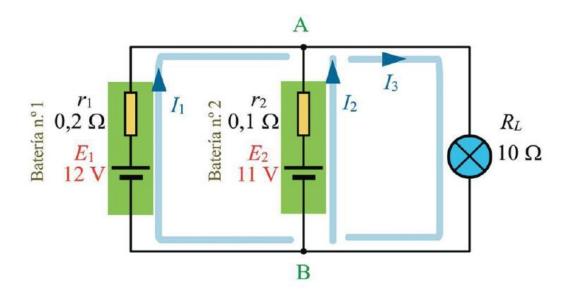
UD3. METODOS DE ANALISIS DE CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

1.- Leyes de Kirchhoff

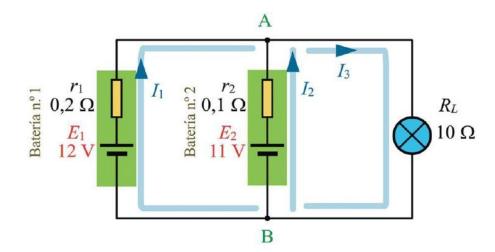
Estas leyes se utilizan para resolver circuitos eléctricos complejos, en los cuales existen interconectados varios generadores y receptores.



En el circuito de la Figura se han conectado en paralelo dos baterías de acumuladores que suministran energía a una lámpara de $10~\Omega$.

La batería nº1 produce una f.e.m. E_1 de 12V con una resistencia interna r_1 = 0,2 Ω . En la batería nº2, E_2 = 11V r_2 = 0, 1 Ω .

Calcula la tensión que aparece en bornes de la lámpara, así como la intensidad y potencia de esta. ¿Qué corriente cede cada una de las baterías? Este problema se puede resolver aplicando adecuadamente las leyes de Kirchhoff.

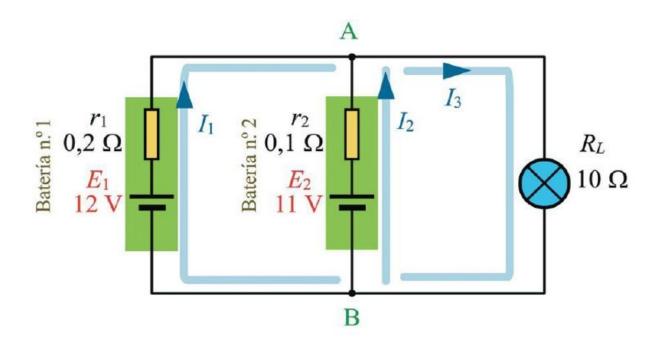


1^a ley de Kirchhoff

En todo circuito eléctrico, la suma de las corrientes que se dirigen hacia un nudo es igual a la suma de las intensidades que se alejan de él.

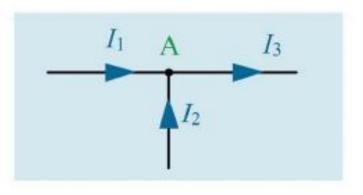
En cierto modo, esta ley ya la hemos estado aplicando para la resolución de los circuitos en paralelo.

Un nudo es cualquier punto de un circuito donde se conectan más de dos conductores. En el ejemplo mostrado en la Figura existen el nudo A y el nudo B.



En el nudo A se cumplirá que

$$I_1 + I_2 = I_3$$



2ª ley de Kirchhoff

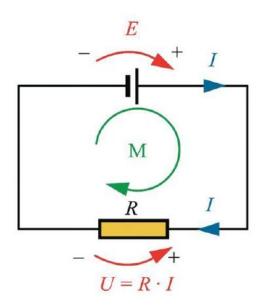
En un circuito cerrado, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices de los generadores es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión en los receptores.

Dado que tanto las f. e. m. como las caídas de tensión son diferencias de potencial, también se podría enunciar esta ley así:

A lo largo de todo camino cerrado o malla, correspondiente a un circuito eléctrico, la suma algebraica de todas las diferencias de potencial o tensiones es igual a cero.

