

## 1. FUNCIÓN REAL DE VARIÁBEL REAL

Exames e Textos de Matemática de Pepe Sacau ten unha licenza

[Creative Commons Atribución](#)[Compartir igual 4.0 Internacional](#)

## 1.1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

**Def 1** Entende-se por función unha aplicación entre conxuntos numéricos, na que unha variábel (a imaxe da función) toma valores que dependen de outra variábel (orixe da función). Tradicionalmente a imaxe da función identifica-se coa letra  $y$  e denomina-se variábel dependente, en tanto que a orixe da función identifica-se coa letra  $x$  e denomina-se variábel independente. De forma mais precisa, unha función real de variábel real define-se como segue: sexa  $A$  un subconxunto de  $\mathbb{R}$ , di-se que  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función real de variábel real :  $\Leftrightarrow \forall x \in A \exists y \in \mathbb{R} / f(x)=y$ .

O conxunto  $A$  no que toma valores a variábel independente  $x$ , chama-se dominio da función e representa-se por  $Dom f$ . Para cada elemento  $x$  do dominio, existe un único número real  $y$  relacionado con el, e di-se que  $y$  é a imaxe de  $x$  pola función  $f$ . O conxunto de todos os elementos que son imaxe de algún elemento do dominio chama-se conxunto imaxe e representa-se da forma  $Im f$  ou tamén  $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ .

Dado un elemento  $y$  do conxunto imaxe, existirá polo menos un elemento  $x$  do dominio que está relacionado con el, e diremos que  $x$  é a anti-imaxe de  $y$ . Existe a possibilidade de que un mesmo elemento  $y$  sexa imaxe de varios elementos do dominio, polo que designaremos por  $f^{-1}(y)$  ao conxunto de todos os elementos do dominio que teñen como imaxe o elemento  $y$ :  $f^{-1}(y) = \{x \in Dom f / f(x)=y\}$ .

**Ex 1** Estudar o dominio e a imaxe da función  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ . Obter as imaxes dos elementos  $0$ ,  $-2$ ,  $1$  e  $\frac{1}{3}$ , as anti-imaxes de  $-1$ ,  $2$  e  $0$  e o conxunto  $Im f$ .

Como non se indica nada sobre o dominio, entenderemos que  $Dom f$  é o maior subconxunto de  $\mathbb{R}$  no que a fórmula está ben definida, neste caso, todos os valores de  $x$  coa única condición de que non se anule o denominador.

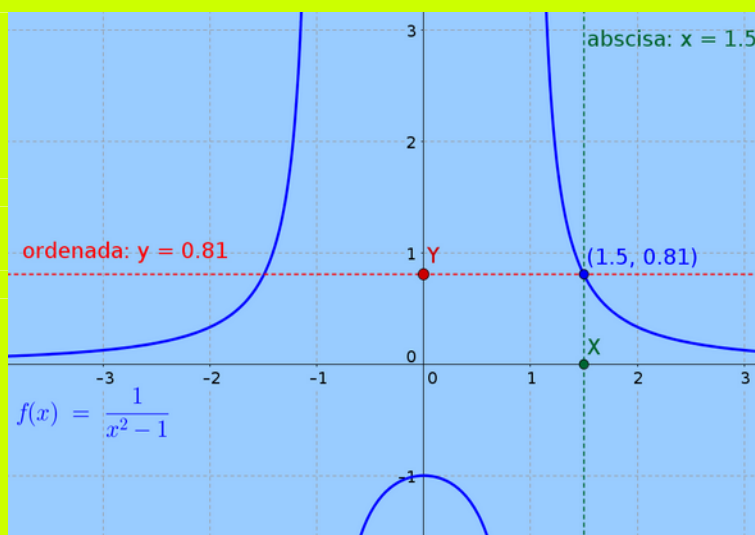
$Dom f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ , ou tamén  $Dom f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

As imaxes son:  $f(0) = \frac{1}{0^2-1} = -1$ ;

$$f(-2) = \frac{1}{(-2)^2-1} = \frac{1}{3};$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow 1 \notin Dom f;$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-1} = \frac{1}{\frac{1}{9}-1} = -\frac{9}{8}.$$



En xeral a anti-imaxe de  $y$  é:  $f^{-1}(y) = \{x \in Dom f / f(x)=y\}$ , así que para obter  $f^{-1}(-1)$  faremos  $\frac{1}{x^2-1} = -1 \Leftrightarrow x=0$ , logo  $f^{-1}(-1)=0$ . De igual forma:  $\frac{1}{x^2-1} = 2 \Leftrightarrow 2x^2-3=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ , así que  $f^{-1}(2) = \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, +\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$ . E para  $x=0$ :  $\frac{1}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow 1=0$  e polo tanto  $f^{-1}(0) = \emptyset$ .

$Im f$  é o conxunto de todos os valores de  $y$  que son imaxe de algún valor de  $x$ , é dicir, os elementos  $y \in \mathbb{R} / \exists x \in Dom f f(x)=y$ :  $\frac{1}{x^2-1} = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1+\frac{1}{y}}$ . Esta expresión ten sentido se  $y \neq 0$  e se o radicando é maior ou igual que  $0$ , polo tanto:  $1+\frac{1}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \geq -1$ . Logo  $Im f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - [-1, 0]$ .

Chama-se gráfica dunha función  $f$  ao conxunto dos pares  $\{(x, f(x)), x \in \text{Dom } f\}$ , é dicir, o conxunto formado por todos os pares de elementos que están asociados en virtude da relación de dependencia entre a variábel independente e a variábel dependente. A gráfica dunha función é un conxunto que se pode representar nun sistema de coordenadas cartesianas, no que a variábel independente  $x$  (a abscisa) ocupa o eixo horizontal (eixo de abscisas) e a variábel dependente  $y$  (a ordenada) ocupa o eixo vertical (eixo de ordenadas). Desta forma a información numérica que proporciona a expresión alxébrica da función transforma-se en información gráfica, que é o que se coñece como representación gráfica dunha función. A gráfica resulta de muita utilidade para observar o comportamento da función ao longo do seu dominio de existencia.

**Ex 2** Dada a función  $f(x) = x^2 + 2$ , obter as ordenadas correspondentes aos puntos de abscisa  $x=2$  e  $x=-1$  e representálos no plano cartesiano. Obter tamén a abscisa correspondente aos puntos de ordenada  $y=4$  e  $y=0$  e representálos. Estudar se o punto  $P(3, -2)$  pertence á gráfica e estudar se existe algún punto da gráfica que teña ordenada  $10$ .

Para  $x=2$  temos que:

$f(2) = 2^2 + 2 = 6$ , logo a ordenada é  $y=6$  e o punto  $A(2, 6)$  está na gráfica.

Para  $x=-1$ :

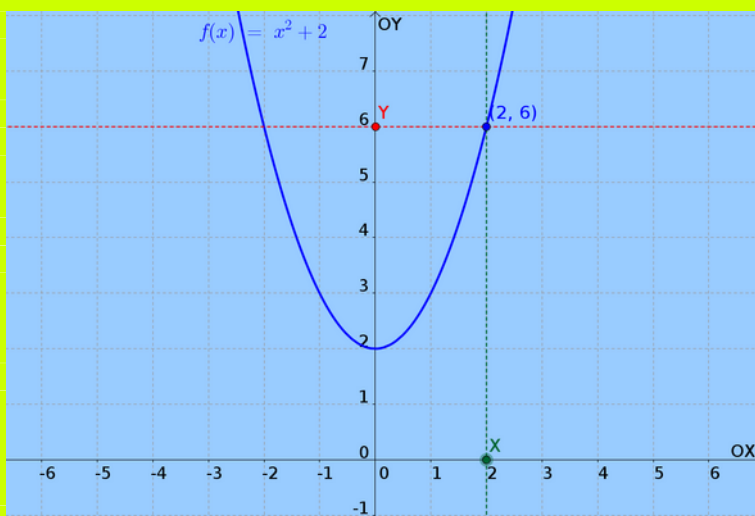
$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ , logo a ordenada é  $y=3$  e  $B(-1, 3)$  está na gráfica.

Para  $y=4$ :

$f(x) = x^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ , logo as abscisas son  $x = -\sqrt{2}$  e  $x = \sqrt{2}$  e os puntos  $C(-\sqrt{2}, 4)$  e  $D(\sqrt{2}, 4)$  están na gráfica.

Para  $y=0$ :

$f(x) = x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$ , logo non hai ningún punto de ordenada  $0$ , é dicir,  $0 \notin \text{Im } f$ .



O punto  $P(3, -2)$  estará na gráfica se  $f(3) = -2$ :  $f(3) = 3^2 + 2 = 11 \neq -2 \Rightarrow P$  non está na gráfica da función.

$f(x) = 10 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$ , logo os puntos  $E(-\sqrt{8}, 10)$  e  $F(\sqrt{8}, 10)$  pertencen á gráfica.

## 1.2. OPERACIÓNS CON FUNCIÓNS

**Def 2** Dadas dúas funcións  $f(x)$  e  $g(x)$  definidas no mesmo dominio, a suma de  $f(x)$  e  $g(x)$  é unha función que se denota por  $f+g$ , e define-se como  $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ . De xeito similar pode definir-se a diferenza de funcións:  $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$ .

Nas mesmas circunstancias, o produto de  $f(x)$  e  $g(x)$  é unha función que se denota por  $f \cdot g$ , definida como  $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ . Define-se o cociente de  $f(x)$  e  $g(x)$  como a función  $f/g$ , tal que  $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ , sempre que  $g(x) \neq 0$ .

Estas catro operacións posúen as mesmas propiedades que as operacións numéricas homólogas.

Chama-se composición de dúas funcións  $f(x)$  e  $g(x)$ , e representa-se como  $g \circ f$  a operación definida como:  $(g \circ f)(x) := g[f(x)]$ . A función así obtida chama-se función composta de  $f$  e  $g$ . É evidente que para que a composición de funcións estea ben definida é preciso que  $f(x) \in \text{Dom } g$ .

É importante destacar que esta operación é claramente non comutativa, xá que en xeral  $g \circ f \neq f \circ g$ .

Chama-se función recíproca de  $f$ , e denota-se por  $f^{-1}$ , a función tal que composta con  $f$  resulta a función identidade, de forma que  $(f \circ f^{-1})(x) := x$  e tamén  $(f^{-1} \circ f)(x) := x$ .

**Ex 3** Dadas as funcións  $f(x) = x^2 - 3$  e  $g(x) = \frac{1}{x}$ , obter as funcións  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $f \cdot g$ ,  $f/g$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f^{-1}$  e  $g^{-1}$ .

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 3 + \frac{1}{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3 - \frac{1}{x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 3) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{3}{x}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{x^2 - 3}{\frac{1}{x}} = x^3 - 3x$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 = \frac{1}{x^2} - 3$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 - 3) = \frac{1}{x^2 - 3}$$

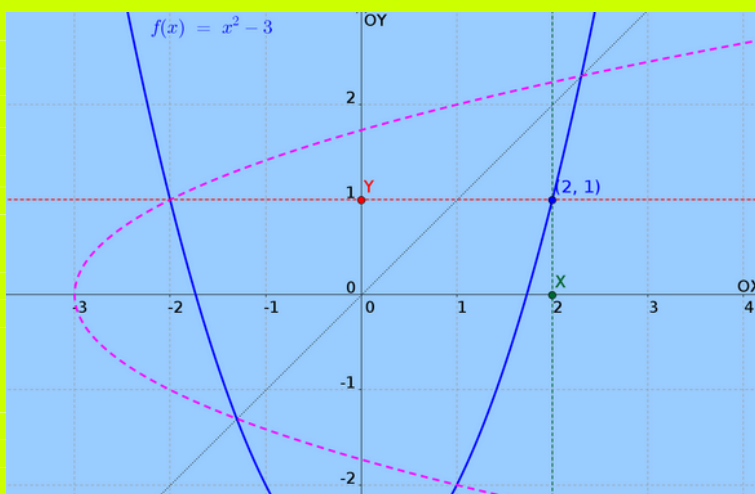
$$f(t) = u \Leftrightarrow t^2 - 3 = u \Leftrightarrow t = \pm \sqrt{u+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \pm \sqrt{x+3}$$

A función  $f$  ten polo tanto dúas recíprocas, ambas con dominio  $[-3, +\infty)$ .

$$g(t) = u \Leftrightarrow \frac{1}{t} = u \Leftrightarrow t = \frac{1}{u} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{x};$$

logo a recíproca de  $g$  é ela mesma.



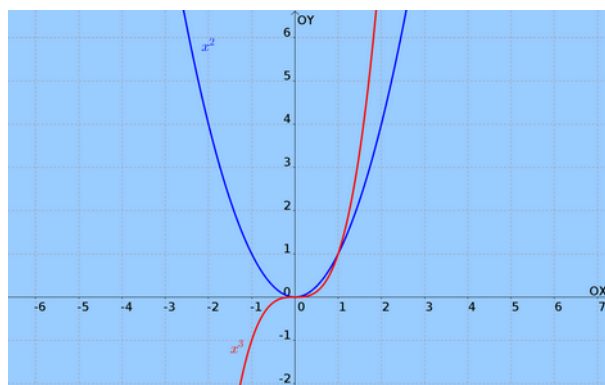
### 1.3. TIPOS DE FUNCIONES

Distinguen-se varios tipos de funcións elementares, e a partir delas, mediante as operacións definidas anteriormente, obteñen-se unha grande cantidade e variedade de novas funcións. Son os que seguen:

#### i. Función potencial

Veñen expresadas en forma de potencia na que a base é variábel:  
 $f(x) = x^k$ .

A partir destas obteñen-se mediante operacións básicas as funcións polinómicas e as funcións racionais.

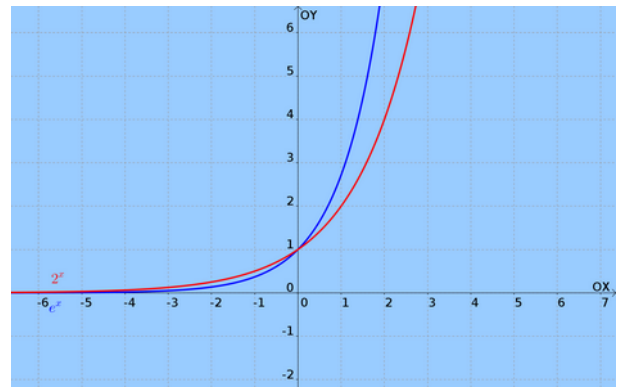


### ii. Función exponencial

Potência de base un número real positivo  $a > 0$ , e na que o expoñente é variábel:  $f(x) = a^x$ .

É de especial interese a función exponencial con base o número  $e$ , que se representa  $f(x) = e^x$  ou tamén  $f(x) = \exp(x)$ .

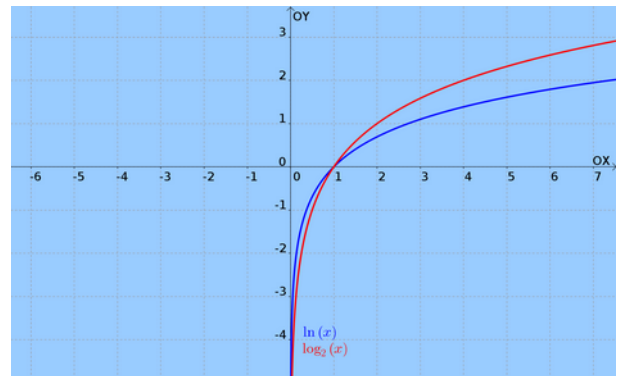
Nota: todas as funcións exponenciais poden obter-se a partir desta última.



### iii. Función logarítmica

A función logarítmico natural ou neperiano representa-se da forma  $f(x) = \ln x$ , e é a función recíproca de  $f(x) = e^x$ .

En ocasións manexan-se funcións logarítmicas con base distinta do número  $e$ . Neste caso a expresión é  $f(x) = \log_a x$ , con  $a > 0$ . Nestas funcións a variábel independente debe ser un número real positivo.

