

## BOLETÍN 1. LÍMITES.

### 1. Halla estos límites

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-7)^{2-x}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-0.01x^2)$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-\sqrt{x^2-6x})$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{2x}+5e^{-x}}{3e^{2x}-e^{-x}} \right)$ ; f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} \right)$ ; g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1}}{3^x+10}$ ; h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{x^2}$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}}$ ; j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+\sqrt{2x}}-\sqrt{2x})$ ; k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2+6}{6x+3x^2} \right)^{\frac{x}{4}}$

### 2. Calcula el valor de m para que se cumpla la igualdad:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2+3}{mx+2x^2} \right)^{x+2} = \frac{1}{e}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+3}{2+5x} \right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}} = \frac{7}{10}$

### 3. Considera la función $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}$ , y calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ;

### 4. Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 5} m(x) = 4$ ; $\lim_{x \rightarrow 5} n(x) = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow 5} p(x) = +\infty$ , calcula si es posible el límite cuando x tiende a 5 de:

a)  $m(x) + n(x) + p(x)$  e)  $\frac{m(x)}{n(x)}$  i)  $m(x)^{n(x)}$   
 b)  $m(x) \cdot n(x) - p(x)$  f)  $n(x) \cdot p(x)$  j)  $m(x)^{p(x)}$   
 c)  $m(x) \cdot p(x)$  g)  $\frac{p(x)}{m(x)}$  k)  $n(x)^{p(x)}$   
 d)  $\frac{n(x)}{m(x)}$  h)  $\frac{n(x)}{p(x)}$  l)  $p(x)^{n(x)}$

### 5. Resuelve los límites de las siguientes funciones:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x-2}{x^2-x-2} \right)$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x-8} \right)$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} \right)$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2} \right)$

### 6. (Andalucía Septiembre 2014) Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \sin(x)} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite

### 7. (Andalucía Septiembre 2016) Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x-1} - \frac{m}{2x} \right)$ es finito, calcula m y el valor del límite

### 8. (Andalucía Junio 2016) Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(x+1) - a \sin(x) + x \cos(3x)}{x^2} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite

## BOLETÍN 1. LÍMITES

1. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+7)^{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(3x+7)^{x-2}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$

1. b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 0.01x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-0.01x^2) = \boxed{-\infty}$

1. c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} +\infty - \infty = \boxed{+3}$

1. d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x+1} = \boxed{-\infty}$

1. e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{2x} + 5e^{-x}}{3e^{2x} - e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 5e^{-3x}}{3 - e^{-3x}} = \boxed{\frac{1}{3}}$

1. f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4-x+4)(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{(x+2-x+2)(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{4(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})} = \frac{8(\sqrt{1} + \sqrt{1})}{4(\sqrt{1} + \sqrt{1})} = \boxed{2}$

1. g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1}}{3^x + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^x}{3^x + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{10}{3^x}} = \boxed{3}$

1. h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 4^{x^2} = 4^\infty = \boxed{\infty}$

1. i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2(\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+2})$   
 $= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-1 - x^2-x+2}{\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x^2-x+2}} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x^2-x+2}} = 2 \cdot \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$

$$1.j) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+\sqrt{2x}} - \sqrt{2x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+\sqrt{2x} - 2x}{\sqrt{2x+\sqrt{2x}} + \sqrt{2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+\sqrt{2x}} + \sqrt{2x}}$$

$$\frac{0}{0} x^{1/2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{\frac{2}{x^2}}} + \sqrt{2}} = \left[ \frac{1}{2} \right]$$

$$1.k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2+6}{6x+3x^2} \right)^{-\frac{x}{4}} = 1^{-\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)}$$

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2+6}{6x+3x^2} - 1 \right) \left( -\frac{x}{4} \right)} \Rightarrow L' = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2+6-3x^2-6x}{6x+3x^2} \right) \left( -\frac{x}{4} \right)$$

$$\Rightarrow L' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 6x}{24x + 12x^2} = 1/2$$

RESULTADO:  $L = e^{1/2}$

## BOLETÍN 1. LÍMITES

$$(2) \quad 2.a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2+3}{mx+2x^2} \right)^{x+2} = \frac{1}{e} \Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ límite} \\ \text{Indeterminación } 1^\infty \end{cases}$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-1)q(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2+3}{mx+2x^2} - 1 \right) \cdot (x+2) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3-mx-2x^2}{mx+2x^2} (x+2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-mx)(x+2)}{mx+2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+6-mx^2-2mx}{mx+2x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-mx^2}{2x^2} = -1 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

$$2.b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+3}{2+5x} \right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}} = \frac{7}{10} \Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ límite} \\ \text{Indeterminación } 1^\infty \end{cases}$$

$$\frac{7}{10} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-1)q(x)} \Rightarrow \ln \frac{7}{10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+3}{2+5x} - 1 \right) \left( \frac{x^2-2}{8+mx} \right)$$

aplicando  
ln.

