Boletín 14. Matrices y determinantes

1. Escribe matrices que cumplan estas condiciones.
a) Diagonal de orden 3.
b) Triangular superior con tres columnas, de forma que los elementos distintos de 0 cumplan que aij = i + j.

2. Clasifica las matrices y determina su dimensión

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\-4 & 3 & 1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix}3 & 0\\4 & -8\end{pmatrix}$$

3. Realiza las siguiente operación con matrices:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\0 & -3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -2 & 3\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

4. Haz la siguiente operación con matrices

$$2\cdot\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\-1 & 2 & 0\\-1 & 5 & -2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & 4\\-1 & 1 & -2\\0 & -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\2 & 3 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

5. Realiza los productos que sean posibles entre las matrices A, B y C

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-2 & 1 & -3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0\\-1 & 2\\2 & -3\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 4\\3 & 2\end{pmatrix}$$

6. Comprueba si se cumple que A·(B+C) =B·A+C·A, siendo las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\2 & -1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}3 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

Si no es cierto, aplica correctamente la propiedad

7. Realiza esta operación con matrices

$$\begin{pmatrix}5 & 0\\1 & 9\\-3 & 7\end{pmatrix}^t\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\-3 & 4\\2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -1 & 7\\8 & 2 & 0\end{pmatrix}^t\right]$$

8. a) Estudia si la matriz A+B es simétrica

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\2 & -2 & 1\\-3 & -3 & 0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\0 & -2 & 1\\3 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

b) Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & b\\c & 0 & -3\\2 & d & e\end{pmatrix}$$

9. (La Rioja 2000) Calcula A·B y B·A siendo las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

10. Determina el rango de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0\\2 & 1 & -1 & 1\\0 & -3 & 7 & -1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\2 & -2 & 6\\3 & -3 & 9\end{pmatrix}$

11. Calcula el rango utilizando el método de Gauss

$$a)\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\0 & -1 & 2\\-5 & 3 & 0\end{pmatrix};b)\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 7\\8 & -3 & -2 & 14\\2 & 1 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

12. Calcula, si es posible, la inversa de estas matrices utilizando la definición

$$a)\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix};b)\begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

13. Halla por el método Gauss-Jordan, la inversa de las matrices

$$a)\begin{pmatrix}6 & 2\\12 & 5\end{pmatrix};b)\begin{pmatrix}-3 & 7\\2 & -5\end{pmatrix};c)\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\2 & 3 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

14. (Asturias 2001) Sea A una matriz mxn.

a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

c) Busca una matriz B tal que BA = (0 0), siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$

15. (Cataluña 2006) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{pmatrix};\ y\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\4 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcule AB y BA

b) Compruebe que $(A+B)^2=A^2+B^2$

16. (Madrid 2006) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\2 & -1 & -1\\2 & -1 & -1\end{pmatrix};\ y\ I=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\2 & -1 & -1\\2 & -1 & -1\end{pmatrix}$

a) Hallar $(A-I)^2$

b) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior

Soluciones

1)

$$a \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad b \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2)
A. Matriz fila de dimensión 1x3
B. Matriz columna de dimensión 3x1
C. Matriz cuadrada de orden 3
D. Matriz diagonal de orden 2
E. Matriz identidad de orden 2
F. Matriz triangular inferior de orden 3
G. Matriz rectangular de dimensión 2x3
H. Matriz triangular superior de orden 3
I. Matriz triangular inferior de orden 2

3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

5) No son posibles los productos A.C y B·C

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -13 & 11 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -8 \\ 8 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 7 & 0 \\ -11 & 2 \end{pmatrix} \qquad C \cdot A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -14 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6)
A·(B+C) = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; B·A+C·A = $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; AB+AC= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

A·(B+C) = AB+AC es la igualdad correcta

7)

$$\begin{pmatrix} -6 & 60 \\ 27 & 33 \end{pmatrix}$$

8)
a) No es simétrica
b) *a* = 0, *b* = −2, *c* = −1, *d* = 3, *e* = 0.

9)
A·B = -4

$$B{\cdot}A=\begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

10)
a) Rango = 2
b) Rango = 1

11)
a) Rango = 3
b) Rango = 2

12)
a) No existe matriz inversa
b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

13)

$$a)\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-2}{6} \\ -2 & 1 \end{pmatrix};b)\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix};c)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

14)
a) Para que BA sea una matriz fila, la matriz B tiene que ser una matriz de dimensión 1 × m, y la dimensión del producto es 1 × n.
b) El número de filas de la matriz AB no depende de la matriz B, sino que es igual al número de filas de la matriz A, que es m. Solo es posible obtener una matriz fila si A es también una matriz fila.
c) $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \end{pmatrix};c\in\mathbb{R}$

15)
a) $AB=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};BA=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
b) Se desarrolla el cuadrado $(A+B)^2$

16)
a) $a)(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};b)(A-I)^2=\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$