

RELACIÓN ENTRE COMBINACIÓN LINEAR E DEPENDENCIA LINEAR

Existe unha relación inmediata entre os conceptos de combinación linear e de dependencia linear dun conxunto de vectores, a través do seguinte resultado.

Un conxunto de vectores $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente $\Leftrightarrow \exists i = 1, \dots, k \mid v_i$ é combinación linear dos outros vectores do conxunto C .

Demostración

$\Rightarrow$ Condición necesaria

Partamos da hipótese de que o conxunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é linearmente dependente. Isto equivale a que existe algunha combinación linear distinta da trivial que dea como resultado o vector nulo, é dicir: $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \mid \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k = 0$, onde polo menos un dos α_i é distinto de cero. Supoñamos que é $\alpha_1 \neq 0$. Entón temos a expresión equivalente $\alpha_1 \cdot v_1 = -\alpha_2 \cdot v_2 - \dots - \alpha_k \cdot v_k$. Por ser $\alpha_1 \neq 0$ podemos multiplicar esta expresión polo inverso de α_1 , e resulta: $\frac{1}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 \cdot v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot v_k$.

Reducindo esta expresión obtemos que $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot v_k$, que equivale a afirmar que o vector v_1 é combinación linear dos vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ q.e.d.

[Nota: Se supuxéramos que o escalar non nulo é outro distinto de α_1 –xá que algun ten que haber– a demostración faría-se de forma análoga.]

$\Leftarrow$ Condición suficiente

Supoñamos que algun dos vectores é combinación linear do resto: por exemplo o primeiro vector v_1 . Daquela $v_1 = \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_k \cdot v_k$, onde $\alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Esta expresión equivale a $v_1 - \alpha_2 \cdot v_2 - \dots - \alpha_k \cdot v_k = 0$, que non é outra cousa que unha combinación linear non trivial que dá como resultado o vector nulo. Por tanto o conxunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é linearmente dependente q.e.d.

[Nota: Se no lugar de v_1 fose outro o vector que é combinación linear do resto, a demostración sería similar.]