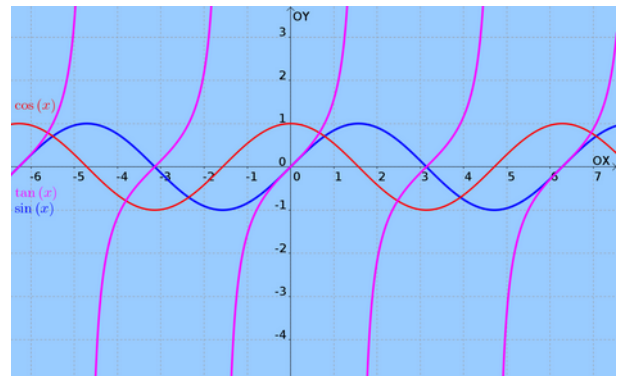


### iv. Funcións trigonométricas

Son aquelas nas que o argumento da razón trigonométrica é variábel:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad f(x) = \operatorname{cos} x \quad \text{e} \quad f(x) = \operatorname{tg} x.$$

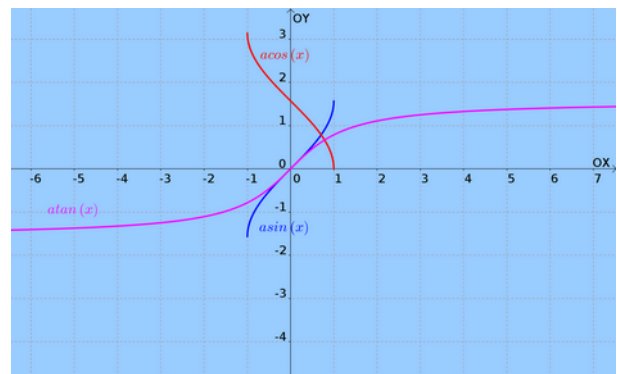
É importante destacar que nas funcións trigonométricas a variábel independente sempre se expresa en radiáns.



### v. Funcións trigonométricas inversas

Son as funcións recíprocas das anteriores:

- $f(x) = \operatorname{asen} x$ , con dominio o intervalo  $[-1, 1]$  e imaxe o intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ;
- $f(x) = \operatorname{acos} x$ , con dominio  $[-1, 1]$  e imaxe  $[0, \pi]$ ;
- $f(x) = \operatorname{atg} x$ , con dominio  $\mathbb{R}$  e imaxe  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .



## 2. SUCESIÓN DE NÚMEROS REAIS

### 2.1. DEFINICIÓN DE SUCESIÓN

**Def 3** Di-se que unha función real de variábel real é unha sucesión de números reais se o seu dominio é o conxunto dos números naturais:  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{N}$  é o conxunto dos números naturais (entende-se que  $0 \notin \mathbb{N}$ ).

Chaman-se termos da sucesión os elementos do conxunto imaxe da sucesión:  $s(1)$ ,  $s(2)$ ,  $s(3)$  ... Habitualmente os termos designan-se da forma  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  ... e a sucesión identifica-se normalmente co conxunto dos seus termos, de maneira que nos referiremos a unha sucesión como o conxunto ordenado  $s_n = \{s_1, s_2, s_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ .

A expresión  $s_n$  designa tanto á sucesión como á expresión analítica pola que se obteñen os seus termos (a fórmula). Esta fórmula, cando exista, recibe o nome de termo xeral da sucesión. En ocasións utilízase a expresión  $(s_n)$  para evitar a confusión entre a sucesión (conxunto de termos) e o termo xeral (fórmula).

### 2.2. MONOTONIA E ACOTACIÓN

**Def 4** Di-se que unha sucesión  $(s_n)$  é monótona crecente  $:\Leftrightarrow s_{n+1} \geq s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  e di-se que é monótona decrecente  $:\Leftrightarrow s_{n+1} \leq s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Di-se que unha sucesión  $(s_n)$  é acotada inferiormente  $:\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} / s_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$  e acotada superiormente  $:\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} / s_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . No caso de que unha sucesión sexa acotada inferior e superiormente, di-se simplemente que é acotada. Os elementos  $m$  e  $M$  chaman-se cota inferior e cota superior da sucesión, respectivamente.

### 2.3. CONVERXENCIA DUNHA SUCESIÓN

**Def 5** Di-se que un número real  $L$  é o límite da sucesión  $(s_n)$   $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / |s_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$ . No caso de existir o límite, dirá-se que a sucesión  $(s_n)$  é converxente.

Di-se que unha sucesión  $(s_n)$  ten límite  $+\infty$   $:\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / s_n > K \quad \forall n > n_0$ .

Di-se que a sucesión  $(s_n)$  ten límite  $-\infty$   $:\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / s_n < K \quad \forall n > n_0$ .

En calquer destes dous casos di-se que a sucesión  $(s_n)$  é diverxente.

Os métodos para determinar o límite de sucesións son similares aos que se utilizarán para calcular o límite de funcións, que será definido posteriormente. Por este motivo, o cálculo de límites de sucesións non se trata neste momento.

## 2.4. TEOREMAS DE ACOTACIÓN E CONVERXENCIA

Th 1 Teorema de Acotación

Toda sucesión converxente é acotada.

Demostración

Sexa  $(s_n)$  unha sucesión converxente e sexa  $L \in \mathbb{R}$  o seu límite. Sendo así, pola definición de límite  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / |s_n - L| < \varepsilon \forall n > n_0$ . En particular, para  $\varepsilon = 1$   $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 |s_n - L| < 1$ . De aquí deduce-se que  $\forall n > n_0 L - 1 < s_n < L + 1$  e polo tanto o máximo do conxunto  $\{L + 1, s_1, s_2, s_3 \dots s_{n-1}\}$  é unha cota superior da sucesión e o mínimo do conxunto  $\{L - 1, s_1, s_2, s_3 \dots s_{n-1}\}$  é unha cota inferior, así que a sucesión é acotada.

Th 2 Teorema de Converxencia

Toda sucesión monótona e acotada é converxente.

[Nota: Deixa-se sen demostrar.]

Ex 4 Dada a sucesión  $s_n = \frac{1+2n}{n}$ , indicar cal é o termo 25º e estudar a súa monotonía, acotación e converxencia.

O termo 25º é  $s_{25} = \frac{1+2 \cdot 25}{25} = \frac{51}{25} = 2,04$ .

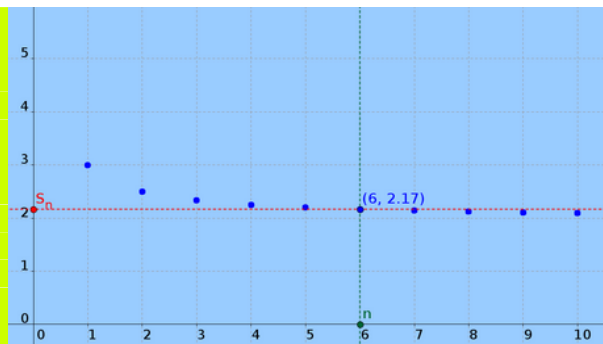
Para estudar a monotonía tomamos dous termos xenéricos consecutivos  $s_n$  e  $s_{n+1}$  e comparamos-los:

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1+2(n+1)}{n+1} - \frac{1+2n}{n} = \frac{(2n+3) \cdot n - (1+2n) \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1)} = -\frac{1}{n^2+n} \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$s_{n+1} - s_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow s_{n+1} \leq s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , logo  $s_n$  é monótona decrecente, xá que cada termo é menor ou igual que o anterior.

É evidente que  $0 \leq s_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , logo  $m=0$  é unha cota inferior e  $M=3$  é unha cota superior da sucesión.

Por ser unha sucesión monótona e acotada, é converxente. Os seus termos aproxímanse a 2, logo diremos que o límite da sucesión  $s_n$  cando  $n$  tende a  $+\infty$  é 2, e escribe-se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2n}{n} = 2$ .



### 3. LÍMITE DUNHA FUNCIÓN NUN PONTO

#### 3.1. DEFINICIÓN DE LÍMITE

##### Def 6 Límite dunha Función nun Ponto e Límites Laterais

Sexa  $a \in \mathbb{R}$ , sexa  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  unha función definida nun entorno de  $a$  (agás posibelmente o propio  $a$ ) e  $L \in \mathbb{R}$  un número real; di-se que  $L$  é o límite da función  $f$  cando  $x$  tende a  $a$  :  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \forall x \neq a \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ .

Na práctica esta idea expresa-se da forma:  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Esta definición resulta tan difícil de comprender como difícil foi o proceso histórico que deu lugar a ela. De maneira intuitiva, a idea de límite representa a tendencia dos valores da función (os valores que toma a variábel dependente  $y$ ) cando os valores de  $x$  se aproximan ao valor  $a$ .

Def 7 Define-se o límite dunha función nun punto pola esquerda, e expresa-se da forma  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , como o límite dos valores que toma a función cando  $x$  se achega a  $a$  con valores menores que o propio  $a$ . De igual forma, o límite pola dereita  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  enténdese como o límite cando  $x$  se achega a  $a$  con valores maiores que  $a$ .

A existencia de límite dunha función en  $a$  equivale a que existan os límites laterais e que ademais coincidan:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .

##### Def 8 Límites Infinitos e Límites no Infinito

Di-se que unha función  $f$  ten límite infinito cando  $x$  tende a  $a$  :  $\Leftrightarrow \forall K > 0 \exists \delta > 0 / \forall x \neq a \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > K$ .

Tamén se poden definir de maneira semellante os límites no infinito.

Di-se que unha función  $f$  ten límite  $L \in \mathbb{R}$  cando  $x$  tende a  $+\infty$  :  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x > x_0 \ |f(x)-L| < \varepsilon$ .

Di-se que  $f$  ten límite  $L \in \mathbb{R}$  cando  $x$  tende a  $-\infty$  :  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x < x_0 \ |f(x)-L| < \varepsilon$ .

Por último, di-se que unha función  $f$  ten límite infinito cando  $x$  tende a  $+\infty$  :  $\Leftrightarrow \forall K > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x > x_0 \ |f(x)| > K$ .

E análogamente, di-se que  $f$  ten límite infinito cando  $x$  tende a  $-\infty$  :  $\Leftrightarrow \forall K > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x < x_0 \ |f(x)| > K$ .

[Nota: É importante destacar que a idea de límite non depende en absoluto do valor da función no propio  $a$ , onde a función pode incluso non estar definida.]

### 3.2. PROPIEDADES DAS OPERACIÓNS CON LÍMITES

As seguintes propiedades son válidas para o cálculo de límites cando  $x \rightarrow \Delta$ , onde  $\Delta$  pode representar un número real ou  $\pm\infty$ .

i. Suma ou diferenza de límites:  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f \pm g = \lim_{x \rightarrow \Delta} f \pm \lim_{x \rightarrow \Delta} g$

ii. Produto de límites:  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f \cdot g = \lim_{x \rightarrow \Delta} f \cdot \lim_{x \rightarrow \Delta} g$

iii. Cociente de límites:  $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \rightarrow \Delta} f}{\lim_{x \rightarrow \Delta} g}$ , sempre que  $\lim_{x \rightarrow \Delta} g \neq 0$ .

iv. Potencia de límites:  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f^g = \lim_{x \rightarrow \Delta} f^{\lim_{x \rightarrow \Delta} g}$ , se  $f(x) > 0$ .

Debido a que a maior parte das funcións que se manexarán son contínuas en case todos os puntos (o concepto de continuidade precisará-se un pouco mais adiante), o método para o cálculo de límites comeza sempre por substituír a variábel  $x$  por  $\Delta$ , é dicir, para calcular  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x)$ , introduce-se o valor  $\Delta$  na expresión da función  $f$ . No caso de obtermos un número real ou un infinito, ese será o límite buscado.

Para iso utilizaremos as propiedades anteriores e tomaremos en consideración as seguintes fórmulas, nas que  $L$  representa calquer número real:

i. Suma de infinitos:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad L + (+\infty) = +\infty, \quad L + (-\infty) = -\infty.$$

ii. Produto de infinitos:

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$L \cdot (+\infty) = +\infty \text{ se } L > 0 \text{ e } L \cdot (+\infty) = -\infty \text{ se } L < 0.$$

iii. Outros casos:

$$\frac{L}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{L}{0} = \infty \text{ se } L \neq 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad L^{+\infty} = +\infty \text{ se } L > 1, \quad L^{+\infty} = 0 \text{ se } 0 < L < 1.$$

#### Ex 5 Cálculo de límites I

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) \cdot \cos x = (0^2 - 2) \cdot \cos 0 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1 - x^3} = \frac{3}{1 - (-\infty)^3} = \frac{3}{1 - (-\infty)} = \frac{3}{1 + \infty} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x}{8 - x^3} = \frac{e^2}{8 - 2^3} = \frac{e^2}{0} = \infty; \quad x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x^3 > 8 \Rightarrow 8 - x^3 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x}{8 - x^3} = -\infty$$



## 3.3. INFINITOS E INFINITÉSIMOS

**Def 9** Di-se que  $f(x)$  é un infinito para  $x \rightarrow \Delta$  se  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \pm \infty$ , onde  $\Delta$  representa un número real ou ben  $\pm \infty$ .

Dadas duas funcións  $f(x)$  e  $g(x)$  tais que  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \pm \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = \pm \infty$ , di-se que:

- $f(x)$  é un infinito de orde superior a  $g(x)$  para  $x \rightarrow \Delta$  se  $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f}{g} = \pm \infty$ ;
- son infinitos da mesma orde se  $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f}{g} = k \neq 0$ ;
- son infinitos equivalentes se  $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f}{g} = 1$ . Neste último caso escríbe-se  $f(x) \approx g(x)$ .

Exemplo de infinitos equivalentes son calquer par de polinómios do mesmo grao e mesmo coeficiente principal: se  $f(x) = 5x^3 - 3x + 4$  e  $g(x) = 5x^3$ , resulta que

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{5x^3 - 3x + 4}{5x^3} = 1.$$

Di-se neste caso que  $f(x)$  e  $g(x)$  son infinitos equivalentes en  $\pm \infty$ .

**Def 10** Di-se que  $f(x)$  é un infinitésimo para  $x \rightarrow \Delta$  se  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = 0$ .

Dadas duas funcións  $f(x)$  e  $g(x)$  tais que  $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = 0$ , di-se que  $f(x)$  e  $g(x)$  son infinitésimos equivalentes para  $x \rightarrow \Delta$  se sucede que  $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f}{g} = 1$ . Representa-se tamén da forma  $f(x) \approx g(x)$ .

Os que seguen son exemplos de infinitésimos equivalentes:

- |                                                      |                                                              |
|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| i. $x \approx \text{sen } x$ en $x \rightarrow 0$    | v. $x \approx \ln(1+x)$ en $x \rightarrow 0$                 |
| ii. $x \approx \text{tg } x$ en $x \rightarrow 0$    | vi. $x \approx e^x - 1$ en $x \rightarrow 0$                 |
| iii. $x \approx \text{asen } x$ en $x \rightarrow 0$ | vii. $\frac{x^2}{2} \approx 1 - \cos x$ en $x \rightarrow 0$ |
| iv. $x \approx \text{atg } x$ en $x \rightarrow 0$   |                                                              |

O interese dos infinitos e infinitésimos é que poden ser substituídos por outros equivalentes sen que isto altere o valor do límite.

### 3.4. INDETERMINACIÓN

Ao calcular un límite obteñen-se en ocasións certas expresións que denominamos indeterminacións. Unha indeterminación é unha expresión que a priori non proporciona o valor do límite, se é que existe. Esa expresión non é polo tanto o límite que se está a buscar, nen informa tampouco da súa existencia.

Son os seguintes casos:  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  e  $\infty^0$ .

Resolver a indeterminación consiste en transformar estas expresións en outras que nos permitan obter o valor do límite buscado, para o que se utilizan os seguintes criterios:

- a suma de infinitos é equivalente ao infinito de maior orde;
- substitución de infinitos ou infinitésimos equivalentes;
- división de polinómios dunha fracción alxébrica pola maior potencia da variábel;
- simplificación de fraccións alxébricas;
- multiplicación pola expresión conxugada;
- uso de logaritmos;
- cambios de variábel.

É de especial interese a indeterminación do tipo  $1^\infty$ , que se produce, entre outros casos, ao calcular o límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . Pode-se demostrar que esta expresión ten como límite o número  $e$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

Mediante diversas transformacións sabe-se tamén que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ , e en xeral, se

$$\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = 0, \text{ entón } \lim_{x \rightarrow \Delta} (1+f)^{\frac{1}{f}} = e.$$

A resolución de indeterminacións do tipo  $1^\infty$ , realiza-se normalmente transformando a expresión en outra equivalente na que apareza algún dos límites anteriores, ou aplicando o cálculo de logaritmos.

