

Movemento parabólico.

- Resulta da composición dun movemento MRU no eixe X e un movemento MRUA no eixe Y.
- As ecuacións que temos son: (asumimos que $t_0=0$)

- **Eixe X:** MRU

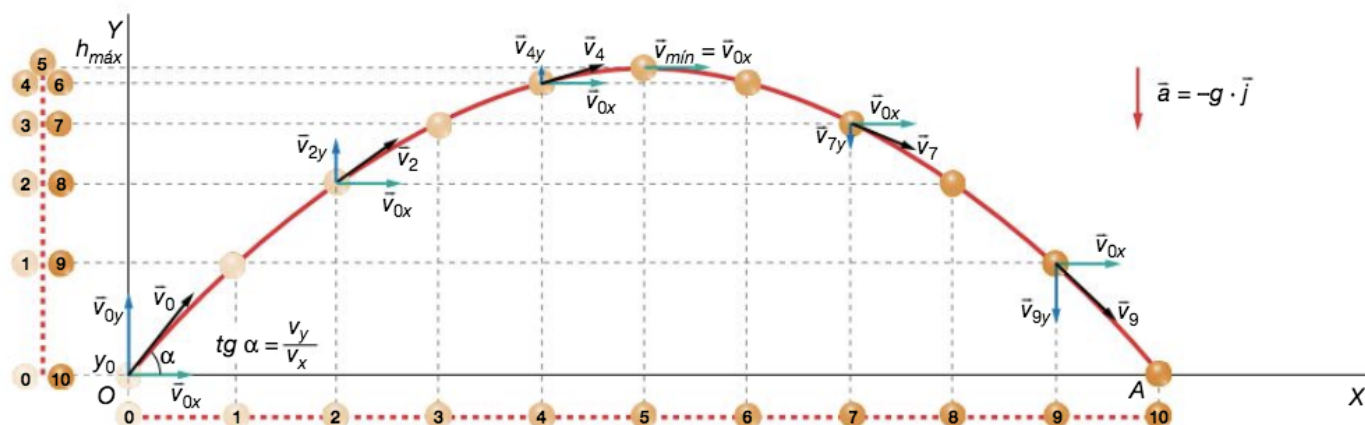
$$a_x=0; \quad v_x=v_{0x}=v_0 \cos \alpha; \quad x=x_0+v_x t=x_0+(v_0 \cos \alpha)t$$

- **Eixe Y:** MRUA

$$a_y=-g; \quad v_y=v_0 \sin \alpha - gt; \quad y=y_0+v_y t - \frac{1}{2}gt^2=y_0+(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

- As ecuacións vectoriais do movemento son:

$$\vec{a}(t)=-g\vec{j} \quad \vec{v}(t)=(v_0 \cos \alpha)\vec{i}+(v_0 \sin \alpha - gt)\vec{j} \quad \vec{r}(t)=[x_0+(v_0 \cos \alpha)t]\vec{i}+\left[y_0+(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\vec{j}$$



- Os parámetros de interese máis representativos son: (asumindo $x_0=0, y_0=0$ para $t_0=0$)

- **Ecuación da traxectoria:**

Despexamos t na expresión do espazo no Eixe X e substituímos na expresión do espazo no Eixe Y.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad y = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} x - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = \tan \alpha \cdot x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2$$

obtendo a ecuación dunha parábola.

- **Altura máxima:** ($v_y=0$)

Igualamos a 0 a expresión da velocidade no Eixe Y e despexamos o tempo.

$$v_y=0=v_0 \sin \alpha - gt \Leftrightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Substituímos esta expresión na ecuación do espazo no Eixe Y.

$$y = (v_0 \sin \alpha) \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

- **Tempo de voo:** ($y=0$)

É o tempo que dura todo o movemento parabólico. Igualamos a 0 a expresión do espazo no Eixe Y e despexamos o tempo.

$$y=0=(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

O tempo de voo é o dobre do tempo que lle leva en alcanzar a altura máxima. Lóxico xa que o movemento é simétrico.

- **Alcance:** ($y=0$)

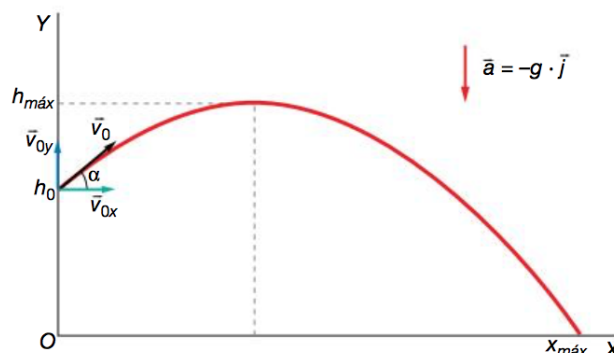
É a distancia horizontal que percorre o móbil durante todo o movemento parabólico. Substituímos a expresión do tempo de voo na expresión do espazo para o Eixe X:

$$x = (v_0 \cos \alpha) t = (v_0 \cos \alpha) \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

Pódese comprobar que o alcance é máximo para $\alpha=45^\circ$ (ben directamente, ven derivando e igualando a 0 para comprobar que existe un extremo en $\alpha=45^\circ$ e despois volvendo a derivar e comprobar que a segunda derivada é menor que 0 para $\alpha=45^\circ$)

Unha persoa mete un pincho dende un cantil de altura 30 m cunha velocidade de 40 Km/h e formando un ángulo de 40° coa horizontal. A 25 metros do cantil hai un lago. Indica:

- Cal é a altura máxima que alcanza.
- Cae á auga do lago ou bate contra o chan?
- Cal é o módulo da velocidade no punto de impacto (co chan ou a auga)?
- Con que ángulo impacta respecto á horizontal?