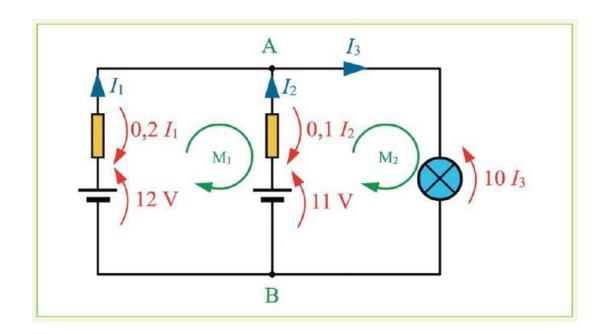
Esta ley ya la hemos estado aplicando para la resolución de los circuitos en serie.

La única dificultad que encontramos para aplicar la 2.ª ley de Kirchhoff es determinar qué diferencias de potencial son de un determinado signo respecto a las otras, y así conseguir igualarlas a cero.



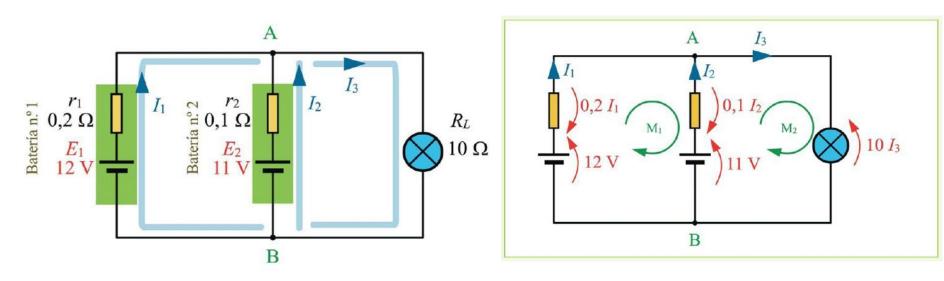
Una **malla** es todo camino cerrado de un circuito eléctrico. En nuestro ejemplo se pueden apreciar claramente la malla M_1 y la malla M_2 .

Las hemos representado en el circuito mediante una flecha curvada que nos indica el recorrido de las mismas.



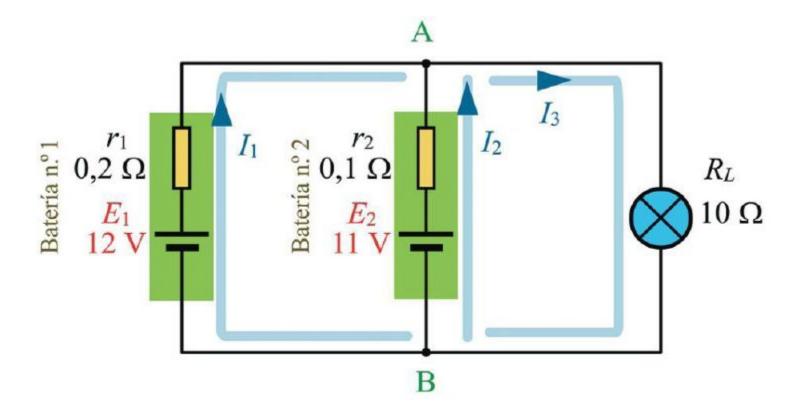
La malla M_1 se cierra por la batería de 12V junto con su resistencia interna de $0,2\Omega$, continúa por la resistencia interna de $0,1\Omega$ de la segunda batería, para acabar cerrando el circuito por la batería de 11 V.

La malla M_2 lo hace por la batería de 11V y su correspondiente resistencia interna de $0,1\Omega$ y se cierra por la resistencia de 10Ω de la lámpara.



- ¿Cómo se aplican las leyes de Kirchhoff para la resolución de circuitos?
- a) Se fija provisionalmente el sentido de las intensidades de corriente por cada una de las ramas del circuito partiendo del principio de que los generadores proporcionan corriente por su terminal positivo.
- b)Las f.e.m. y las caídas de tensión se consideran positivas si la flecha que indica su sentido coincide con el marcado por nosotros en la malla, y negativa en el caso contrario.
- c) Se aplicará la 1.ª ley a todos los nudos del circuito excepto a uno (esto se hace para no escribir ecuaciones repetidas).
- d) Se aplicará la 2.ª ley a tantas mallas o circuitos cerrados como sea necesario para disponer de un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas.