#### Ex 6 Cálculo de límites II

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$

É un caso de indeterminación do tipo  $\infty - \infty$ , que resolveremos multiplicando polo conxugado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x) \cdot (\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{x+6}}{x-3}$$

É un caso de indeterminación do tipo  $\frac{0}{0}$ , que resolveremos utilizando a multiplicación polo conxugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{x+6}}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - \sqrt{x+6}) \cdot (x + \sqrt{x+6})}{(x-3) \cdot (x + \sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - (x+6)}{(x-3) \cdot (x + \sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{(x-3) \cdot (x + \sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2) \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x + \sqrt{x+6})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x + \sqrt{x+6}} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5-3}{x^2+3}$

É un límite do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ , que se pode resolver dividindo pola maior potencia da variábel:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5-3}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{3}{x^5}}{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}} = \frac{1}{0} = \infty; \text{ como os límites de ambos polinómios son positivos, o cociente tamén é polo}$$

tanto resulta  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5-3}{x^2+3} = +\infty$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg}(\sin x))}{\sin(\operatorname{tg} x)}$

Como  $x \approx \sin x$  para  $x \rightarrow 0$ , podemos substituír  $\sin x$  por  $x$  e resulta  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg}(\sin x))}{\sin(\operatorname{tg} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\sin(\operatorname{tg} x)} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x^2}}$

É do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  e pode-se resolver transformando nunha única raíz e dividindo posteriormente pola maior potencia da variábel:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+5)^3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{x^3+15x^2+75x+125}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{1}{x} + \frac{15}{x^2} + \frac{75}{x^3} + \frac{125}{x^4}} = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1}$

É do tipo  $\frac{0}{0}$  e resolve-se simplificando a fracción alxébrica:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^3+x^2+x+1 = 4$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

É do tipo  $\frac{0}{0}$  e resolve-se multiplicando polo conxugado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sqrt{1-x^2}) \cdot (1+\sqrt{1-x^2})}{x \cdot (1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1-x^2)}{x \cdot (1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot (1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0$$

## 4. CONTINUIDADE

### 4.1. DEFINICIÓN DE CONTINUIDADE

**Def 11** Sexa  $f$  unha función e sexa  $x_0$  un elemento do dominio de  $f$ ; di-se que  $f$  é continua en  $x_0$  :  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Desta definición deduce-se que para que unha función sexa continua no punto  $x_0$  han de dar-se as seguintes condicións:

- i.  $f$  debe estar definida en  $x_0$ ;
- ii. ten que existir o límite de  $f$  en  $x_0$ ;
- iii. o límite há de coincidir co valor da función en  $x_0$ .

Di-se que  $f$  é continua pola esquerda en  $x_0$  :  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

De igual forma di-se que  $f$  é continua pola dereita en  $x_0$  :  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

É inmediato comprobar que a continuidade dunha función  $f$  nun punto equivale a que a función sexa continua pola esquerda e pola dereita nese mesmo punto. Nese caso resultará suficiente afirmar que a función é continua nese punto. En caso contrario será necesario estudar o continuidade lateral, que pode indicar comportamentos diferentes da función a cada un dos dous lados do punto  $x_0$ .

Di-se que unha función  $f$  é continua nun intervalo aberto  $(a, b) \subset \text{Dom } f$  se  $f$  é continua en todos e cada un dos elementos do intervalo. Unha función  $f$  é continua nun intervalo pechado  $[a, b] \subset \text{Dom } f$  se  $f$  é continua en todos os elementos do intervalo  $(a, b)$  e é continua pola dereita en  $a$  e pola esquerda en  $b$ .

**Ex 7** Estudar o valor de  $b$  para que a función  $f(x) = \begin{cases} 2x+b & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+2x+3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$  sexa continua en todo o seu dominio.

Ao ser dúas expresións polinómicas, e polo tanto continuas en todo o seu dominio, a función  $f$  só pode presentar discontinuidades en  $x=0$ .

En  $x=0$  temos  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ .

Para que exista o límite en  $x=0$  han de coincidir ambos, polo que  $b=3$ .

Así resulta que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 3$ , logo  $f$  é continua en  $\mathbb{R}$ .

## 4.2. DISCONTINUIDADES

A non continuidade dunha función nun punto pode dar-se por varias circunstancias, que provocan diferentes comportamentos gráficos da función nese punto.

- Se os límites laterais son números reais iguais pero o valor da función no punto non coincide con eles, di-se que a función ten unha discontinuidade evitábel:

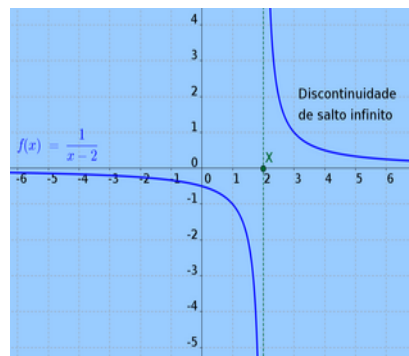
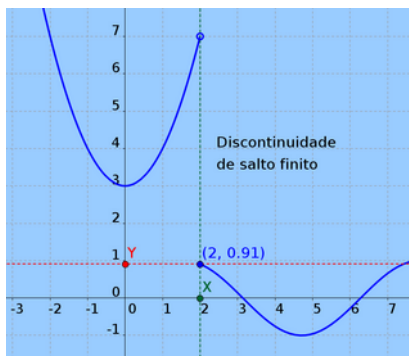
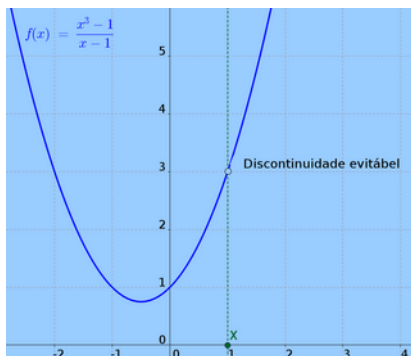
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a).$$

[Nota: É posíbel que non exista  $f(a)$ , é dicir, que  $a \notin \text{Dom } f$ .]

- Se ambos límites laterais son números reais distintos, di-se que a función presenta unha discontinuidade de salto finito:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

- Por último, se algún dos límites laterais (ou incluso ambos) son infinitos, di-se entón que a función presenta unha discontinuidade de salto infinito:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty.$$



**Ex 8** Estudar a continuidade da función  $f(x) = \frac{kx^2 - 8}{x + 2}$  e estender o seu dominio de continuidade no caso de ser posíbel.

Ao ser un cociente de dúas funcións polinómicas, e polo tanto contínuas en  $\mathbb{R}$ , a función  $f$  é tamén contínua e derivábel no seu dominio, que é  $\mathbb{R} - \{-2\}$ .

En  $x = -2$  temos:  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{4k - 8}{0}$

Este límite é  $\infty$  se  $4k - 8 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 2$ , caso no que a función  $f$  presentará unha discontinuidade de salto infinito, e polo tanto non evitábel.

No caso de que  $4k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x + 2}$  é indeterminado do tipo  $\frac{0}{0}$  e pode-se resolver simplificando a fracción alxébrica:

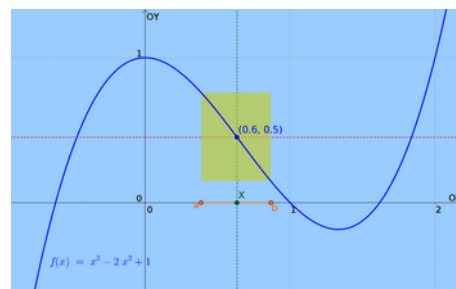
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} 2(x - 2) = -8$$

A extensión da continuidade require que a discontinuidade sexa de tipo evitábel, así que ten que ser  $k = 2$ , e a función será  $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x + 2}$ . Para estender  $f$  a  $\mathbb{R}$ , abonda con definir  $f(-2) = -8$  e daquela  $f$  convirte-se nunha función contínua en  $\mathbb{R}$ .

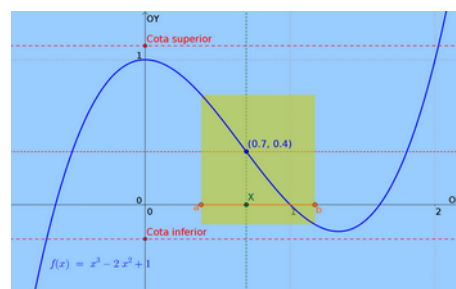
A función estendida é  $\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 8}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ -8 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ , que tamén se pode expresar de xeito máis sintético  $\hat{f}(x) = 2x - 4$ , que é por suposto contínua en  $\mathbb{R}$ .

## 4.3. VÁRIOS RESULTADOS RELATIVOS À CONTINUIDADE

i. Se  $f$  é unha función contínua en  $x_0$  e  $f(x_0) \neq 0$ , entón existe un entorno de  $x_0$  no que  $f$  toma valores do mesmo signo que  $f(x_0)$ .

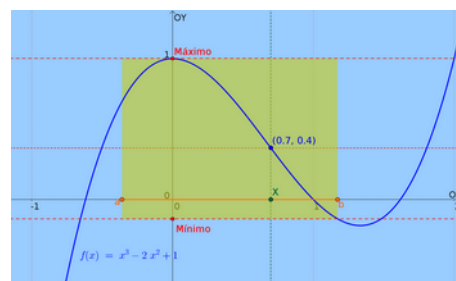


ii. Se  $f$  é unha función contínua en  $x_0$ , entón existe un entorno de  $x_0$  no que  $f$  está acotada, é dicir,  $f$  toma valores dentro dun intervalo finito.



## iii. Teorema de Weierstrass

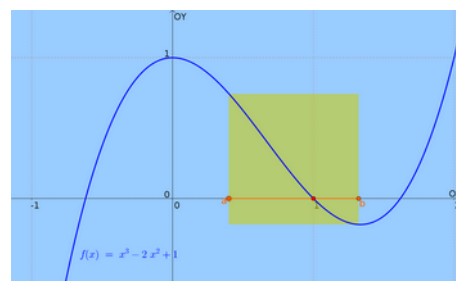
Se  $f$  é unha función contínua no intervalo  $[a, b]$ , entón  $f$  alcanza nese intervalo un valor máximo e un valor mínimo.



Th 3

## iv. Teorema de Bolzano

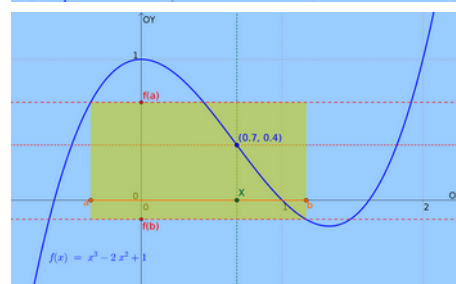
Se  $f$  é unha función contínua nun intervalo  $[a, b]$  e  $f$  toma valores de signo oposto nos extremos deste intervalo, entón existe algún elemento no intervalo aberto  $(a, b)$  no que a función se anula:  $\exists c \in (a, b) / f(c) = 0$ .



## v. Teorema de Darboux

Se  $f$  é unha función contínua en  $[a, b]$ , entón  $f$  alcanza todos os valores comprendidos entre  $f(a)$  e  $f(b)$ .

[Nota: No caso do Teorema de Darboux, en realidade  $f$  alcanza todos os valores comprendidos entre o máximo e o mínimo aos que se refire o teorema de Weierstrass.]



**Ex 9** Estudar se a ecuación  $e^x = 2 - \sin x$  ten algunha raíz real e procurar un intervalo no que se localice esa raíz.

A ecuación  $e^x = 2 - \sin x$  é equivalente a  $e^x + \sin x - 2 = 0$ , logo traballaremos coa función  $f(x) = e^x + \sin x - 2$ , que é contínua en  $\mathbb{R}$ .

En  $x=0$  temos  $f(0) = e^0 + \sin 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$  e en  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - 2 = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 > 0$ .

Así que, aplicando o teorema de Bolzano,  $\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) / f(c) = 0 \Rightarrow c$  é unha solución da ecuación, que está localizada no intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

## 5. DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PONTO

### 5.1. TAXA DE VARIACIÓN MÉDIA

Dada unha función  $f$ , enténdese por incremento de  $f$  en  $x_0$  a variación experimentada pola función cando  $x_0$  varia. De forma máis concreta: chamaremos  $\Delta x$  ao incremento experimentado pola variábel independente e, de xeito similar, chamaremos  $\Delta f$  á diferenza  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

**Def 12** Denomínase taxa de variación média da función  $f$  no intervalo de extremos  $x_0$  e  $x_0 + \Delta x$  ao cociente  $\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .

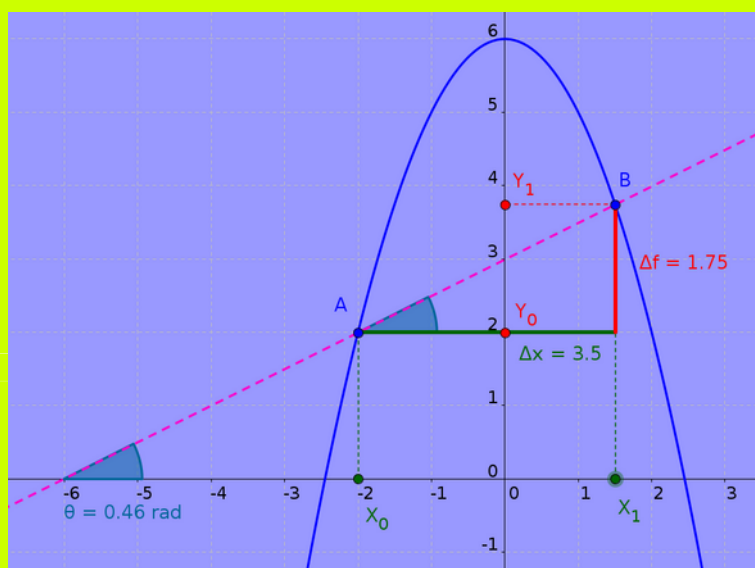
Este cociente representa a pendente do segmento de extremos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  e interpreta-se como a variación média da función no intervalo  $(x_0, x_0 + \Delta x)$ .

[Nota: Para evitar complicacións inecesárias, suporemos que  $\Delta x$  é positivo.]

**Ex 10** Calcular a taxa de variación média da función  $f(x) = 6 - x^2$  no intervalo  $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$  e o ángulo formado pola recta  $s$ , secante á curva nos puntos  $x = -2$  e  $x = \frac{3}{2}$  co eixo de abscisas e a ecuación de  $s$ .

$$\begin{aligned} f(-2) &= 6 - (-2)^2 = 6 - 4 = 2 & \text{e} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= 6 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}, \text{ logo os puntos} \\ \text{de abscisas } x = -2 \text{ e } x = \frac{3}{2} \text{ son } A(-2, 2) & \\ \text{e } B\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right); \text{ a taxa de variación média é} & \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(-2)}{\frac{3}{2} - (-2)} = \frac{\frac{15}{4} - 2}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{2} = 0,5. \end{aligned}$$

A taxa de variación média é a tanxente trigonométrica do ángulo, polo tanto  $\theta(s, OX) = \operatorname{atg} 0,5 \approx 0,46$ , e como a recta  $s$  pasa polo punto  $A(-2, 2)$  e ten pendente  $\frac{1}{2}$ , a súa ecuación é  $y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - (-2)) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$ .



## 5.2. DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PONTO

Na anterior definición da taxa de variación média, se chamamos  $h$  ao incremento  $\Delta x$  e calculamos o seu límite cando este incremento tende a cero, resulta a expresión

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Def 13** Atendendo a este límite, di-se que  $f$  é unha función derivábel en  $x_0$   
 $:\Leftrightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$

Se existe, este límite denomina-se derivada da función  $f$  no punto  $x_0$ , e designa-se

$$f'(x_0) : f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

A derivada dunha función  $f$  no punto  $x_0$  representa a pendente da súa gráfica no punto de coordenadas  $(x_0, f(x_0))$  e interpreta-se como a taxa de variación instantánea da función en  $x_0$ .

**Ex 11** Calcular a derivada da función  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  en  $x = 2$  utilizando a definición de derivada, e calcular tamén as ecuacións das rectas tanxente e normal á curva  $f(x)$  no punto  $x = 2$ .

