

Boletín 13. Integrales por cambio de variable

1. (Andalucía 2002) Sea $\ln x$ el logaritmo neperiano de x y sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \int \left(\frac{1}{x \cdot (\ln x)^2} \right) dx$. Usa el cambio de variable $t = \ln x$ para calcular una primitiva de f .

2. (La Rioja-2000) Considera la integral $\int \left(\frac{\cos x}{(\sin x)^3} \right) dx$. Calcularla realizando el cambio de variable $t = \sin x$

3. Resuelve utilizando un cambio de variable

a) $\int \frac{2}{4+x^2} dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b) $\int x(x+5)^{10} dx$

g) $\int \operatorname{tg} 2x dx$

c) $\int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

h) $\int \operatorname{cotg} \frac{x}{5} dx$

d) $\int x e^{3x^2} dx$

i) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

j) $\int e^x \sqrt{(e^x + 1)^3} dx$

4. (Canarias 2007) Resolver la integral definida $\int \left(\frac{dx}{(x+1+\sqrt{x+1})} \right)$

5. (Aragón 2006) Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$, calcular $\int \left(\frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} \right) dx$

6. Integra mediante cambio de variable

a) $\int (x^2 \sqrt{x^3+3}) dx$

c) $\int \left(\frac{2}{x \ln x} \right) dx$

b) $\int (x^3 e^{x^4+1}) dx$

d) $\int \left(\frac{\ln x^2}{x} \right) dx$

7. Resuelve utilizando cambio de variable

a) $\int \cos x \sin^3 x dx$

g) $\int \cos^2 x \sin x dx$

b) $\int x \ln(1+x^2) dx$

h) $\int \sin x e^{\cos x} dx$

c) $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$

i) $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$

d) $\int 2x \sin x^2 dx$

j) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$

e) $\int x \sqrt{x+1} dx$

k) $\int (x^2+1) e^{x^3+3x} dx$

f) $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$

l) $\int \cos^5 x \sin^3 x dx$

Soluciones

1) $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + Cte.$

2) $F(x) = \frac{-1}{2(\operatorname{sen} x)^2} + Cte.$

3)

a) Cambio de variable $t=x/2$; $F(x) = \operatorname{arc.tg}(x/2) + Cte.$

b) Cambio de variable $t=x+5$; $F(x) = \frac{(x+5)^{12}}{12} - 5 \frac{(x+5)^{11}}{11} + Cte.$

c) Cambio de variable $t=\sqrt{x}$; $F(x) = -2 \ln |\sqrt{x}| + Cte.$

d) Cambio de variable $t=3x^2$; $F(x) = e^{3x^2} + Cte.$

e) Cambio de variable $t=x^2$; $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + Cte.$

f) Cambio de variable $t=1-x^2$; $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + Cte.$

g) Cambio de variable $t=\cos 2x$; $F(x) = \frac{-1}{2} \ln |\cos 2x| + Cte.$

h) Cambio de variable $t=\operatorname{sen}(x/5)$; $F(x) = 5 \ln \left| \operatorname{sen} \frac{x}{5} \right| + Cte.$

i) Cambio de variable $t=x^5$; $F(x) = \frac{1}{5} \operatorname{arcsen} x^5 + Cte.$

j) Cambio de variable $t=e^x+1$; $F(x) = \frac{2}{5} \sqrt{(e^x+1)^5} + Cte.$

4)

Cambio de variable $t=\sqrt{x+1}$; $F(x) = 2 \ln |\sqrt{x+1}+1| + Cte.$

5)

$$F(x) = \frac{(\ln(\ln x))^2}{2} + Cte.$$

6)

a) Cambio de variable $t=x^3+3$; $F(x) = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3+3)^3} + Cte.$

b) Cambio de variable $t=x^4+1$; $F(x) = \frac{1}{4} e^{x^4+1} + Cte.$

c) Cambio de variable $t=\ln x$; $F(x) = 2 \ln |\ln x| + Cte.$

d) Cambio de variable $t=\ln x$; $F(x) = \ln^2 x + Cte.$

7)

a) Cambio de variable $t=\operatorname{sen} x$; $F(x) = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + Cte.$

b) Cambio de variable $t=x^2+1$; $F(x) = \frac{1}{2} ((1+x^2) \ln(1+x^2) - (1+x^2)) + Cte.$

c) Cambio de variable $t=\ln(2x)$; $F(x) = \frac{\ln^2(2x)}{2} + Cte.$

d) Cambio de variable $t=x^2$; $F(x) = -\cos^{x^2} + Cte.$

e) Cambio de variable $t = \sqrt{x+1}$; $F(x) = \sqrt{x+1} \left(2 \frac{(x+1)^2}{5} - 2 \frac{(x+1)}{3} \right) + Cte.$

f) Cambio de variable $t = x^2 - 1$; $F(x) = \ln|x^2 - 1| + Cte.$

g) Cambio de variable $t = \cos x$; $F(x) = \frac{-\cos^3 x}{3} + Cte.$

h) Cambio de variable $t = \cos x$; $F(x) = -e^{\cos x} + Cte.$

i) Cambio de variable $t = \cos x$; $F(x) = \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + Cte.$

j) Cambio de variable $t = \cos x$; $F(x) = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + Cte.$

k) Cambio de variable $t = x^3 + 3x$; $F(x) = \frac{e^{x^3 + 3x}}{3} + Cte.$

l) Cambio de variable $t = \cos x$; $F(x) = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + Cte.$