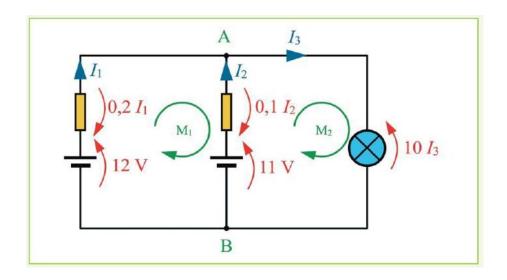
Ejemplo: Resuelve el circuito de la figura



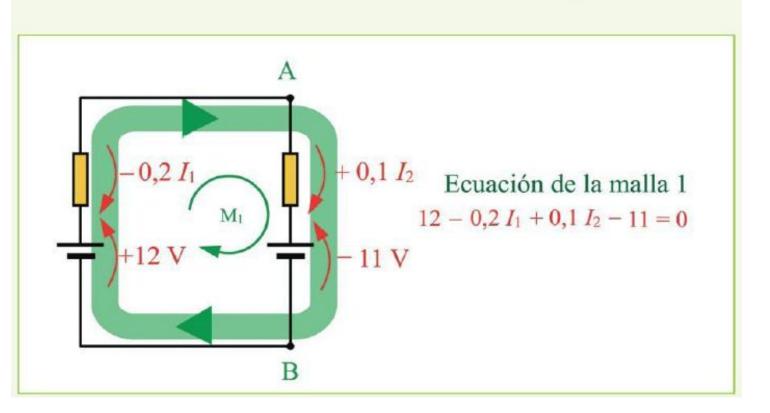
Se ha supuesto que las intensidades I_1 e I_2 parten de los generadores hacia la lámpara (según el sentido convencional), donde se juntan y forman I_3 .

Los términos $0.2 I_1 y 0.1 I_2$ corresponden a las caídas de tensión de los respectivos generadores (U = R.I).

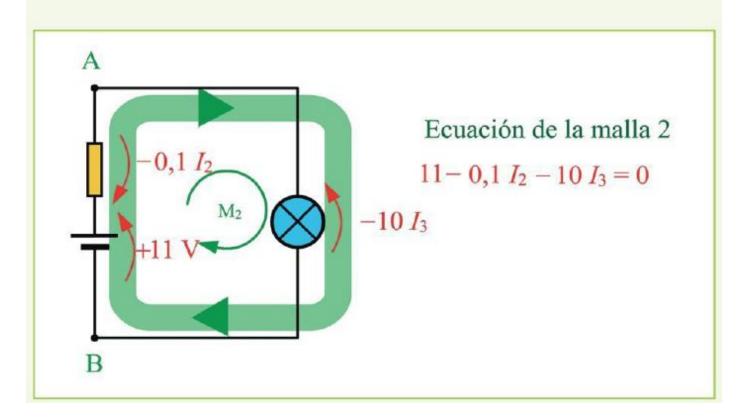
El término 10 I_3 corresponde a la tensión en bornes de la lámpara (U = R.I).



Al recorrer la malla M_1 , la caída de tensión $0,2\ l_1$ y los $11\ V$ del generador n.º 2 quedan en sentido contrario a los $12\ V$ del generador n.º 1 y a la caída de tensión $0,1\ l_2$

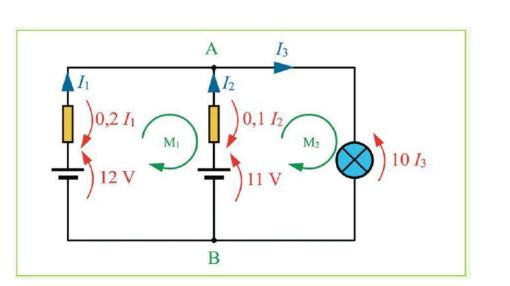


Al recorrer la malla M_2 , la caída de tensión $0,1\ I_2$ y la tensión en bornes de la lámpara $10\ I_3$ quedan en sentido contrario a los $11\ V$ del generador n.º 2



Nudo A (1)
$$I_1 + I_2 = I_3$$

Malla M₁ (2) 12 - 0,2 $I_1 + 0$,1 $I_2 - 11 = 0$
Malla M₂ (3) 11 - 0,1 $I_2 - 10$ $I_3 = 0$



Ahora solo nos queda resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (I_1 , I_2 e I_3). Para ello, nos valemos de cualquiera de los métodos conocidos: reducción, sustitución e igualación. En nuestro caso sustituiremos los términos de la ecuación (1) en la ecuación (3). De esta forma eliminamos