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ e como } f(2) = 3, \text{ resulta:}$$

$$f'(2) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) + 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2$$

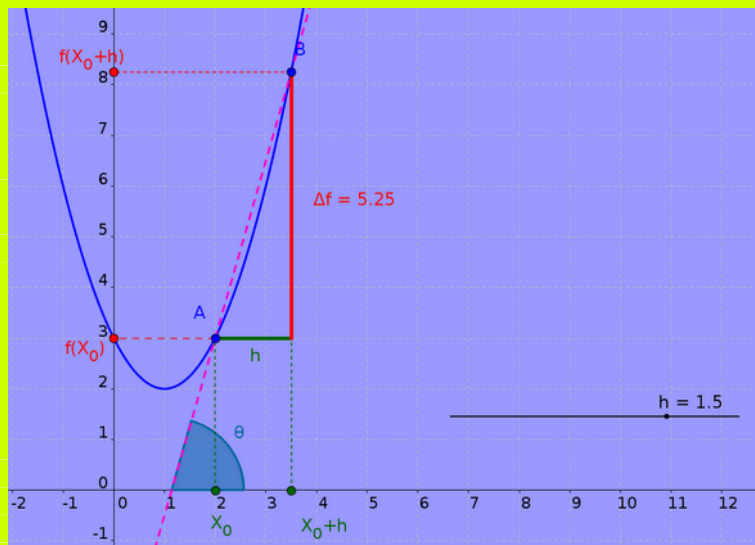
Para o cálculo do ángulo faremos:  
 $\text{tg } \theta = f'(2) = 2 \Rightarrow \theta = \text{atg } 2 = 1,11 \text{ rad}$

A ecuación da tanxente será  $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$ , logo neste caso resulta  $y - 3 = 2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 1$ .

Esta tanxente é unha recta que ten a mesma pendente que a propia curva en  $x = 2$ .

A recta normal é unha recta perpendicular á tanxente, polo tanto a súa pendente será a oposta da inversa da pendente da propia tanxente, logo  $m = -\frac{1}{2}$  e a ecuación é

$$y - 3 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4.$$





## 5.3. DERIVADAS LATERAIS

**Def 14** Definen-se as derivadas laterais de  $f$  em  $x_0$  da seguinte forma:

$f'(x_0^-) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  é a derivada lateral de  $f$  em  $x_0$  pola esquerda e

$f'(x_0^+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  é a derivada lateral de  $f$  em  $x_0$  pola direita.

Estes límites representan a pendente de  $f$  no punto  $(x_0, f(x_0))$ , considerando de maneira diferenciada os valores de  $x$  menores que  $x_0$  (derivada lateral pola esquerda) ou maiores que  $x_0$  (derivada lateral pola direita).

Desde logo, unha función  $f$  é derivábel en  $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ .

A derivabilidade dunha función nun punto implica a continuidade no mesmo, xá que:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ logo } f \text{ é continua en } x_0, \text{ e polo tanto, } x_0 \in \text{Dom } f.$$

O recíproco non é certo, xá que é posíbel que unha función continua nun punto non sexa derivábel. Así a derivabilidade dunha función é unha condición mais forte que a continuidade.

Di-se que unha función  $f$  é derivábel nun intervalo aberto  $(a, b) \subset \text{Dom } f$  se  $f$  é derivábel en todos os elementos do intervalo e di-se que é derivábel nun intervalo pechado  $[a, b] \subset \text{Dom } f$  se é derivábel no intervalo  $(a, b)$  e ademais é derivábel pola direita en  $a$  e pola esquerda en  $b$ .

**Ex 12** Calcular o valor de  $m$  para que a función  $f(x) = \begin{cases} mx-1 & \text{se } x < 3 \\ 14-x^2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$  sexa continua en todo o seu dominio e estudar nese caso a derivabilidade en  $x=3$ .

Como  $f(x) = mx-1 \quad \forall x \in (-\infty, 3)$  e  $f(x) = 14-x^2 \quad \forall x \in (3, +\infty)$ , ambas continuas nos seus dominios, temos que  $f$  é continua en  $\mathbb{R} - \{3\}$ .

Ademais  $f$  será continua en  $x=3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Leftrightarrow 3m-1=5 \Leftrightarrow m=2$ .

Para  $m=2$  temos que:

$$f'(3^-) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h) - 1 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

$$f'(3^+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{14 - (3+h)^2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-6h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -6 - h = -6$$

Logo, como  $f'(3^-) \neq f'(3^+)$ , a función non é derivábel en  $x=3$ .

## 5.4. FUNCIÓN DERIVADA

Dada unha función  $f$ , pode-se pensar na existencia de outra función que, para cada elemento  $x$  do seu dominio, proporcione a derivada de  $f$  nese punto. Este concepto é o que se coñece como función derivada de  $f$  e representa-se por  $f'(x)$ .

De forma similar pode definir-se a función derivada de  $f'(x)$ , que se coñece como a derivada segunda de  $f$ :  $f''(x)$ . E sucesivamente poden definir-se as derivadas terceira, cuarta ... e, en xeral, a derivada de orde  $n$ :  $f^{(n)}(x)$ .

**Ex 13** Calcular a función derivada de  $f(x)=x^3-x+2$  e as derivadas de  $f$  en  $x=-2$  e  $x=\frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) + 2 - (x^3 - x + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h + 2 - x^3 + x - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 - 1 = 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

Logo a función derivada de  $f$  é  $f'(x)=3x^2-1$ .

As derivadas pedidas son  $f'(-2)=3 \cdot (-2)^2 - 1 = 11$  e  $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{3}{16} - 1 = -\frac{13}{16}$ .

## 5.5. A FUNCIÓN DIFERENCIAL

Entende-se por función diferencial unha recta que aproxima a variación producida no valor dunha función por unha pequena variación no valor da variábel independente. Se  $f$  é unha función derivábel no punto  $x_0$ , a función diferencial de  $f$  en  $x_0$  representa-se por  $df$  ou tamén  $dy$ , e a súa expresión é  $dy = f'(x_0) \cdot dx$ . Os elementos que aparecen nesta definición teñen o seguinte significado:

- $dx$  é a variábel independente desta función, e mide a variación experimentada na entrada do valor de  $x$ , é dicir, a diferenza entre o valor aproximado de  $x_0$  e o propio  $x_0$ ;
- $f'(x_0)$  é o valor da derivada da función  $f$  no punto  $x_0$ , e así, a función diferencial é unha recta de igual pendente que a que ten a función  $f$  en  $x_0$ ;
- $dy$  é a variábel dependente desta función e dá o valor aproximado da variación sufrida polo valor de  $f$  debido á desviación de  $x$  a respecto do seu valor inicial  $x_0$ .

A diferencial permite aproximar funcións mediante cálculos simples, é dicir, pode calcular-se o valor aproximado que ten unha función  $f$  en  $x$ , próximo a  $x_0$ , do seguinte xeito: se  $dx$  é a desviación de  $x$  a respecto de  $x_0$ , que se mide restando  $x - x_0$ , entón  $f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$ .

**Ex 14** Calcular a diferencial da función  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 4$  e obter de xeito aproximado o valor de  $\sqrt{4,05}$  utilizando a diferencial.

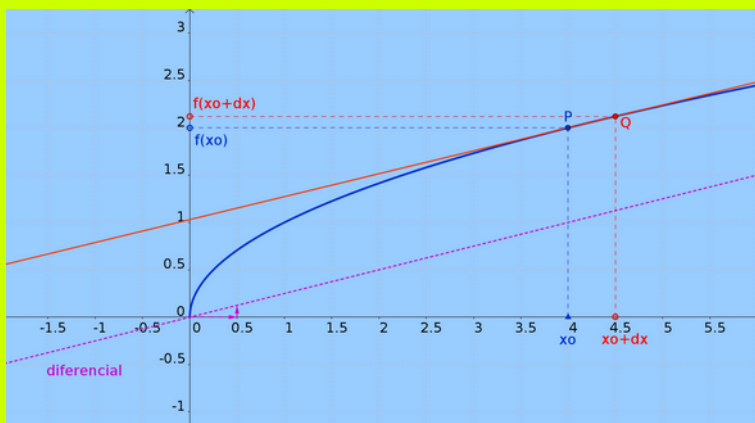
A diferencial de  $f$  en  $x = 4$  é a recta  $dy = f'(4) \cdot dx$ ; nesta recta  $dy$  representa a súa variábel dependente e  $dx$  a súa variábel independente.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ , logo a recta é  $dy = \frac{1}{4} dx$ , que é unha recta de pendente  $\frac{1}{4}$  e que pasa pola orixe de coordenadas.

Para calcular  $\sqrt{4,05}$  faremos  $x_0 = 4$  e  $dx = 0,05$ .

Así,  $\sqrt{4,05} = f(4,05) = f(4 + 0,05) \approx f(4) + f'(4) \cdot 0,05 = \sqrt{4} + \frac{1}{4} \cdot 0,05 = 2 + 0,0125 = 2,0125$ , logo  $\sqrt{4,05} \approx 2,0125$ .

Se comparamos este valor aproximado co real, podemos observar que é unha moi boa aproximación:  $\sqrt{4,05} = 2,01246118 \dots \approx 2,0125$ .



## 5.6. REGLAS DE DERIVACIÓN

No que segue dan-se algunhas propiedades do cálculo de derivadas, así como varias regras de tipo práctico, válidas para valores de  $x$  que pertencen aos domínios de  $f$  e  $g$ .

- i. As operacións suma, diferenza e produto de funcións derivábeis é unha función tamén derivábel.

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  son funcións derivábeis, entón:

- $(f+g)' = f' + g'$  (di-se que a derivada conserva a suma de funcións)
- $(f-g)' = f' - g'$  (a derivada conserva a diferenza de funcións)

- ii. O produto dunha función derivábel por unha constante ou por outra función derivábel, tamén é derivábel.

Se  $k$  é unha constante e  $f(x)$  e  $g(x)$  son funcións derivábeis, entón:

- $(k \cdot f)' = k \cdot f'$  (a derivada conserva o produto por escalares)
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

- iii. O cociente de función derivábeis é unha función derivábel no seu dominio.

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  son funcións derivábeis, entón: 
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \forall x \mid g(x) \neq 0$$

- iv. Regra da cadea: a composición de funcións derivábeis é unha función derivábel.

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  son funcións derivábeis, entón:

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) \quad \forall x \mid f(x) \in \text{Dom } g.$$

## 5.7. DERIVADAS DAS FUNCIÓNS ELEMENTARES

Para o cálculo de derivadas das funcións elementares usan-se as seguintes fórmulas;

Notas: 1. Nestas fórmulas, se  $f$  é unha función, expresaremos a súa derivada como  $D(f)$ .  
2. Nas fórmulas de derivación composta,  $u$  representa unha función  $u(x)$  e  $u'$  a súa derivada.

1. Función potencial:  $D(x^k) = k \cdot x^{k-1}$   $D(u^k) = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$
2. Función exponencial (base  $e$ ):  $D(e^x) = e^x$   $D(e^u) = e^u \cdot u'$
3. Función exponencial (base  $a > 0$ ):  $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$   $D(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
4. Función logaritmo natural (base  $e$ ):  $D(\ln x) = \frac{1}{x}$   $D(\ln u) = \frac{u'}{u}$

[Nota: No logaritmo natural, ou tamén neperiano,  $x$  ou  $u$  han de ser positivas.]

5. Función logarítmica (base  $a > 0$ ):  $D(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$   $D(\log_a u) = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

[Nota:  $x$  ou  $u$  han de ser positivas.]

6. Funcións trigonométricas:

$$\begin{aligned} D(\sin x) &= \cos x & D(\sin u) &= \cos u \cdot u' \\ D(\cos x) &= -\sin x & D(\cos u) &= -\sin u \cdot u' \\ D(\tan x) &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x & D(\tan u) &= \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \tan^2 u) \cdot u' \end{aligned}$$

7. Funcións trigonométricas inversas:

$$\begin{aligned} D(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & D(\arcsin u) &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ D(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & D(\arccos u) &= -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ D(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2} & D(\arctan u) &= \frac{u'}{1+u^2} \end{aligned}$$

**Ex 15** Calcular as funcións derivadas das funcións:  $f(x) = 5x^3 - \frac{\sin x}{2} + 8$ ,  $g(x) = \tan x \cdot \ln x$ ,  $h(x) = \frac{2x^2}{\cos x}$  e  $j(x) = -2e^{\sin^2 x}$ .

- $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - \frac{\cos x}{2} = 15x^2 - \frac{\cos x}{2}$
- $g'(x) = \sec^2 x \cdot \ln x + \tan x \cdot \frac{1}{x} = \sec^2 x \cdot \ln x + \frac{\tan x}{x}$
- $h'(x) = \frac{4x \cdot \cos x - 2x^2 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{4x \cdot \cos x + 2x^2 \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2x}{\cos^2 x} \cdot (2 \cos x + x \sin x)$
- $j'(x) = -2e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = -2e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x$

## 5.8. OUTROS MÉTODOS DE DERIVACIÓN

### Derivada da función recíproca

Como consecuencia da regra da cadea, pode obter-se a derivada dunha función  $f$  a partir da súa recíproca  $g$ .

Supoñendo que se coñece a derivada de  $g$ , resulta  $(g \circ f)(x) = x$ , e utilizando a regra da cadea para derivar ambos membros obtemos a derivada de  $f$  facendo:

$$g'[f(x)] \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]}.$$

**Ex 16** Obter a función derivada da función  $f(x) = \ln x$ .

Se chamamos  $g$  á función exponencial,  $g(x) = e^x$ , a función logarítmica resulta ser a súa recíproca:  $f^{-1}(x) = g(x)$ .

Sabemos que  $(g \circ f)(x) = x$ , e pola regra da cadea, derivando ambos membros obtemos:

$$g'[f(x)] \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]}$$

Sabemos que  $g'(x) = e^x$  e que  $f(x) = \ln x$ , así que na expresión anterior obtemos  $f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$ .

Así que a derivada de  $f(x) = \ln x$  é  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

### Derivación implícita

Este método utilízase para derivar funcións expresadas de maneira implícita, é dicir, funcións nas que a variábel dependente  $y$  non aparece de xeito directo como unha expresión da variábel independente  $x$ . Nestes casos as expresións en  $x$  (variábel independente) derivan-se normalmente e as expresións en  $y$  (variábel dependente) derivan-se como funcións compostas, engadindo-lle o factor  $y'$ . Este factor resolverá-se finalmente como función do resto de expresións aparecidas durante o proceso de derivación.

**Ex 17** Obter a función derivada da función  $y$  na expresión implícita  $xy^2 + y^3 - x^2 + 2 = 0$ .

Ao derivar ambos membros resulta  $y^2 + 2xyy' + 3y^2y' - 2x = 0$ .

Extraendo factor común e resolvendo  $y'$  obtemos  $(2xy + 3y^2) \cdot y' = 2x - y^2 \Rightarrow y' = \frac{2x - y^2}{2xy + 3y^2}$ .

### Derivación logarítmica

É útil principalmente no caso de expresións que conteñen potencias nas que a variábel  $x$  aparece tanto na base como no exponente. Nestes casos, aplicando as propiedades logarítmicas é posíbel transformar a expresión orixinal en outra que permite aplicar as regras de derivación.

**Ex 18** Obter a función derivada da función  $f(x) = x^{\sin x}$ .

Utilizando as propiedades dos logaritmos resulta que  $\ln[f(x)] = \ln[x^{\sin x}] = \sin x \cdot \ln x$ , e derivando ambos membros da identidade obtén-se  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$ .

Resolvendo  $f'(x)$  temos  $f'(x) = \left( \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot f(x) = \left( \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot x^{\sin x}$ .

## 6. TEOREMAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

### 6.1. TEOREMA DE ROLLE

Un dos obxectivos principais do cálculo diferencial é a expresión dunha función como suma dunha serie de funcións potenciais: en certo modo, as funcións potenciais permiten aproximar cuase calquer función. Nesta dirección apuntan os teoremas que seguen, aínda que neste tema non se dá por completado este proceso.

#### Th 4 Teorema de Rolle

Sexa  $f$  unha función continua no intervalo  $[a, b]$ , derivábel no intervalo  $(a, b)$  e tal que  $f(a)=f(b)$ ; entón  $\exists c \in (a, b) / f'(c)=0$ .

#### Demostración

Como consecuencia do teorema de Weierstrass, a función  $f$  alcanzará un máximo e un mínimo absolutos no intervalo  $[a, b]$ . No caso de que estes valores se atopen ambos nos extremos do intervalo, entón estamos ante unha función constante no intervalo  $[a, b]$  e polo tanto a súa derivada será nula en todo o intervalo.

En outro caso, ben o máximo ou ben o mínimo alcanzarán-se no interior do intervalo; supoñamos que é o máximo o que se alcanza no intervalo  $(a, b)$ . Neste caso  $\exists c \in (a, b) / \forall x \in [a, b] f(c) \geq f(x)$ .