Antes de nada, pasamos os km/h a m/s e calculamos as compoñentes da velocidade.

$$40 \text{ Km/h} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ Km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 11,11 \text{ m/s} \quad v_{0x} = v_0 \cos 40^\circ = 11,11 \cdot 0,77 = 8,55 \text{ m/s} \quad v_{0y} = v_0 \sin 40^\circ = 11,11 \cdot 0,64 = 7,11 \text{ m/s}$$

a) Para calcular a altura máxima facemos $v_y = 0$ e substituímos:

$$v_y = 0 = v_0 \sin \alpha - g t \Leftrightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{7,11 \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 0,73 \text{ s} \quad \text{Agora substituímos este valor na ecuación do espazo:}$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 = 30 \text{ m} + 7,11 \text{ m/s} \cdot 0,73 \text{ s} - \frac{1}{2} 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,73^2 \text{ s}^2 = 32,58 \text{ m}$$

b) Calculamos o tempo de voo facendo $y = 0$ na ecuación do espazo no Eixe Y e resolvemos a ecuación:

$$y = 0 = y_0 + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 = 30 + 7,11 t - 4,9 t^2 \quad t = \frac{-7,11 \pm \sqrt{7,11^2 - 4 \cdot (-4,9) \cdot 30}}{2 \cdot (-4,9)} = 3,30 \text{ s} \quad (-1,85 \text{ s})$$

E agora substituímos este tempo na ecuación do espazo percorrido no Eixe X:

$$x = x_0 + (v_0 \cos \alpha) t = 0 + 8,55 \text{ m/s} \cdot 3,30 \text{ s} = 28,22 \text{ m} \quad \text{Polo que cae no lago.}$$

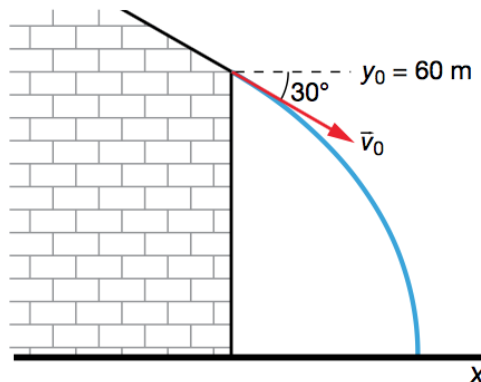
c) Para calcular a velocidade coa que impacta: no Eixe X a velocidade é constante. A velocidade no Eixe Y calculámola substituíndo na súa ecuación o tempo de voo.

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 8,55 \text{ m/s} & v_y &= v_0 \sin \alpha - g t = 7,11 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 3,30 \text{ s} = -25,23 \text{ m/s} \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8,55^2 + (-25,23)^2} = 26,64 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$d) \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-25,23 \text{ m/s}}{8,55 \text{ m/s}} = -2,95 \Rightarrow \alpha = -71,28^\circ$$

Unha pelota roda por un tellado que forma 30° coa horizontal, cuxa base se atopa a 60 m do chan. Ao chegar ao extremo ten unha celeridade de 10 m/s. Calcula:

- Canto tarda a bola en chegar ao chan?
- Con que velocidade (vector) impacta?
- Con que ángulo impacta respecto á horizontal?
- Se a rúa tivese unha anchura de 30 m, chegaría directamente ao chan ou chocaría coa parede do edificio oposto?



Previamente calculamos as compoñentes da velocidade:

$$v_{0x} = v_0 \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ m/s} \quad v_{0y} = v_0 \sin 30^\circ = -10 \cdot 0,5 = -5 \text{ m/s}$$

- a) Para calcular o tempo de voo, substituímos na ecuación do espazo para o Eixe Y a condición $y=0$.

$$y=0=y_0+(v_0 \sin \alpha)t-\frac{1}{2}gt^2=60-5t-4,9t^2 \quad t=\frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2-4 \cdot (-4,9) \cdot 60}}{2 \cdot (-4,9)}=3,03 \text{ s} (-4,04 \text{ s})$$

- b) Para calcular o vector velocidade, na compoñente X a velocidade non varíase e para a compoñente Y substituímos nas ecuacións correspondente:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ m/s} \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt = -5 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 3,03 \text{ s} = -34,69 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = 8,66 \vec{i} - 34,69 \vec{j}$$

- c) Para calcular o ángulo, sabemos que $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-34,69 \text{ m/s}}{8,66 \text{ m/s}} = -4,01 \Rightarrow \alpha = -76,00^\circ$

- d) Para calcular o alcance, substituímos na ecuación do espazo para o Eixe X o tempo de voo:

$$x = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t = 0 + 8,66 \text{ m/s} \cdot 3,03 \text{ s} = 26,24 \text{ m} \quad \text{O alcance é menor que a anchura da rúa, polo que non choca co edificio de en fronte.}$$