(3)
$$11 - 0.1 I_2 - 10 (I_1 + I_2) = 0$$
, simplificando:

(3) $11 - 10 I_1 - 10,1 I_2 = 0$, y con la ecuación n.° 2:

(2) $1 - 0.2 I_1 + 0.1 I_2 = 0$

una ecuación y una incógnita:

Al multiplicar la ecuación (2) por 101 y sumar este resultado a la ecuación (3) se elimina I_2 :

(3) $11 - 10 I_1 - 10,1 I_2 = 0$

 $I_2 = 3.71 - 2.58 = 1.13 \text{ A}$

$$\frac{(2)\ 101 - 20,2\ l_1 + 10,1\ l_2 = 0}{112 - 30,2\ l_1 = 0}$$

de donde: $I_1 = \frac{112}{30.2} = 3,71 \text{ A}$

$$1 - 0.2(3,71) + 0.1 I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{0.2(3,71) - 1}{0.1} = -2.58 \text{ A}$$

0,1

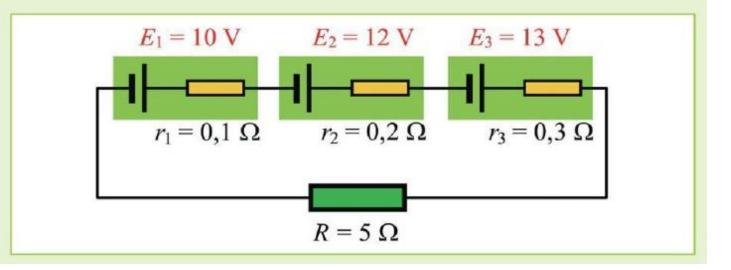
La tensión en bornes de la lámpara y su potencia es:

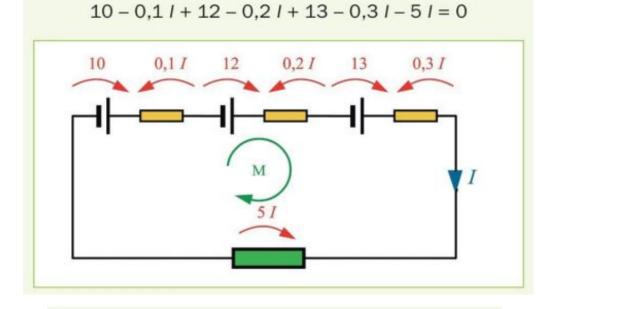
$$II_{ro} = R_{r}I_{o} = 10 \cdot 113 = 113 \text{ V}$$

 $P_1 = U_{AB}I_3 = 11.3 \cdot 1.13 = 12.8 \text{ W}$

$$U_{AB} = R_L I_3 = 10 \cdot 1,13 = 11,3 \text{ V}$$

Se conectan en serie tres baterías de acumuladores, tal como se muestra en el circuito de la Figura $\,$, para alimentar un horno de 5 Ω de resistencia. Determina la tensión en bornes del horno, así como su tensión y potencia.





Agrupando términos:

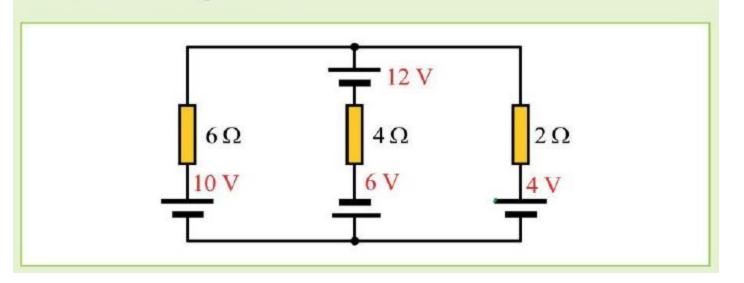
$$(10 + 12 + 13) - I(0,1 + 0,2 + 0,3 + 5) = 0$$

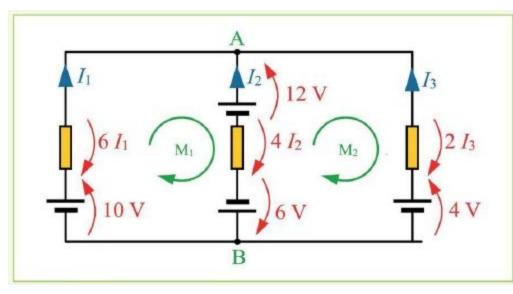
y despejando, tenemos que:

$$I = \frac{35}{5.6} = 6.25 \text{ A}$$

Tensión en bornes del horno: $U = RI = 5 \cdot 6.25 = 31.25 \text{ V}$
Potencia del horno: $P = UI = 31.25 \cdot 6.25 = 195 \text{ W}$