Logo se  $h$  é o incremento da variábel  $x$ , temos que  $f(c+h) \leq f(c) \Rightarrow f(c+h)-f(c) \leq 0$ . Así, xá que a función é derivábel en  $c$ , existen as dúas derivadas laterais, que resultan:

$$\text{i. se } h > 0 : f'(c^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 ;$$

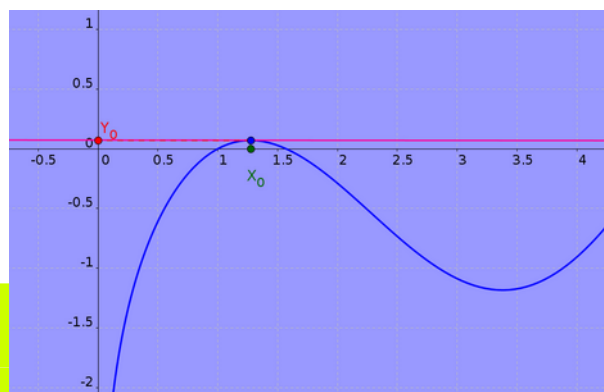
$$\text{ii. se } h < 0 : f'(c^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 .$$

Mas ambas derivadas laterais han de coincidir, e polo tanto  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$ .

[Nota: Se fose o mínimo o que se atopa no intervalo  $(a, b)$ , a demostración sería análoga.]

#### Interpretación xeométrica do Teorema de Rolle

Unha función continua e derivábel ("suave"), que tome o mesmo valor nos extremos dun intervalo fechado, presenta polo menos un punto do intervalo no que a súa pendente é nula. Este punto de pendente nula representa un extremo relativo da función (máximo ou mínimo).



**Ex 19** Estudar se a función  $f(x) = \ln x \cdot \cos x$  presenta algún punto no que a súa derivada sexa nula e indicar un intervalo no que se localice a solución.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x = 0$ , ecuación que resulta imposible de resolver polos métodos habituais.

A función é continua e derivábel en  $(0, +\infty)$ ;  $f(1) = \ln 1 \cdot \cos 1 = 0$  e  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$ , logo polo Teorema de Rolle há de existir  $c \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right) / f'(c) = 0$ .

## 6.2. TEOREMA DO VALOR MÉDIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Th 5 Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial (ou de Lagrange)

Sexa  $f$  unha función continua no intervalo  $[a, b]$  e derivábel no intervalo  $(a, b)$ ; entón  
 $\exists c \in (a, b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Demostración

Define-se a función  $s(x) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$ , que representa a recta secante (corda) determinada polos puntos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , e a partir desta define-se  $g(x) := f(x) - s(x)$ , que representa a diferenza entre a función  $f$  e a recta secante  $s$ .

É inmediato probar que a función  $g$  está nas hipóteses do teorema de Rolle:

- $g(x)$  é unha función continua en  $[a, b]$ , por ser diferenza de dúas funcións continuas ( $f$  por hipótese e  $s$  por ser unha recta);
- $g(x)$  é unha función derivábel en  $(a, b)$ , por ser diferenza de dúas funcións derivábeis (de novo  $f$  por hipótese e  $s$  por ser unha recta);
- $g(a) = g(b)$ .

Logo, para a función  $g$  o Teorema de Rolle afirma que  $\exists c \in (a, b) / g'(c) = 0$ . E como

$g'(x) := f'(x) - s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , obtemos que:

$$g'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretación xeométrica do Teorema de Lagrange

Na demostración do teorema, a función definida como  $s(x)$  presenta unha variación constante entre os puntos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  por ser unha recta, e a súa pendente é  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , cociente que representa a taxa de variación média de función  $f(x)$ .

O teorema afirma que no intervalo  $(a, b)$  há de existir algún punto  $c$  no que a variación instantánea, que ven representada pola derivada  $f'(c)$ , coincide coa taxa de variación média  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Ex 20** Estudar se a función  $f(x) = 3x^3 - 4$  está nas hipóteses do Teorema de Lagrange e, nese caso, calcular o punto  $c$  ao que se refire o teorema no intervalo  $[-1, 4]$ .

A función é continua e derivábel en todo o seu dominio, e en particular no intervalo  $[-1, 4]$ , así que  
 $\exists c \in [-1, 4] / f'(c) = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)}$ .

$$f'(x) = 9x^2, \text{ logo } 9x^2 = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{188 - (-7)}{5} \Leftrightarrow 9x^2 = \frac{195}{5} = 39 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{39}{9}} = \pm \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

$$-\frac{\sqrt{39}}{3} \notin (-1, 4), \text{ logo o punto ao que se refire o teorema é } c = \frac{\sqrt{39}}{3} \in (-1, 4).$$



## 6.3. REGRA DE L'HÔPITAL

Unha das consecuencias do anterior é a Regra de L'Hôpital, útil para a resolución dun grande número de indeterminacións que aparecen habitualmente no cálculo de límites.

Th 6 Regra de L'Hôpital

Sexan  $f$  e  $g$  dúas funcións contínuas nun entorno do punto  $a$ , e derivábeis nese mesmo entorno (salvo posibelmente no propio  $a$ ), tal que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  (infinitésimos en  $a$ ). Nestas circunstancias, se existe o límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , entón:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

[Nota: Deixa-se sen demostrar.]

A regra de L'Hôpital resolve indeterminacións do tipo  $\frac{0}{0}$ , calculando o límite do cociente das derivadas do numerador e do denominador, mas permite tamén resolver de maneira idéntica a indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$  e, con pequenas modificacións na expresión da función que se está a manexar, resolve ademais indeterminacións dos tipos  $\infty - \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  e  $\infty^0$ .

É asimesmo de aplicación no cálculo de límites infinitos, límites no infinito e límites laterais.

## Ex 21 Cálculo de límites III: regra de L'Hôpital.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x}$

É un caso de indeterminación do tipo  $\frac{0}{0}$ , que resolveremos utilizando a Regra de L'Hôpital e simplificando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x} = 1$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x + 1 - e^x}$

É un caso de indeterminación do tipo  $\frac{0}{0}$ , que resolveremos usando a Regra de L'Hôpital e simplificando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x + 1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - e^x}. \text{ Este límite segue a ser do tipo } \frac{0}{0}, \text{ polo que podemos aplicar de novo L'Hôpital:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-e^x} = -2$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

É do tipo potencial-exponencial e resolve-se aplicando as propiedades logarítmicas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x}$$

O límite do expoñente é do tipo  $0 \cdot \infty$  e pode-se resolver transformando-o nun cociente e usando posteriormente

$$\text{a Regra de L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

## 7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

No que segue, expoñen-se os principais elementos a estudar cara a representación gráfica dunha función. A orde da exposición responde a un esquema tradicional, aínda que non é preceptiva. Tampouco é imprescindible realizar o estudo completo en todos os casos; en ocasións o estudo duns poucos elementos resulta suficiente para obter unha boa representación gráfica da función.

### 7.1. DOMÍNIO DE DEFINICIÓN

Se non se indica de forma explícita, entenderemos que o dominio dunha función é o conxunto de todos os números reais nos que a expresión ten sentido. A estes efectos, o cálculo do dominio contemplará os distintos elementos que integran a fórmula alxébrica. En particular, haberá que ter en conta os valores en que se anule algún denominador, os valores que produzan radicandos negativos en raíces de índice par, no caso dos logaritmos os valores para os que o argumento resulte nulo ou negativo, no caso das funcións exponenciais os valores para os que a base sexa de signo negativo ou os valores que produzan potencias de base e expoñente nulos.

### 7.2. CONTINUIDADE E DERIVABILIDADE

Relacionado co dominio, debe-se estudar tamén a continuidade da función, identificando as posibles discontinuidades que aparezan e o tipo a que pertencen, e a derivabilidade, identificando os valores para os que a función non é derivábel.

### 7.3. PONTOS DE CORTE COS EIXOS

Consiste en obter as coordenadas dos puntos nos que a gráfica corta ao eixo de abscisas (eixo  $OX$ ) e ao de ordenadas (eixo  $OY$ ).

No primeiro caso o cálculo realiza-se resolvendo a ecuación  $f(x)=0$ . Se  $x_0$  é unha solución desta ecuación, entón o punto  $A(x_0,0)$  é un punto de corte co eixo  $OX$  (é posíbel que non existan puntos de corte co eixo  $OX$ , ou que existan máis de un).

No segundo caso calcula-se  $f(0)$ , sempre que  $0 \in \text{Dom } f$ , de xeito que o punto  $B(0,f(0))$  é o punto de corte co eixo  $OY$ . Se existe punto de corte co eixo  $OY$ , é único.

### 7.4. SIGNO DA FUNCIÓN

Consiste en obter os intervalos en que os valores da función son de signo positivo ou negativo. Para realizar este estudo hai que ter en conta os intervalos de definición da función (o dominio), as discontinuidades e os puntos de corte co eixo  $OX$ .

### 7.5. SIMETRÍA

O estudo da simetría dunha función consiste na comparación do valor de  $f$  en puntos opostos  $x$  e  $-x$ , e para iso calcula-se a expresión  $f(-x)$ .

Diremos que  $f$  presenta unha simetría par se do cálculo anterior resulta  $f(-x)=f(x) \quad \forall x \in \text{Dom } f$ ; e diremos que  $f$  presenta unha simetría impar se resulta  $f(-x)=-f(x) \quad \forall x \in \text{Dom } f$ .

En termos gráficos, a simetría par representa unha reflexión a respecto do eixo  $OY$ , e a simetría impar representa un xiro de  $180^\circ$  arredor da orixe de coordenadas.

## 7.6. PERIODICIDADE

Esta característica aparece asociada a algunhas funcións de tipo trigonométrico. Unha función  $f$  é periódica se  $\exists T \in \mathbb{R} / \forall x \in \text{Dom } f \quad f(x) = f(x+T)$ . Neste caso o valor  $T$  chama-se período da función.

## 7.7. ASÍNTOTAS

As asíntotas dunha función son rectas que aproximan a súa gráfica en certas rexións do plano cartesiano. Existen tres tipos de asíntotas.

### Asíntotas horizontais

Representan unha aproximación dos valores da función para valores de  $x$  extremadamente distantes da orixe de coordenadas, no caso de que a función tenda a estabilizar-se nun valor constante.

Para obter estas asíntotas calculan-se os límites da función cando  $x$  tende a  $+\infty$  ou a  $-\infty$ , se existen:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = c$  é unha asíntota horizontal de  $f$ .

### Asíntotas oblicuas

Igual que as asíntotas horizontais, representan unha aproximación dos valores da función para valores extremos de  $x$ , no caso de que a función tenda a adoptar un crecemento ou decrecemento constantes. Estas asíntotas son rectas de pendente non nula, que terán unha ecuación do tipo  $y = mx + b$ .

A pendente  $m$  desta recta obtén-se calculando  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x)$  ou tamén  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ , sempre e cando estes límites sexan reais e non nulos.

A ordenada na orixe  $b$  obtén-se calculando  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx$ , de xeito que se  $m, b \in \mathbb{R}$  e  $m \neq 0$ , entón  $y = mx + b$  será a asíntota buscada.

[Nota: Pode acontecer que existan asíntotas horizontais ou oblicuas diferentes en  $x \rightarrow +\infty$  e en  $x \rightarrow -\infty$ ; mas o que non pode ocorrer por razóns óbvias é que no mesmo lado convivan unha asíntota horizontal con outra oblicua.]

### Asíntotas verticais

Representan o comportamento da función no entorno dos puntos onde se producen discontinuidades de tipo infinito.

Se acontece que algún dos límites laterais (ou ambos) é infinito, é dicir, se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ , entón a recta  $x = a$  é unha asíntota vertical de  $f$ .

## 7.8. MONOTONIA E EXTREMOS

O estudo da monotonia consiste en coñecer os intervalos en que a función é crecente ou decrecente. Para a localización destes intervalos haberá que tomar en consideración os intervalos de definición da función (dominio), as posíbeis discontinuidades e os valores de  $x$  en que se anula a primeira derivada de  $f$ . O signo da primeira derivada nos intervalos resultantes da análise anterior indica o crecemento ou decrecemento en cada un deles. De forma mais precisa: se  $f$  é unha función derivábel nun intervalo aberto  $I$ , entón:

- i.  $\forall x \in I \ f'(x) > 0 \Rightarrow f$  é estritamente crecente no intervalo  $I$ ;
- ii.  $\forall x \in I \ f'(x) < 0 \Rightarrow f$  é estritamente decrecente no intervalo  $I$ .

Para a obtención dos extremos relativos da función terán-se en conta os valores de  $x$  que son extremos dos intervalos de definición da función e os valores nos que a función ten derivada nula. En particular:

- i. se  $f$  é contínua en  $x_0$ , estritamente crecente no intervalo  $(a, x_0)$  e estritamente decrecente no intervalo  $(x_0, b)$ , entón  $f$  ten un máximo relativo en  $x_0$ ;
- ii. se  $f$  é contínua en  $x_0$ , estritamente decrecente no intervalo  $(a, x_0)$  e estritamente crecente no intervalo  $(x_0, b)$ , entón  $f$  ten un mínimo relativo en  $x_0$ .

Ou ben, atendendo ao valor da primeira derivada:

- i. se  $f'(x_0)=0$  e  $f''(x_0)<0$  entón  $f$  ten un máximo relativo en  $x_0$ ;
- ii. se  $f'(x_0)=0$  e  $f''(x_0)>0$  entón  $f$  ten un mínimo relativo en  $x_0$ .

En xeral, se  $f^{(n)}(x_0)=0 \ \forall n \leq N$  e  $f^{(N+1)}(x_0) \neq 0$ , sendo  $N$  un número impar, entón  $f$  ten un extremo relativo en  $x_0$ .

O estudo dos máximos e mínimos absolutos dunha función deberá contemplar todos os extremos relativos, o dominio e as posíbeis discontinuidades.

## 7.9. CURVATURA E PONTOS DE INFLEXIÓN

Por convénio enténdese que a función  $y=x^2$  é cóncava. O estudo da curvatura dunha función consiste en determinar os intervalos en que a función é cóncava ou convexa. Para determinar estes intervalos haberá que ter en conta os intervalos de definición da función, as posíbeis discontinuidades e os valores de  $x$  nos que a derivada segunda se anula. Dado un intervalo aberto  $I$  no que a función é dúas veces derivábel, ten-se que:

- i.  $\forall x \in I \ f''(x) > 0 \Rightarrow f$  é convexa no intervalo  $I$ ;
- ii.  $\forall x \in I \ f''(x) < 0 \Rightarrow f$  é cóncava no intervalo  $I$ .

Chama-se punto de inflexión a todo punto da gráfica no que a función muda a súa curvatura. Se  $f$  é contínua en  $x_0$ , e presenta curvatura de diferente signo nos intervalos  $(a, x_0)$  e  $(x_0, b)$ , entón  $f$  ten un punto de inflexión en  $x_0$ .

O seguinte criterio proporciona puntos de curvatura dunha función: se  $f''(x_0)=0$  e  $f'''(x_0) \neq 0$  entón  $f$  ten un punto de inflexión en  $x_0$ .

E, en xeral, se  $f^{(n)}(x_0)=0 \ \forall n \leq N$  e  $f^{(N+1)}(x_0) \neq 0$ , sendo  $N$  un número par, entón  $f$  ten un punto de inflexión en  $x_0$ .

Un estudo completo dos puntos de inflexión deberá contemplar tamén a posibilidade de que existan puntos con tanxente vertical.

**Ex 22** Facer un estudo completo da función  $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$  e representá-la graficamente.

### Domínio, continuidade e derivabilidade

Por ser cociente de dous polinómios, é unha función continua e derivábel en todo o seu dominio:  $Dom f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ .

Non é periódica (por non ser trigonométrica) e presenta unha simetría impar:  $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = -\frac{x}{x^2-4} = -f(x)$

En  $x = -2$  temos:  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2-4} = \infty$ ; e os límites laterais son:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \end{cases}$$

En  $x = 2$  temos:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2-4} = \infty$ ; e os límites laterais son:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \end{cases}$$

Logo  $f$  ten dúas discontinuidades de salto infinito en  $x = -2$  e  $x = 2$ , polo que presenta dúas asíntotas verticais.

### Cortes cos eixos e signo

Eixo  $OX$ :  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , así que corta ao eixo  $OX$  no punto  $O(0,0)$ , que é tamén o punto de corte co eixo  $OY$ .

