

Resumen Derivadas.

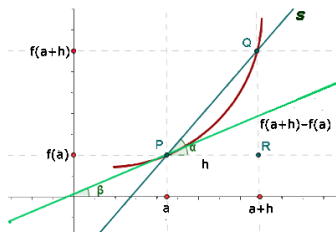
1. Derivada de una función en un punto x_0 , se denota por $f'(x_0)$, es el valor si existe y es finito de este límite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Si en esta definición hacemos $x = x_0 + h$, la fórmula es equivalente a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Interpretación geométrica de la derivada, en un punto x_0 , $f'(x_0)$, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $P(x_0, f(x_0))$



3. Derivadas laterales. Al estar definida como un límite, para asegurar su existencia debe comprobarse que existe límite por la izquierda, límite por la derecha y que ambos son iguales

4. Derivabilidad y continuidad. Toda función derivable en un punto es necesariamente continua en dicho punto

5. Función derivada de una función $f(x)$ es una nueva función que asigna a cada punto el valor de la derivada de $f(x)$ en dicho punto:

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

6. Derivadas sucesivas. Si derivamos la función derivada $f'(x)$, obtendremos otra función que llamamos derivada segunda de f y se denota por $f''(x)$. Podemos repetir el proceso obteniendo sucesivamente la tercera derivada, la cuarta, etc...

7. Operaciones con derivadas.

Operación	Derivada
Suma de funciones	$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
Producto de un número por una función	$[kf(x)]' = kf'(x)$
Producto de funciones	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente de funciones	$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g'(x)]^2}$
Regla de la cadena	$[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

8. Técnicas de derivación.

8.1 Derivación logarítmica. Se usa en funciones del tipo:

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

Se resuelven aplicando $\ln$ a ambos lados, y a continuación derivando ambos lados

8.2 Derivada de una función implícita en un punto. Se usa en funciones expresadas en forma implícita, por ejemplo:

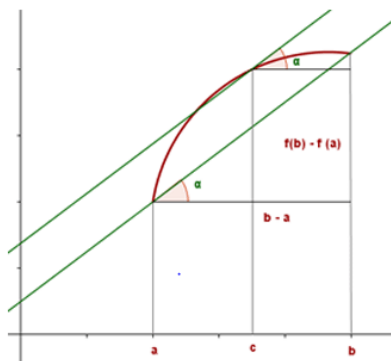
$$x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$$

Se resuelven derivando toda la función respecto a x , a continuación se despeja la derivada y' , y por último se sustituye en esta expresión los valores del punto

9. Teorema del valor medio (Lagrange) Si una función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existirá al menos un punto c que pertenece al intervalo (a,b) que cumple

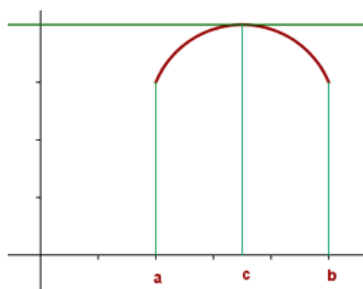
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio



10. Teorema de Rolle Si una función $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y se cumple que $f(a) = f(b)$ se cumple entonces que existirá al menos un punto c que pertenece al intervalo (a,b) que cumple que $f'(c)=0$

Interpretación geométrica del teorema de Rolle



11. Crecimiento y decrecimiento.

11.1 Una función es **creciente** en un punto $x=x_0$ si la derivada de la función en ese punto es positiva.

$$f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x=x_0$$

11.2 Una función es **decreciente** en un punto $x=x_0$ si la derivada de la función en ese punto es negativa.

$$f'(x_0) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } x=x_0$$

12. Máximos y mínimos relativos

Si una función $f(x)$ presenta un máximo o un mínimo en $x=x_0$, se cumple que $f'(x_0)=0$. Existen dos modos de averiguar si x_0 es máximo o mínimo:

A	$f(x)$ creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a la derecha $\rightarrow x_0$ es máximo $f(x)$ decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a la derecha $\rightarrow x_0$ es mínimo
B	$f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$ es máximo $f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$ es mínimo

13. Concavidad y convexidad.

13.1 Una función es **cóncava** en un punto $x=x_0$ si la derivada segunda de la función en ese punto es positiva.

$$f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es cóncava en } x=x_0$$

13.2 Una función es **convexa** en un punto $x=x_0$ si la derivada de la función en ese punto es negativa.

$$f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es convexa en } x=x_0$$

14. Puntos de inflexión

Una función presenta un punto de inflexión en x_0 si en ese punto dicha función pasa de ser cóncava o convexa, o viceversa.

Si una función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x=x_0$, se cumple que $f''(x_0)=0$. Existen dos modos de averiguar si x_0 es punto de inflexión:

A	$f''(x)>0$ a la izquierda de x_0 y $f''(x)<0$ a la derecha $\rightarrow x_0$ es punto de inflexión $f''(x)<0$ a la izquierda de x_0 y $f''(x)>0$ a la derecha $\rightarrow x_0$ es punto de inflexión
B	$f'''(x_0)<0 \rightarrow x_0$ es punto de inflexión

Derivadas de funciones elementales.

Función	Derivada	Función	Derivada
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = [g(x)]^n$	$f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{n \sqrt[n]{g(x)^{n-1}}}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$f(x) = \log_a(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x) \cdot \ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = \text{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \text{sen}(g(x))$	$f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\text{sen}(x)$	$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -\text{sen}(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) = \text{tg}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$f(x) = \text{tg}(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$
$f(x) = \text{arc sen}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \text{arc sen}(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$
$f(x) = \text{arc cos}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \text{arc cos}(g(x))$	$f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$
$f(x) = \text{arc tg}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \text{arc sen}(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$