Determina las corrientes por cada una de las ramas del circuito de la Figura



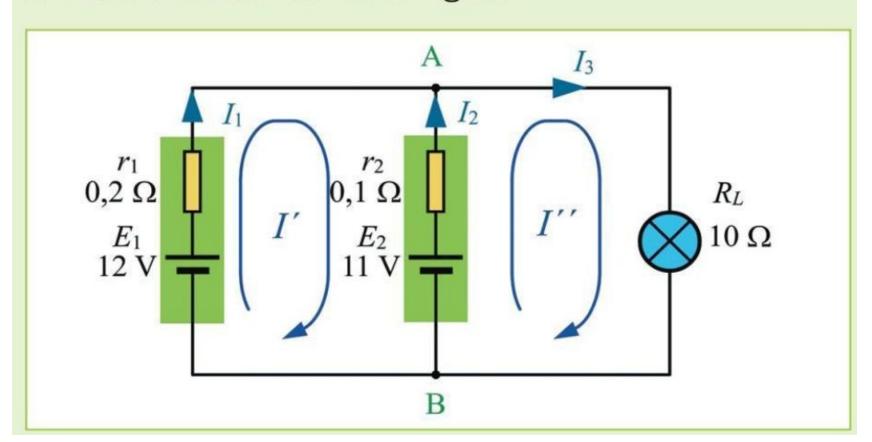


$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
 $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ $I_1 = 0,727 \text{ A}$
 $10 - 6I_1 - 12 + 4I_2 + 6 = 0$ $-6I_1 + 4I_2 + 0I_3 = -4$ $I_2 = 0,091 \text{ A}$
 $-6 - 4I_2 + 12 + 2I_3 - 4 = 0$ $0I_1 - 4I_2 + 2I_3 = -2$ $I_3 = -0,818 \text{ A}$

2.- Ecuaciones de las mallas o de Maxwell

Con la idea de simplificar el número de ecuaciones que se plantean en la resolución de un circuito, Maxwell desarrolló el siguiente sistema que parte de la segunda ley de Kirchhoff.

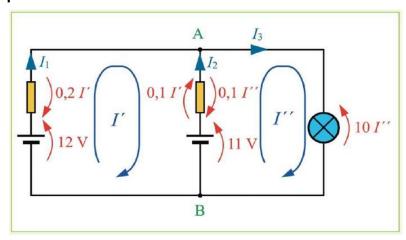
Se supone que las diferentes mallas del circuito son recorridas por lo que se conoce como corrientes de mallas. El número de ecuaciones necesarias para resolver el circuito será igual al número de incógnitas planteadas, que en este caso coincidirá con las corrientes de malla. Averigua las corrientes l_1 , l_2 e l_3 que fluyen por cada una de las ramas del circuito de la Figura

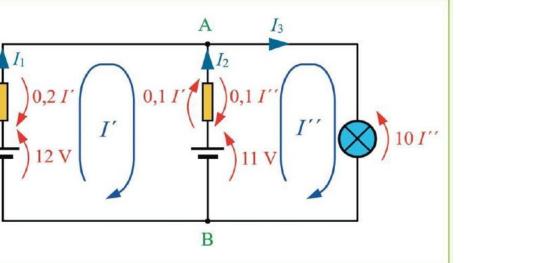


Ahora aparecen en las mallas 1 y 2 las corrientes de malla l' e l", respectivamente.

La corriente l' fluye a través de E_1 , r_1 , r_2 y E_2 . Por otro lado, la corriente l' lo hace por r_2 , E_2 Y R_1 .

Para averiguar el valor de las corrientes de malla planteamos la segunda ley de Kirchhoff en ambas mallas, aplicando los mismos criterios de signos que en otras ocasiones.