O signo virá determinado polas discontinuidades e polos puntos de corte co eixo  $OX$ :

- En  $(-\infty, -2)$ :  $f(-3) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -2)$
- En  $(-2, 0)$ :  $f(-1) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in (-2, 0)$
- En  $(0, 2)$ :  $f(1) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 2)$
- En  $(2, +\infty)$ :  $f(3) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$

### Asíntotas

Asíntotas horizontais:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$ , logo existe unha asíntota horizontal  $y = 0$  en  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Asíntotas verticais:  $x = -2$  e  $x = 2$  como xa foi determinado anteriormente.

Asíntotas oblicuas: non existen debido a que existe asíntota horizontal tanto en  $x \rightarrow +\infty$  como en  $x \rightarrow -\infty$ .

### Monotonía e Extremos

$$f'(x) = \frac{x^2-4-x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2};$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x^2+4 = 0$ , logo non hai extremos relativos.

A primeira derivada pode-se expresar da forma

$$f'(x) = -\frac{x+4}{(x-4)^2} < 0 \quad \forall x \in Dom f, \text{ e polo tanto } f \text{ é}$$

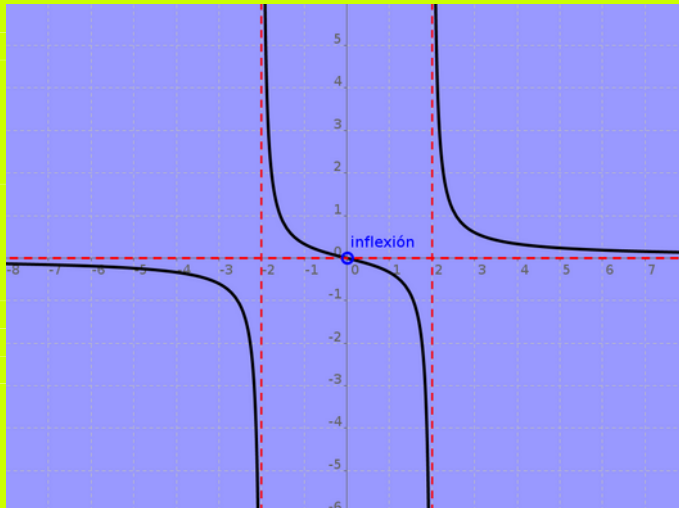
monótona decrecente en todo o seu dominio.

### Curvatura e Pontos de Inflexión

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2-4)^2 - (x^2-4) \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{(-2x) \cdot (x^2-4) + 4x \cdot (x^2+4)}{(x^2-4)^3} = \frac{2x \cdot (x^2+12)}{(x^2-4)^3};$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$



Logo hai unha posíbel inflexión en  $x = 0$ , e estudaremos o signo da segunda derivada nos intervalos:

- $(-\infty, -2)$ :  $f''(-3) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -2)$
- $(-2, 0)$ :  $f''(-1) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in (-2, 0)$
- $(0, 2)$ :  $f''(1) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 2)$
- $(2, +\infty)$ :  $f''(3) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$

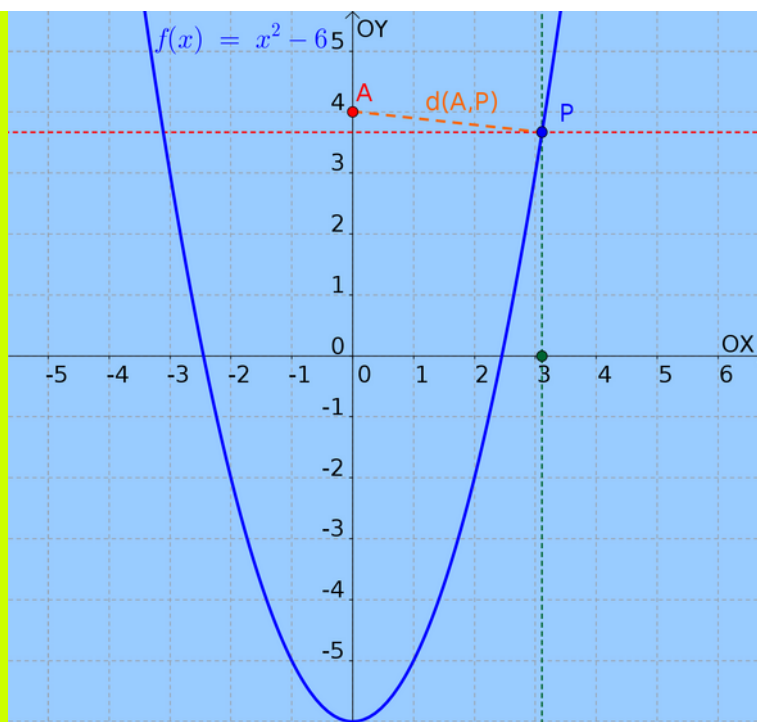
Logo  $f$  é cóncava en  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$  e convexa en  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ .

## 8. OPTIMIZACIÓN

O problema da optimización consiste na procura dos valores óptimos (os extremos, máximos ou mínimos) de determinadas funcións que representan fenómenos de tipo físico, xeométrico, técnico, económico ou, en xeral, problemas que se podan modelar mediante a relación numérica entre (no noso caso) dúas variábeis. Para a resolución deste tipo de problemas é necesario dar os seguintes pasos.

- i. Identificación das variábeis. É necesario definir as magnitudes variábeis do problema. Entre estas magnitudes (que no noso nivel, haberán de reducir-se a dúas) determinará-se a variábel independente e o resto de variábeis ou magnitudes que son dependentes dela. Para establecer estas relacións de dependencia entre as distintas variábeis terán-se en conta as posíbeis restricións do problema, ou sexa, aquelas magnitudes que estean sometidas a algúnha condición. Terán-se en conta ademais os valores das variábeis que non teñen cabida no problema por carecer de significado (por exemplo, lonxitudes negativas).
- ii. Obtención da relación funcional. As condicións do problema deberán permitir establecer unha relación funcional entre a variábel independente e a magnitude que se desexa optimizar, de maneira que os valores que tome esta última podan expresar-se exclusivamente como función da variábel independente. En ocasións esta relación é unha expresión implícita, ou sexa, unha ecuación na que se ven involucradas ambas variábeis.
- iii. Cálculo dos extremos relativos. Utilizando as técnicas do cálculo diferencial, calcularán-se os extremos relativos da función obtida anteriormente. Para realizar un estudo correcto dos extremos analizarán-se as restricións propias do problema e determinarán-se no seu caso os extremos absolutos. A determinación dos extremos relativos implica ademais distinguir se son máximos ou mínimos.
- iv. Conclusión. Unha vez obtidos os extremos absolutos, dará-se unha interpretación do resultado en relación ás magnitudes que aparecen no enunciado do problema, para rexeitar aquelas solucións que posibelmente non respondan ás condicións iniciais ou restricións, e exporá-se de maneira completa e ordenada a solución final do problema e o valor óptimo da magnitude que se buscaba.

**Ex 23** Obter os pontos da gráfica da función  $f(x)=x^2-6$  que se atopan a menor distancia do punto  $A(0,4)$ .



Os puntos da gráfica de  $f$  son da forma  $P(x, x^2-6)$ , e a distancia do punto  $P$  ao punto  $A$  pode-se expresar da forma:  
 $d(A, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-6-4)^2} = \sqrt{x^4 - 19x^2 + 100}$ .

Logo a función a optimizar é  $d(x) = \sqrt{x^4 - 19x^2 + 100}$ .

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 38x}{2\sqrt{x^4 - 19x^2 + 100}} = \frac{2x^3 - 19x}{\sqrt{x^4 - 19x^2 + 100}}$$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 19x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x^2 - 19) = 0$ , logo existen tres posibles extremos relativos, que son  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = +\sqrt{\frac{19}{2}}$  e  $x_3 = -\sqrt{\frac{19}{2}}$ .

Obtemos a derivada segunda para determinar se son máximos ou mínimos:

$$d''(x) = \frac{(6x^2 - 19) \cdot \sqrt{x^4 - 19x^2 + 100} - (2x^3 - 19x) \cdot \frac{2x^3 - 19x}{\sqrt{x^4 - 19x^2 + 100}}}{x^4 - 19x^2 + 100} = \frac{(6x^2 - 19) \cdot (x^4 - 19x^2 + 100) - (2x^3 - 19x)^2}{\sqrt{(x^4 - 19x^2 + 100)^3}}$$

O signo da segunda derivada depende exclusivamente do seu numerador, que é  $(6x^2 - 19) \cdot (x^4 - 19x^2 + 100) - (2x^3 - 19x)^2 = 2x^6 - 57x^4 + 600x^2 - 1.900$

Esta expresión toma valor  $-1.900 < 0$  en  $x = 0$ , e en  $x = \pm\sqrt{\frac{19}{2}}$  toma valor:

$$2 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^6 - 57 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^4 + 600 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^2 - 1.900 = 2 \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^3 - 57 \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 600 \cdot \frac{19}{2} - 1.900 = \frac{6.859}{4} - \frac{20.577}{4} + 5.700 - 1.900 = \frac{741}{2} > 0$$

Logo existen dous mínimos relativos para a distancia, que son  $x_1 = +\sqrt{\frac{19}{2}}$  e  $x_2 = -\sqrt{\frac{19}{2}}$ .

En ambos casos a distancia é a mesma, por simetría:

$$d\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right) = \sqrt{\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^4 - 19\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^2 + 100} = \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2 - 19 \cdot \frac{19}{2} + 100} = \sqrt{\frac{361}{4} - \frac{361}{2} + 100} = \sqrt{\frac{39}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$d = \frac{\sqrt{39}}{2}$  é a distancia mínima entre os puntos da gráfica de  $f$  e o punto  $A$ .

## TEMA 1 / CÁLCULO DIFERENCIAL

## EXERCÍCIOS E SOLUCIÓNS

1. FUNCIÓNS, SUCESIÓNS, LÍMITES E CONTINUIDADE

1. Calcular o dominio, signo e asíntotas das funcións:

i.  $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

iii.  $h(x) = \sqrt{e^x - 2}$

ii.  $g(x) = \frac{1}{(x-1) \cdot \ln(x+3)}$

iv.  $i(x) = \sqrt{\sin 2x}$

v.  $k(x) = \ln(x^2 - 3)$

2. Calcular para as funcións anteriores:

i.  $f(-\sqrt{2})$

v.  $f^{-1}(1)$

ix.  $h(0)$

xiii.  $i^{-1}(1)$

xvii.  $k^{-1}(-5)$

ii.  $f(0)$

vi.  $f^{-1}(-2)$

x.  $h(2)$

xiv.  $i^{-1}(0)$

xviii.  $\lim f$

iii.  $f(-1)$

vii.  $g(1)$

xi.  $h^{-1}(5)$

xv.  $k(-1)$

xix.  $\lim h$

iv.  $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

viii.  $g(-2)$

xii.  $i\left(\frac{\pi}{4}\right)$

xvi.  $k^{-1}(5)$

xx.  $\lim i$

3. Calcular as seguintes composicións de funcións, onde  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ,  $g(x) = \ln x$  e  $h(x) = e^{2x}$ :

i.  $f \circ g$

ii.  $g \circ f$

iii.  $h \circ g$

iv.  $h \circ g \circ f$

v.  $f \circ g \circ h$

4. Estudar a monotonia e acotación das sucesións:

i.  $a_n = (-2)^n$

iii.  $c_n = 2^{-n}$

v.  $e_n = \frac{n}{2n+5}$

ii.  $b_n = -2^n$

iv.  $d_n = \frac{1}{n}$

vi.  $f_n = \frac{n+4}{n}$

5. Estudar a acotación e converxencia das sucesións e calcular os seus límites no caso de seren converxentes.

i.  $a_n = n!$

ii.  $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

iii.  $c_n = \sin n\pi$

6. Demostrar que a sucesión  $a_n = \frac{2n}{n+1}$  é monótona crecente e calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot (a_{n+1} - a_n)$ .

7. Estudar a continuidade das funcións:

i.  $f(x) = \frac{1}{x}$

ii.  $g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ 2x-6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

iii.  $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

8. Calcular o valor de  $a$  para que a función  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$  sexa continua en todo o seu dominio.



9. Estudar a continuidade de  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & \text{se } x \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{3} & \text{se } x = \frac{1}{2} \end{cases}$  e

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

10. Estudar a continuidade das funcións:

i.  $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

iii.  $h(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

v.  $j(x) = \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

ii.  $g(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$

iv.  $i(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

vi.  $k(x) = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

11. Estudar se a función  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$  é continua en  $x=1$ . En caso contrario indicar que tipo de discontinuidade presenta. É posíbel definir un valor para  $f(1)$  de xeito que se evite tal discontinuidade?

12. A función  $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$  non está definida en  $x=1$ . Achar o valor de  $a$  para que sexa posíbel definir o valor de  $f(1)$  de forma que  $f(x)$  sexa continua en toda a recta real.

13. Achar os valores de  $a$  e  $b$  para que a función  $f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{se } x < 0 \\ ax+b & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$  sexa continua en todo o seu dominio.

14. Demostrar que a ecuación  $x^3+x^2-7x+1=0$  ten polo menos unha solución no intervalo  $[0,1]$ .

15. Deducir a partir do teorema de Bolzano que toda función polinómica de grau 3 ten polo menos unha raíz real.

16. Dada a función  $f(x) = x^3-x^2+x$ , é posíbel afirmar que existe algún elemento  $c$  do intervalo  $[1,2]$  tal que  $f(c)=2$ ?

17. Pode afirmar-se que a ecuación  $\sin x + 2x - 1 = 0$  ten solución real? Procurar un intervalo que conteña tal solución, se existe.

18. Se  $f(x)$  é unha función definida en  $[a,b]$ , continua en  $x=a$  e en  $x=b$  e tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , pode-se asegurar que  $\exists c \in (a,b) / f(c)=0$ ?

19. Se  $f(x)$  é continua en  $[1,9]$ ,  $f(1)=-5$  e  $f(9)>0$ , podemos asegurar que a función  $g(x)=f(x)+3$  ten polo menos unha raíz no intervalo  $(1,9)$ ?

20. Pode-se asegurar, utilizando o teorema de Bolzano, que a función  $f(x)=\tan x$  ten unha raíz no intervalo  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ? Dar unha resposta razoada e esbozar a gráfica da función nese intervalo.

21. Demostrar que a ecuación  $\pi^x = e$  ten polo menos unha solución no intervalo aberto  $(0,1)$ .
22. Dada a función  $f(x) = x^x - 2^x + x - 1$ , demostrar que existen  $\alpha \in \mathbb{R} / f(\alpha) = 0$  e  $\beta \in \mathbb{R} / f'(\beta) = 0$ .
23. Determinar os valores de  $a$  e  $b$  para que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\sin x^2} = 1$ .
24. Calcular os límites:

- |                                                                                     |                                                             |                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$                                       | xi. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x^2 - 1}}$          | xxi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$                                       |
| ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$                                 | xii. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x^2)$           | xxii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$           |
| iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$                                 | xiii. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 6x - 3)$               | xxiii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$                                       |
| iv. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$    | xiv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 2x + 3)$         | xxiv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg}(\sin x))}{\sin(\operatorname{tg} x)}$ |
| v. $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln 1+x } \right)$         | xv. $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^7$                        | xxv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$                                                  |
| vi. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$           | xvi. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 3}$        | xxvi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (1 - \cos x)}{\sin^3 x}$                             |
| vii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$                                                 | xvii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$        | xxvii. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 4) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$                                    |
| viii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$ | xviii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$       | xxviii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x+5}{x^2} \right)^{\frac{x^2-1}{x}}$      |
| ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x+5}}$                 | xix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 3}{x^2 + 3}$ | xxix. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 3x)^{x-1}$                                                |
| x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{(x+1) \cdot e^x}$                   | xx. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$       | xxx. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-3}{2x-5} \right)^{\frac{3x}{7}}$              |

## 2. CÁLCULO DE DERIVADAS E APLICACIÓNS

25. Calcular, usando a definición, a derivada de  $f(x) = x^2 - 3x + 5$  no punto  $x = 4$ .
26. Achar a pendente da recta tanxente á parábola de ecuación  $y = x^2 + x + 1$  en  $x = 2$ .
27. Achar a ecuación da recta tanxente á curva  $f(x) = 2x^5 + 4$  no punto  $P(-1, 2)$ .
28. Obter a ecuación da tanxente á curva  $f(x) = 3^{2x^2+1}$  no punto de abscisa  $x = 0$ .
29. Achar un punto da gráfica da función  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  no que a tanxente á gráfica sexa paralela ao eixo de abscisas.
30. Determinar os puntos da curva  $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$  nos que a tanxente á gráfica é paralela á recta  $y = 12x + 5$ .
31. Achar os puntos da curva  $y = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + x + 1$  nos que a tanxente á gráfica forma un ángulo de  $45^\circ$  coa horizontal.

