac{25}{4}$.
51. Os planos son $\pi_1 \equiv -3x + 4y + z = 26$ e $\pi_2 \equiv -4x + 4y + z = 33$.
52. O plano pedido ten ecuación $\pi \equiv x + y + (3 - a)z + \frac{a^2 - 13}{2} = 0$, en xeral. O caso particular $a = 2$ ten como solución $\pi \equiv 2x + 2y + 2z = 9$.
53. Os planos pedidos deben ser paralelos á recta r .
54. Se os planos son paralelos, os seus vectores normais teñen a mesma dirección; α e β serán coincidentes $\Leftrightarrow \text{rang} [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{A}_\alpha \vec{A}_\beta] = 1$.
55. É suficiente con pensar na configuración gráfica dos vectores en cada caso.
56. Idem o anterior.
57. Son ortogonais a r os vectores $\vec{v} = (x, y, z)$ que verifican a ecuación $2x - 7y - 3z = 0$; este conxunto de vectores representa un plano que contén á orixe de coordenadas e é perpendicular á recta r .
58. $\theta(r, s) = 0$; o plano é $\alpha \equiv 8x - 7y + 3z = 0$.
59. $\theta(\alpha, \beta) = \arccos \frac{2\sqrt{154}}{77}$
60. $\theta(\alpha, r) = \arcsen \frac{5\sqrt{154}}{77}$
61. $\pi \perp r$, polo tanto o ángulo é $\frac{\pi}{2}$.
- 62.i. Son os planos $\alpha \equiv x - 2y + 4z = -1$ e $\beta \equiv 2x - y - z = 7$;
- ii. $\theta(r, \hat{AB}) = \arccos \frac{2\sqrt{154}}{77}$
- 63.i. $d(A, \alpha) = \frac{5}{3} u$
- ii. a proxección é $A' \left(-\frac{1}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{8}{9} \right)$.

64. $\pi \parallel \sigma$, polo que a distancia é $d(\pi, \sigma) = \frac{\sqrt{30}}{60} u$.
- 65.i. $\alpha \parallel \beta$ xa que os seus vectores normais teñen a mesma dirección;
 ii. $d(\alpha, \beta) = \frac{5}{6} u$
 iii. o plano é $\pi \equiv x + 2y = 1$.
66. Existen dúas posibilidades: $\alpha_1 \equiv 2x - 2y + z = -10$ e $\alpha_2 \equiv 2x - 2y + z = 26$.
67. Existen dúas posibilidades: $P\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8}\right)$ e $P'\left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10}\right)$.
- 68.i. $\pi \equiv x + y + 2z = 8$
 ii. $P(1, 3, 2)$
 iii. pola construción anterior $d(A, r) = d(A, P) = \sqrt{5} u$.
69. $d(r, s) = \frac{3\sqrt{22}}{11} u$
70. $P\left(0, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$ e $P'\left(-\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{30}{7}\right)$.
- 71.i. $s \equiv (1 + 7t, 2 + t, 1 - 2t) \quad t \in \mathbb{R}$
 ii. $r \cap s \equiv Q\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$
 iii. $P'\left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$
72. $a = -1$ e $b = 1$; $O'\left(-\frac{8}{11}, \frac{14}{7}, -\frac{2}{11}\right)$.
73. $P'\left(\frac{13}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{16}{7}\right)$
74. $P\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right)$
75. $d(A, OCD) = \frac{\sqrt{2}}{2} u$
76. Existen dúas posibilidades: $\alpha_1 \equiv \sqrt{6}x + 3y + 3z = 6$ e $\alpha_2 \equiv -\sqrt{6}x + 3y + 3z = 6$.
77. A área é $3\sqrt{14} u^2$.
- 78.i. A área é $4\sqrt{21} u^2$.
 ii. $r \equiv 2x = y = 4z$
 iii. o volume é $\frac{32}{3} u^3$.
79. As traxectorias cruzan-se e a súa distancia mínima é $\frac{\sqrt{2}}{2} u$.

80. A nave toma contacto co plano no punto $Q(0,5,5)$ despois de percorrer unha distancia de $2\sqrt{6}u$.
81. $p \equiv (-1-k, -1+k, -1) \quad k \in \mathbb{R}$
82. É o plano de ecuación $z = \frac{9}{2}$.
83. O volume é $\frac{5}{36}u^3$ e o simétrico é $P'\left(-\frac{3}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{2}{7}\right)$.
84. O raio reflectido non incide en A e tampouco na recta r .
85. O volume é $8u^3$.
86. O ángulo é $\arccos \frac{1}{3} \approx 0,94$.
- 87.i. $D(1,1,0)$
- ii. $\arcsen \frac{\sqrt{6}}{3}$
- iii. $d(B, ACD) = \frac{2\sqrt{3}}{3}u$
- iv. o volume é $\frac{1}{3}u^3$.
- 88.i. $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$
- ii. $\overline{AG} \equiv \frac{x+1}{3} = y+2 = \frac{3-z}{2}$
- iii. $BCHE \equiv 7x - 5y - 4z = 3$
- iv. o volume é $12u^3$
- v. $\arccos \frac{8\sqrt{105}}{105}$
- vi. a altura é $12\sqrt{2}u$.
- 89.i. Pode-se demostrar que o signo da expresión que resulta de introducir na ecuación xeral do plano as coordenadas de calquer punto do espazo depende do lado do plano no que está situado tal punto;
- ii. $P\left(2, \frac{9}{4}, -\frac{1}{4}\right)$
90. Supón-se que o chan é un plano, que é a chave da cuestión.
91. Os vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ son combinación linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, polo que ambos están no plano determinado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$: $\pi \equiv x - y + z = 0$.