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2+5x} \right) \left( \frac{x^2-2}{8+mx} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-2}{16+2mx+40x+5mx^2} \right)$$

$$= \frac{1}{5m} = \ln \frac{7}{10} \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{5 \cdot \ln\left(\frac{7}{10}\right)}}$$

3

$$3a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{5}{\sqrt{1}} = \boxed{5}$$

$$3b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{-3}{\sqrt{1}} = \boxed{-3}$$

$$3c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = \boxed{\frac{7}{\sqrt{6}}}$$

4

$$4a) \lim_{x \rightarrow 5} m(x) + n(x) + p(x) = \lim_{x \rightarrow 5} m(x) + \lim_{x \rightarrow 5} n(x) + \lim_{x \rightarrow 5} p(x) = \frac{4}{4} + \frac{0}{0} + \frac{\infty}{\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$4b) \lim_{x \rightarrow 5} m(x) \cdot n(x) \cdot p(x) = 4 \cdot 0 \cdot \infty = \boxed{-\infty}$$

$$4c) \lim_{x \rightarrow 5} m(x) \cdot p(x) = 4 \cdot \infty = \boxed{+\infty}$$

$$4d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{n(x)}{m(x)} = \frac{0}{4} = \boxed{0}$$

$$4e) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{m(x)}{n(x)} = \frac{4}{0} = \boxed{+\infty}$$

$$4f) \lim_{x \rightarrow 5} n(x) \cdot p(x) = 0 \cdot \infty \Rightarrow \boxed{\text{INDETERMINACIÓN}}$$

$$4g) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{p(x)}{m(x)} = \frac{\infty}{4} = \boxed{+\infty}$$

$$4h) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{n(x)}{p(x)} = \frac{0}{\infty} = \boxed{0}$$

$$4i) \lim_{x \rightarrow 5} m(x)^{n(x)} = 4^0 = \boxed{1}$$

$$4j) \lim_{x \rightarrow 5} m(x)^{p(x)} = 4^{\infty} = \boxed{\infty}$$

# BOLETÍN 1. LÍMITES

4) 4.k)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{p(x)}{n(x)} = 0^{\infty} = \boxed{0}$

4.l)  $\lim_{x \rightarrow 5} p(x)^{n(x)} = \infty^0 \rightarrow \text{INDETERMINACIÓN}$

5) 5.a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x-2}{x^2-x-2} \right) = \frac{0}{4-2-2} = \frac{0}{0}$

L'Hopital

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{4-1} = \boxed{\frac{1}{3}}$

5.b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-8+24-24+8}{-8-8+8-8} = \frac{0}{0}$

L'Hopital

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+12x+12}{3x^2-4x-4} = \frac{12+(-24)+12}{+12+8-4} = \frac{0}{16} = \boxed{0}$

5.c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} \right) = \frac{0}{0}$

L'Hopital

$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot (4-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}} = \boxed{0}$

5.d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2} = \frac{0}{0}$

L'Hopital

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \cdot 2x}{3-2x} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0} \cdot 6}{3-6} = \frac{\infty}{3} = \boxed{\infty}$

$$\textcircled{6} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \sin x} \right) \rightarrow \text{tiene límite y es finito} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 1 + a \cdot 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \quad \text{INDETERMINACIÓN} \Rightarrow \text{Aplicamos L'Hopital}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin(3x) - e^x + a}{\sin(x) + x \cos(x)} = \frac{0 - 1 + a}{0 + 0} = \frac{0}{0}$$

↑  
POR ENUNCIADO

$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Para calcular el límite volvemos a hacer L'Hopital.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos(3x) - e^x}{\cos(x) + \cos(x) + x \cdot (-\sin(x))} = \frac{-9 - 1}{2} = \boxed{-5}$$

$$\textcircled{7} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} \right) \rightarrow \text{tiene límite y es finito} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-1} - \frac{m}{0} \Rightarrow \infty - \infty \Rightarrow \text{INDETERM.} \Rightarrow \text{OPERAMOS FRACCIONES}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - m(e^x - 1)}{2x(e^x - 1)} = \frac{0 - 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{INDETERM.} \Rightarrow \text{L'HOPITAL}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - m e^x}{2(e^x - 1) + 2x \cdot e^x} = \frac{2 - m}{2(1-1) + 2 \cdot 0} \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

↑  
POR ENUNCIADO

APLICAMOS L'HOPITAL

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-m e^x}{2e^x + 2e^x + 2x \cdot e^x} = \frac{-m}{2 + 2 + 0} = \frac{-2}{4} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

## BOLETÍN 1. LÍMITES

⑧  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(x+1) - a \sin(x) + x \cos(3x)}{x^2} \right) \rightarrow$  Tiene límite  
es finito.

$\Rightarrow \frac{0 - a \cdot 0 + 0 \cdot \cos(0)}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$  Indeterm. L'Hopital

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+1)} - a \cos(x) + \cos(3x) - 3x \sin 3x}{2x} = \frac{1 - a + 1 - 0}{0}$

$\Rightarrow$  Como tiene  $\Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$   
límite finito

↓ Aplicamos L'Hopital

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 2 \sin(x) - 3 \sin(3x) - 9 \sin(3x) - 9x \cos(3x)}{2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1} + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 9 \cdot 0 - 9 \cdot 0 \cdot 1}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$