32. Obter as ecuacións da recta tanxente e da recta normal á curva  $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$  no punto  $P(2,3)$ .
33. A función  $f(x)=|x+1|$  non é derivabel en todo o seu dominio. Achar os intervalos de derivabilidade da mesma.
34. Demostrar que a curva  $y=|x-2|$  non ten tanxente no punto de abscisa  $x=2$ .
35. Utilizando a definición de derivada, estudar a derivabilidade da función  $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x\leq 0 \\ x^2 & \text{se } x>0 \end{cases}$ . É derivábel en  $x=0$ ? É continua en  $x=0$ ?
36. Usando a definición de derivada, calcular o valor de  $m$  para que  $f'(1)=0$ , con  $f(x)=\frac{mx^2-1}{x}$ .
37. A ecuación do espazo percorrido por un móbil en función do tempo é  $e(t)=3t^2-t+1$ . Achar a velocidade instantánea en  $t=2$ .
38. Derivar e simplificar:
- $f(x)=\sqrt{\ln[tg(x^2+1)]}$
  - $f(x)=atg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $f(x)=(1-\cos x)\cdot ctg x$
  - $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
  - $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+\sen x}{1-\sen x}}$
  - $f(x)=\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+1}|$
  - $f(x)=e^{\ln \sen^2 x}$
  - $f(x)=atg\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
  - $f(x)=asen(2x\sqrt{1-x^2})$
  - $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$
  - $f(x)=asen(x^{\cos^2 x})$
  - $f(x)=atg\frac{1+x}{1-x}$
39. Derivar as seguintes funcións utilizando os métodos alternativos á derivación de funcións elementares:
- $f(x)=(x^2+\cos x)^{\sen x}$
  - $g(x)=atg x$
  - $x^2y+y^2\cos x=2$
40. Calcular a derivada en  $x=0$  da función  $f[f(x)]$ , con  $f(x)=(1+x)^{-1}$ .
41. Sexa  $f$  unha función derivábel en  $\mathbb{R}$ , tal que  $f(1)=0$  e  $f'(1)=-2$ . Calcular  $h'(1)$ , con  $h(x)=e^{f(x)}+x^2\cdot f(x)+[f(x)]^2$ .

### 3. TEOREMAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

42. Sexa  $f$  unha función polinómica tal que  $f(0)=f(1)=0$ . Pode asegurarse que existe algún  $x\in(0,1)$  tal que  $f'(x)=0$ ?
43. Estudar se a función  $f(x)=1-|x|$  está nas condicións do teorema de Rolle no intervalo  $[-1,1]$ .
44. Estudar a continuidade e derivabilidade das funcións:
- $f(x)=|x-1|$
  - $g(x)=\begin{cases} x^2 \sen \frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$
  - $h(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x<0 \\ x+2 & \text{se } x\in[0,4] \\ x^2-8 & \text{se } x>4 \end{cases}$

45. Estudar se a función  $f(x)=|x^2-4|$  está nas hipóteses do teorema de Rolle en  $[-3,3]$ .
46. Estudar se a función  $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 7-x & \text{se } 3 \leq x < 5 \end{cases}$  está nas hipóteses do teorema de Rolle, no intervalo  $[1,4]$ .
47. Achar o punto  $c$  ao que se refire o teorema do valor medio para a función  $f(x)=x^2-x+3$  no intervalo  $[2,5]$ .
48. Probar que se o termo independente dun polinómio é 3 e o valor que toma o polinómio para  $x=2$  é tamén 3, entón a súa derivada se anula para algún valor de  $x$ . Indicar un intervalo onde se localice tal valor de  $x$ .
49. Dada a función  $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-4}$ , obter a ecuación da secante que une os puntos  $(-2, f(-2))$  e  $(2, f(2))$ . Existe algún punto  $c \in [-2,2]$  tal que a tanxente á gráfica de  $f$  en  $(c, f(c))$  é paralela á secante pedida? En caso afirmativo, razoar a resposta e obter  $c$ ; en caso negativo, razoar por que non existe.
50. Estudar a continuidade da función  $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$  en  $x=0$ .

#### 4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

51. Achar os intervalos de monotonia das funcións  $f(x)=x+5-2\sin x$  e  $g(x)=\sin x+\cos x$ .
52. Achar os intervalos de monotonia das funcións  $f(x)=x^3-3x^2+1$  e  $g(x)=x^3-6x^2+9x-8$ .
53. Estudar o dominio e a monotonia de  $f(x)=\ln|(x-1)\cdot(x-2)|$ .
54. Estudar os extremos relativos e absolutos da función  $f(x)=(x^3-4x^2+7x-6)\cdot e^x$ .
55. Dada a parábola  $f(x)=ax^2+bx+c$ , determinar o valor de  $a$ ,  $b$  e  $c$  sabendo que  $f(x)$  alcanza un máximo no punto de abscisa  $x=\frac{1}{2}$  e a recta tanxente a  $f(x)$  no punto  $P(1,3)$  é  $y=6-3x$ .
56. Procurar unha función cuadrática tal que  $f'(0)=0$ ,  $f'(3)=-8$  e  $f(4)=5$ .
57. Achar  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que a función  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$  teña un máximo relativo en  $M(0,4)$  e un mínimo relativo en  $M'(2,0)$ .
58. Achar  $a$ ,  $b$  e  $c$  para que a función  $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$  teña un máximo relativo en  $x=4$ , un mínimo relativo en  $x=0$  e tome valor 1 para  $x=1$ .
59. Achar  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que a función  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$  teña un máximo relativo igual a 11 en  $x=-1$ , un mínimo relativo igual a -97 en  $x=5$  e tome o valor -17 para  $x=1$ .
60. O custo medio  $C$  en euros da produción diaria dunha mercadoría depende da cantidade  $x$  de unidades producidas ao día, segundo a función  $C(x)=0,01x^2-10x+600$ . Calcular a produción diaria que reduce ao mínimo o custo medio por unidade.

61. Estudar a curvatura (intervalos de concavidade e convexidade) da curva  $y = -6x^3 + 12x^2 - 5x + 1$ .
62. Achar a recta tanxente á curva  $y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$  no seu punto de inflexión.
63. Calcular os extremos relativos e puntos de inflexión da función  $f(x) = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ .
64. Determinar os parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que a función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  teña un punto de inflexión en  $P(-2, 6)$  con tanxente en  $P$  paralela á recta  $8x + y + 10 = 0$ , e tome o valor  $-2$  para  $x = 0$ .
65. Determinar os parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que a gráfica da función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  conteña ao punto  $P(-1, 1)$  e teña un punto de inflexión con tanxente horizontal en  $Q(0, -2)$ .
66. Determinar os parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que a función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  teña un extremo relativo en  $P\left(1, \frac{4}{3}\right)$  e un punto de inflexión con tanxente de ecuación  $y = 2x$  na orixe.
67. Dada a función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , determinar o valor dos coeficientes para que a recta  $y + 1 = 0$  sexa tanxente á gráfica de  $f$  no punto  $(0, -1)$  e a recta  $x - y - 2 = 0$  sexa tanxente á mesma gráfica en  $(1, -1)$ .
68. Sabe-se que a función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ten un máximo relativo en  $x = -1$ , que a súa gráfica corta ao eixo  $OX$  no punto de abscisa  $x = -2$  e que ten un punto de inflexión en  $x = 0$ . Determinar a función sabendo ademais que a recta tanxente á gráfica en  $x = 2$  ten pendente  $9$ .
69. Achar a condición que debe cumprir  $\lambda$  para que o polinómio  $p(x) = x^4 + x^3 + \lambda x^2$  sexa cóncavo en algún intervalo. Determinar o intervalo de concavidade en función do parámetro  $\lambda$ .
70. Sexa  $f(x) = x \cdot g(x)$ , tal que  $g(x)$  é unha función continua, derivábel, que presenta un máximo en  $x = 1$  e que  $f(1) \cdot g(1) = 4$ . Estudar se a función  $f(x)$  presenta tamén un máximo en  $x = 1$ .
71. A concentración en sangue dun fármaco despois da súa toma é  $C(t) = 0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035t^3$  mg/ml, onde  $t$  é o tempo transcorrido en minutos. Calcular o periodo de tempo no que actúa o fármaco e o intre no que a súa concentración é máxima.
72. Determinar un punto da curva  $y = x^{e^{-x^2}}$  no que a pendente sexa máxima.
73. Representar as funcións:
- |                                |                                    |                                     |
|--------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| i. $f(x) =  x + 1 $            | vii. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$    | xi. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$ |
| ii. $f(x) =  x + 1  +  x - 1 $ | viii. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$  | xii. $f(x) = \ln x$                 |
| iii. $f(x) =  x^2 - 4 $        | ix. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$     | xiii. $f(x) = \ln x^2 - 4 $         |
| iv. $f(x) = 4x^3 - 5x + 1$     | x. $f(x) = \frac{0,5x^3}{x^2 - 4}$ | xiv. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$       |
| v. $f(x) = x^4 - 4x^2$         |                                    | xv. $f(x) = x - e^x$                |
| vi. $f(x) = x^4 - x^3$         |                                    |                                     |

xvi.  $f(x) = x^2 \cdot e^x$

xviii.  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

xx.  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

xvii.  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$

xix.  $f(x) = \sin x + \cos x$

xxi.  $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$

xxii.  $f(x) = x \cdot \ln x$

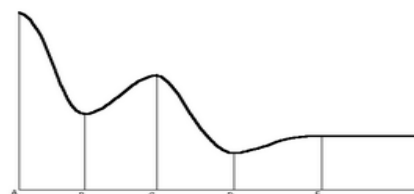
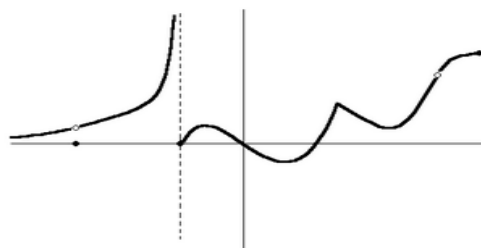
5. OPTIMIZACIÓN

74. Achar dous números que sumen 18, sabendo que o produto dun polo cuadrado do outro há de ser máximo.
75. Achar as dimensións dun campo rectangular de  $3.600 \text{ m}^2$  de superficie, de forma que o seu perímetro sexa mínimo.
76. Achar as dimensións óptimas dos barrís cilíndricos usados no almacenamento de petróleo, para que a súa capacidade sexa de 160 l, de maneira que a chapa utilizada na súa fabricación sexa mínima.
77. Entre todos os rectángulos inscritos nunha circunferencia de raio 12 cm calcular as dimensións do que teña área máxima.
78. Dividir un segmento en dúas partes de maneira que a suma das áreas dos triángulos equiláteros construídos sobre elas sexa mínima.
79. Determinar a distancia mínima da curva  $xy=1$  á orixe de coordenadas.
80. Obter a ecuación da recta que contén ao punto  $P(3,1)$ , tal que a área do triángulo determinado pola recta e os semieixos positivos de coordenadas sexa mínima.
81. Achar os puntos da curva  $y^2=6x$  mais próximos ao punto  $P(4,0)$ .
82. Entre todos os cilindros rectos de volume fixo achar o que teña menor superficie.
83. Unha imprenta debe deseñar un cartaz coas seguintes características: a área impresa debe ocupar  $100 \text{ cm}^2$ , a marxen superior será de 3 cm, a inferior de 2 cm e as laterais de 4 cm. Calcular as dimensións do cartaz de maneira que se utilice a menor cantidade posíbel de papel na súa elaboración.
84. Unha empresa quere instalar un sistema de seguridade con nove alarmes. Os alarmes poden ser do tipo A ou B, e o nivel de seguridade acadado pode-se expresar como a décima parte do produto entre o número de alarmes de tipo A e o cuadrado do número de alarmes do tipo B. Cal será o número de alarmes de cada tipo a instalar para obter o máximo nivel de seguridade?
85. Dadas as funcións  $f(x)=e^x$  e  $g(x)=-e^{-x}$ , toda recta perpendicular ao eixo OX determina dous puntos A e B nos que a recta corta a cada unha das dúas gráficas. Determinar a recta r que fai que o segmento AB teña lonxitude mínima.
86. O custo do marco dunha xanela rectangular é de 12,50 € por metro linear nos lados verticais e 8 € nos horizontais. Calcular as dimensións que há de ter unha xanela de  $1 \text{ m}^2$  de superficie para que o marco resulte o mais económico posíbel.
87. Un corredor ten 2 m de anchura e tras virar en ángulo recto á dereita pasa a ter  $6\sqrt{3} \text{ m}$  de anchura. Hai que trasladar horizontalmente un poste ao longo do corredor. Calcular a lonxitude máxima do poste que permite realizar o traslado.

6. VARIEDADES

88. Calcular de forma aproximada o valor de  $\sqrt{15,97}$ , utilizando a diferencial.

89. Unha circunferencia ten  $3\text{ m}$  de raio. Calcular de forma aproximada a súa área se o raio aumenta  $1\text{ mm}$ .
90. Nos países desenvolvidos, o modelo de evolución demográfica responde á expresión  $f(x) = 1275 + 33 \ln(x - 2000)$ , onde  $x$  é o ano,  $x \geq 2001$ , e  $f(x)$  é o número de habitantes, en millóns.
- Estudar o crecemento ou decrecemento demográfico destes países no intervalo de definición.
  - Calcular e interpretar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - Calcular a poboación prevista a 1 de xaneiro dos anos 2011 e 2021 e a variación media nese intervalo.
  - Calcular a taxa de variación da poboación ás 0 horas do 1 de xaneiro dos anos 2011 e 2021. En cal deses dous instantes é máis rápido o crecemento?
  - En que porcentaxe aumentou a poboación no intervalo  $[2010, 2020]$ .
  - Determinar en que momento o número de habitantes alcanzou ou alcanzará os  $1.500$  millóns.
  - Calcular o número de habitantes no momento actual.
91. Unha enfermidade infecciosa comporta-se conforme a función  $i(t) = \frac{25t+4}{t^2-3t+5}$ , onde  $t$  é o número de días transcorridos desde que se detectou a epidemia e  $i(t)$  é o número de persoas afectadas, expresado en miles.
- Calcular o número de persoas contagiadas durante o quinto día da epidemia.
  - Calcular a variación media da epidemia durante os cinco primeiros días.
  - Calcular o ritmo do contaxio ás 12 horas do quinto día da epidemia.
  - Estudar cal será a evolución da enfermidade co paso do tempo.
92. Unha función  $f(x)$  ten a gráfica adxunta. Representar sobre a propia gráfica os elementos significativos da función: dominio, imaxe, cortes cos eixos, asíntotas, continuidade, derivabilidade, monotonía e extremos (relativos e absolutos), curvatura e inflexións.
93. Unha montaña rusa ten o perfil que se indica na figura.
- Representar nunha gráfica aproximada a velocidade en cada posición do tren. Analisar, en particular, o comportamento da velocidade nos lugares sinalados por letras e nos tramos determinados por estas.
  - Se  $e(t) = 600t + 150t^3 - 115t^4 + 27t^5 - 2t^6$  é a función que relaciona o espazo percorrido (en centímetros) co tempo  $t$  (en segundos), determinar a cantos metros da saída está o punto no que se alcanza a máxima velocidade.



94. Nunha nória, a distancia en metros desde a cabina 1 ao chan ven dada pola expresión  $d(t) = 7 + 5 \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi}{30}\right)$ , onde  $t$  é o tempo desde que comeza a xirar a nória.
- Determinar a que altura do chan se atopaba a cabina 1 ao comezar a xirar.
  - Realizar unha gráfica da función  $d(t)$  para o intervalo  $t \in [0, 75]$ .
  - Obter de forma razoada o diámetro da nória e o sentido do xiro.



## 7. SOLUCIÓNS

- 1.i.  $Dom f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ;  $f(x) > 0$  en todo o seu dominio; asíntota vertical  $x = -1$  e asíntota horizontal  $y = 1$ .
- ii.  $Dom g = (-3, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ ;  $g(x) < 0$  en todo o seu dominio; asíntotas verticais  $x = -2$  e  $x = 1$  e asíntota horizontal  $y = 0$ .
- iii.  $Dom h = [\ln 2, +\infty)$ ;  $h(x) > 0 \quad \forall x > \ln 2$  e non ten asíntotas.
- iv.  $Dom i = \dots \cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right] \dots = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right]$ ;  
 $i(x) > 0 \quad \forall x \in Dom i - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$  e non ten asíntotas.
- v.  $Dom j = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$ ;  $j(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$  e  
 $j(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$ ; asíntotas verticais  
 $x = \sqrt{3}$  e  $x = -\sqrt{3}$ .
- 2.i.  $f(-\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$       viii.  $g(-2) \notin \mathbb{R}$       xv.  $k(-1) = \ln 2$   
 ii.  $f(0) = 0$       ix.  $h(0) \notin \mathbb{R}$       xvi.  $k^{-1}(5) = \pm\sqrt{e^5 + 3}$   
 iii.  $f(-1) \notin \mathbb{R}$       x.  $h(2) = \sqrt{e^2 - 2}$       xvii.  $k^{-1}(-5) = \pm\sqrt{e^{-5} + 3}$   
 iv.  $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$       xi.  $h^{-1}(5) = \ln 27$       xviii.  $Im f = [0, +\infty)$   
 v.  $f^{-1}(1) = -\frac{1}{2}$       xii.  $i\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$       xix.  $Im h = [0, +\infty)$   
 vi.  $f^{-1}(-2) \notin \mathbb{R}$       xiii.  $i^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$       xx.  $Im i = [0, 1]$   
 vii.  $g(1) \notin \mathbb{R}$       xiv.  $i^{-1}(0) = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- 3.i.  $(f \circ g)(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$       iii.  $(h \circ g)(x) = x^2$       v.  $(f \circ g \circ h)(x) = \frac{2x}{2x - 1}$   
 ii.  $(g \circ f)(x) = \ln \frac{x}{x - 1}$       iv.  $(h \circ g \circ f)(x) = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$
- 4.i.  $a_n$  non é monótona nen acotada;      iv.  $d_n$  é monótona e acotada;  
 ii.  $b_n$  é monótona e acotada superiormente;      v.  $e_n$  é monótona e acotada;  
 iii.  $c_n$  é monótona e acotada;      vi.  $f_n$  é monótona e acotada.
- 5.i.  $a_n$  é acotada inferiormente e non converxente;  
 ii.  $b_n$  é acotada e converxente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$   
 iii.  $c_n$  é acotada mas non converxente.
6. O límite é 2.
- 7.i.  $f$  é contínua en todo o seu dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;  
 ii.  $g$  é contínua en  $\mathbb{R}$ ;  
 iii.  $h$  é contínua en  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ .

8.  $a=0$ .
9.  $f$  é contínua en todo o seu dominio:  $\mathbb{R}-\{2\}$  e  $g$  é contínua en  $\mathbb{R}-\{2\}$ .
- 10.i.  $f$  é contínua en todo o seu dominio:  $\mathbb{R}-\{2\}$ ;  
 ii.  $g$  é contínua en todo o seu dominio:  $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ;  
 iii.  $h$  é contínua en todo o seu dominio:  $[-1,0)\cup(0,+\infty)$ ;  
 iv.  $i$  é contínua en todo o seu dominio:  $[-1,3)\cup(3,+\infty)$ ;  
 v.  $j$  é contínua en todo o seu dominio:  $[-9,0)\cup(0,+\infty)$ ;  
 vi.  $k$  é contínua en todo o seu dominio:  $[1,+\infty)$ .
11.  $f$  presenta en  $x=1$  unha discontinuidade de tipo evitábel, que desaparece definindo  $f(1):=\frac{1}{5}$ .
12.  $f$  é contínua en todo o seu dominio, que é  $\mathbb{R}-\{1\}$ . Para que se poda definir en  $x=1$  con continuidade,  $f$  terá que presentar en  $x=1$  unha discontinuidade de tipo evitábel, polo que  $a=-3$ .
13.  $a=3$  e  $b=-1$ .
14.  $f(0)>0$  e  $f(1)<0$ , logo polo teorema de Bolzano  $\exists c \in (0,1) / f(c)=0$ .
15. Se supomos que o coeficiente principal do polinómio  $p(x)$  é positivo, entón  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)=-\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)=+\infty$ , logo forzosamente existirán valores  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b / p(a) < 0, p(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) / p(c)=0$ . O razoamento é análogo no caso de que o polinómio  $p(x)$  teña o coeficiente principal negativo.
16.  $f(x)=x^3-x^2+x=2 \Leftrightarrow x^3-x^2+x-2=0$ ; logo o problema equivale a estudar se a función  $g(x)=x^3-x^2+x-2$  está nas hipóteses do teorema de Bolzano:  $g(1)=-1<0$  e  $g(2)=4>0$ , logo  $\exists c \in (1,2) / g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=2$ .
17. Hai que procurar algún intervalo tal que a función tome valores de signo oposto nos seus extremos, para situar a función  $f$  nas hipóteses do teorema de Bolzano; tal intervalo pode ser  $[0, \pi]$ , entre outras posibilidades.
18. Non, xá que a función há de ser contínua no intervalo  $[a, b]$  para extraer a conclusión do teorema de Bolzano; por exemplo, a función 
$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{se } x \leq \frac{a+b}{2} \\ -12 & \text{se } x > \frac{a+b}{2} \end{cases}$$
 está nas condicións do exercicio pero non ten raíz real no intervalo  $[a, b]$ .
19.  $g(1)=f(1)+3=-2<0$  e  $g(9)=f(9)+3>0$ , e ademais  $g(x)$  é contínua en  $[1,9]$  por ser  $f$  contínua nese intervalo; logo polo teorema de Bolzano existe algunha raíz da función  $g$  en  $[1,9]$ .
20. Non se pode asegurar, debido a que a función  $f(x)$  non é contínua no intervalo.
21. Define-se a función  $f(x)=\pi^x-e$ . Esta función é contínua no intervalo  $[0,1]$  e  $f(0)=1-e<0$ ,  $f(1)=\pi-e>0$ , logo o Teorema de Bolzano asegura que  $\exists c \in (0,1) / f(c)=0 \Rightarrow \pi^c-e=0 \Rightarrow \pi^c=e$ .
22. É consecuencia dos teoremas de Bolzano e Darboux.

23.  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = 0$ .

|                   |               |                       |                |                      |                        |
|-------------------|---------------|-----------------------|----------------|----------------------|------------------------|
| 24.i. 1           | vi. $e^2$     | xi. $e^{\frac{1}{2}}$ | xvi. 0         | xxi. 0               | xxvi. $\frac{1}{2}$    |
| ii. $\frac{1}{6}$ | vii. 1        | xii. 0                | xvii. 4        | xxii. 1              | xxvii. $2\sqrt{5}$     |
| iii. 0            | viii. 1       | xiii. 13              | xviii. 2       | xxiii. $\frac{1}{2}$ | xxviii. e              |
| iv. $-\infty$     | ix. $+\infty$ | xiv. $-\infty$        | xix. $+\infty$ | xxiv. 1              | xxix. $+\infty$        |
| v. $-\frac{1}{2}$ | x. 0          | xv. 0                 | xx. -2         | xxv. 5               | xxx. $e^{\frac{3}{7}}$ |

25.  $f'(4) = 5$

26. A pendente é  $y' = 5$ .

27.  $y = 10x + 12$

28.  $y = 3$

29.  $P(3, -1)$

30.  $P(1, 16)$  e  $P'(-7, 176)$ .

31.  $P(0, 1)$ ,  $P'(2, 15)$  e  $P''\left(\frac{13}{4}, \frac{3.285}{256}\right)$ .

32.  $y = 3$  é a recta tanxente e  $x = 2$  é a recta normal.

33.  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

34.  $y'(2^-) = -1$  e  $y'(2^+) = 1$ .

35.  $f$  é contínua e derivábel en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

36.  $m = -1$

37.  $v(2) = e'(2) = 11$

38.i.  $f'(x) = \frac{x \cdot \sec^2(x^2 + 1)}{\operatorname{tg}(x^2 + 1) \sqrt{\ln|\operatorname{tg}(x^2 + 1)|}}$

ii.  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

iii.  $f'(x) = \cos x - \frac{1}{1+\cos x}$

iv.  $f'(x) = \frac{1}{(1-x) \cdot \sqrt{x^2-1}}$

v.  $f'(x) = \sec x$

vi.  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $x > -1$

vii.  $f'(x) = \sin 2x$

viii.  $f'(x) = \frac{1}{(2x^2-1) \cdot \sqrt{x^2-1}}$

ix.  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

x.  $f'(x) = \frac{ad-bc}{2(cx+d) \cdot \sqrt{(ax+b) \cdot (cx+d)}}$

xi.  $f'(x) = \frac{x^{\cos^2 x} \cdot \left( \frac{\cos^2 x}{x} - \sin 2x \cdot \ln x \right)}{\sqrt{1-x^{2\cos^2 x}}}$

xii.  $f'(x) = 0$

39.i.  $f'(x) = (x^2 \cos x + \cos^2 x - 2x \sin x - \sin^2 x) \cdot (x^2 + \cos x)^{\sin x}$

ii.  $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

iii.  $y' = \frac{y^2 \sin x - 2xy}{x^2 + 2y \cos x}$

40. O valor da derivada é  $\frac{1}{4}$ .
41.  $h'(1) = -4$
42. Si, porque toda función polinómica é derivábel en  $\mathbb{R}$ , logo está nas hipóteses do Teorema de Rolle.
43. Non, por non ser derivábel en  $x=0$ .
- 44.i.  $f$  é contínua en  $\mathbb{R}$  e derivábel en  $\mathbb{R} - \{1\}$ ;  
 ii.  $f$  é contínua en  $\mathbb{R}$  e derivábel en  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;  
 iii.  $f$  é contínua en  $\mathbb{R} - \{4\}$  e derivábel en  $\mathbb{R} - \{0,4\}$ .
45.  $f$  non é derivábel en  $x=2$  e  $x=-2$ .
46.  $f$  non é contínua e, polo tanto, tampouco é derivábel en  $x=3$ .
47.  $x = \frac{7}{2}$
48. A función de que se trata está nas hipóteses do Teorema de Lagrange no intervalo  $[0,2]$ .
49. A secante é  $x-6y=8$ ; a existencia de  $c$  ven asegurada polo Teorema de Lagrange:  $c=4-2\sqrt{3} \approx 0.54 \in [-2,2]$ .
50. A función é contínua en todo  $\mathbb{R}$  agás en  $x=0$ , onde presenta unha discontiuidade evitábel.
- 51.i.  $f$  é estrictamente crecente nos intervalos da forma  $\left((6k+1) \cdot \frac{\pi}{3}, (6k+5) \cdot \frac{\pi}{3}\right)$   $k \in \mathbb{Z}$  e estrictamente decrecente nos da forma  $\left((6k-1) \cdot \frac{\pi}{3}, (6k+1) \cdot \frac{\pi}{3}\right)$   $k \in \mathbb{Z}$ ;  
 ii.  $g$  é estrictamente crecente nos intervalos da forma  $\left((8k+5) \cdot \frac{\pi}{4}, (8k+9) \cdot \frac{\pi}{4}\right)$   $k \in \mathbb{Z}$  e estrictamente decrecente nos da forma  $\left((8k+1) \cdot \frac{\pi}{4}, (8k+5) \cdot \frac{\pi}{4}\right)$   $k \in \mathbb{Z}$ .
- 52.i.  $f$  é estrictamente crecente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  e estrictamente decrecente no intervalo  $(0, 2)$ ;  
 ii.  $g$  é estrictamente crecente en  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$  e estrictamente decrecente no intervalo  $(1, 3)$ .
53.  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$ ;  $f$  é estrictamente crecente en  $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty)$  e estrictamente decrecente en  $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ .
54.  $f$  presenta un mínimo absoluto en  $x=-1$ .
55. A parábola é  $f(x) = -x^2 - x + 5$ .
56.  $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (4x^2 - 79)$
57.  $a=1$ ,  $b=-3$ ,  $c=0$  e  $d=4$ .
58.  $a=-6$ ,  $b=0$  e  $c=6$ .

59. Non existe unha función nestas condicións; o problema non ten solución.
60. A produción diaria há de ser de 500 unidades.
61. A función  $y$  é convexa en  $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$  e cóncava en  $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ .
62. A tanxente é  $y=4x-3$ .
63.  $f$  ten un máximo relativo en  $x=\frac{\pi}{2}$ , un mínimo relativo en  $x=\frac{3\pi}{2}$  e puntos de inflexión en  $x=0$ ,  $x=\frac{\pi}{3}$ ,  $x=\frac{2\pi}{3}$ ,  $x=\pi$ ,  $x=\frac{4\pi}{3}$ ,  $x=\frac{5\pi}{3}$  e  $x=\frac{\pi}{2}$ .
64.  $a=1$ ,  $b=6$ ,  $c=4$  e  $d=-2$ .
65.  $a=-3$ ,  $b=c=0$  e  $d=-2$ .
66.  $a=-\frac{2}{3}$ ,  $b=0$ ,  $c=2$  e  $d=0$ .
67. A función é  $f(x)=x^3-x^2-1$ .
68. A función é  $f(x)=x^3-3x+2$ .
69. Ten que ser  $\lambda < \frac{3}{8}$  e o intervalo de concavidade é  $\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{9-24\lambda}}{12}, -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{9-24\lambda}}{12}\right)$ .
70. Non, porque  $f$  é continua e derivábel en  $x=1$  e  $f'(1) \neq 0$ .
71. Actua durante 127,9 minutos e a máxima concentración produce-se aos 84,34 min.
72. O punto é  $(0,0)$ .
- 73.
74. Os dous números son 6 e 12.
75. Há de ser un campo cuadrado de 60 m de lado.
76. As dimensións óptimas serán: o raio da base  $2\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 2,94$  dm e a altura  $4\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 5,88$  dm.
77. É un cuadrado de lado  $12\sqrt{2}$  cm.
78. Fará-se a división do segmento polo seu punto medio.
79. A distancia mínima é  $\sqrt{2}$  unidades.
80. A área é mínima para a recta de ecuación  $x+3y=6$ .
81.  $A(1, \sqrt{6})$  e  $A'(1, -\sqrt{6})$ .
82. Son cilindros nos que a altura é o duplo do raio da base.
83. As dimensións serán 12,9 cm de altura e 20,65 cm de anchura.
84. Deberán instalar-se 3 alarmes do tipo A e 6 do tipo B.
85. A recta é  $x=0$ .
86. A xanela terá unha altura de 0,8 m e unha anchura de 1,25 m.

87. En xeral, se as dimensións dos corredores son  $a$  e  $b$ , a solución ao problema é unha lonxitude máxima  $L = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ . Neste caso particular, resulta  $L = 16 \text{ m}$ . É recomendábel expresar a lonxitude como función dun ángulo, en lugar de facé-lo como función do cateto dun triángulo.
88.  $\sqrt{15,97} \approx 3,99625$
89. A área é aproximadamente  $9,006\pi u^2$ .
- 90.i. Produce-se un crecemento demográfico ilimitado;
- ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , polo que este modelo non pode ser correcto mais que nun intervalo limitado de tempo;
- iii.  $f(2010) \approx 1.351 \text{ Mhab}$ ,  $f(2020) \approx 1.374 \text{ Mhab}$ ,  $\frac{\Delta f}{\Delta x}[2010, 2020] = 2,3 \text{ Mhab/ano}$ ;
- iv.  $f'(2010) = 3,3 \text{ Mhab/ano}$ ,  $f'(2020) = 1,65 \text{ Mhab/ano}$ ;
- v. incrementou-se no  $1,7\%$ ;
- vi. no segundo trimestre do ano 2914;
- vii.  $f(\text{ano corrente})$ .
- 91.i.  $i(5) - i(4) \approx -2,96$  miles de persoas infectadas: tal resultado debe interpretar-se como unha diminución do número de persoas afectadas;
- ii.  $\frac{\Delta i}{\Delta t}[0,5] = 1,56$  miles de infectadas/día;
- iii.  $i'(4,5) \approx -2,94$  miles de infectadas/día;
- iv. produce-se un máximo de infectadas en  $t \approx 2,19$ , ou sexa, ás  $4 \text{ h } 33 \text{ min}$  do terceiro día da epidemia; a partir dese momento comeza a remitir e desaparece, xá que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(x) = 0$ .
- 92.
93. A velocidade máxima alcanza-se en  $t = 5$  segundos, que se corresponde con  $30 \text{ m}$  de distancia ao punto de partida.
- 94.i.  $7 \text{ m}$  de altura;
- ii.
- iii. a nória xira en sentido anti-horário e o diámetro é de  $10 \text{ m}$ .