(1) Ecuación para la corriente de malla
$$I'$$
:
$$12 - 0.2 I' - 0.1 I' + 0.1 I'' - 11 = 0$$

11 - 0.1 I'' + 0.1 I' - 10 I'' = 0

(2) Ecuación para la corriente de malla I":

lores de l' e l'' (observa que aplicando las ecuaciones de Maxwell para resolver este circuito estamos necesitando una ecuación menos que si hubiésemos aplicado las dos

Con estas dos ecuaciones ya podemos averiguar los va-

leyes de Kirchhoff).

Simplificando y ordenando tenemos que:

(2)
$$11 + 0.1 I' - 10.1 I'' = 0$$

(1) 1 - 0.3 I' + 0.1 I'' = 0

Al multiplicar la ecuación (2) por 3 y sumar este resultado a la ecuación (1) se elimina I': (1) 1 - 0,3 I' + 0,1 I'' = 0

$$\frac{(2) 33 + 0.3 I' - 30.3 I'' = 0}{34 - 30.2 I'' = 0}$$

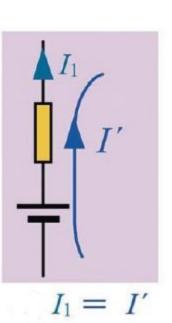
de donde: $I'' = \frac{34}{30,2} = 1,13 \text{ A}$ Sustituimos este resultado en la ecuación (1):

$$1 - 0.3 l' + 0.1 (1.13) = 0$$
$$1 - 0.3 l' + 0.113 = 0$$

 $I' = \frac{1+0,113}{0,3} = 3,71 \, \mathrm{A}$ Una vez que ya conocemos las corrientes de malla, ya podemos calcular las corrientes de rama I_1 , I_2 e I_3 .

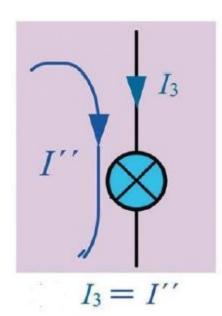
Para la corriente de rama l_1 observamos en el circuito de la Figura que esta corriente es igual a la de malla l':

$$I_1 = I' = 3,71 \text{ A}$$



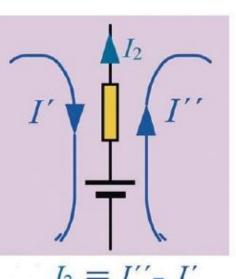
Lo mismo ocurre para la corriente de rama I_3 que es igual a la de malla I'':

$$I_3 = I'' = 1,13 \text{ A}$$



Si observas atentamente el circuito de la Figura podrás apreciar que la corriente I_2 es la diferencia de las corrientes de ambas mallas que comparte (I'' - I') (la que va en el mismo sentido menos la que va en sentido contrario):

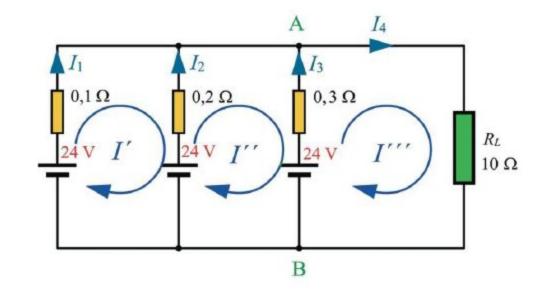
$$I_2 = I'' - I' = 1,13 - 3,71 = -2,58 \text{ A}$$



Hemos obtenido el mismo resultado al resolver este circuito mediante la aplicación de las dos leyes de Kirchhoff y la aplicación de las

ecuaciones de Maxwell.

Se conectan en paralelo tres generadores de 24 V de resistencia interna 0,1 Ω , 0,2 Ω y 0,3 Ω , respectivamente. Determina la corriente que suministra cada generador a una carga de 10 Ω , así como la tensión y la potencia a la que trabaja la misma.



$$24 - 0.1 I' - 0.2 I' + 0.2 I'' - 24 = 0$$

 $24 - 0.2 I'' + 0.2 I' - 0.3 I'' + 0.3 I''' - 24 = 0$
 $24 - 0.3 I''' + 0.3 I'' - 10 I''' = 0$

$$0,2 I' - 0,5 I'' + 0,3 I''' = 0$$

 $0 I' + 0,3 I'' - 10,3 I''' = -24$

-0.3 I' + 0.2 I'' + 0 I''' = 0

$$I' = 1,302 \text{ A};$$
 $I'' = 1,953 \text{ A};$
 $I''' = 2,387 \text{ A};$

$$I_1 = I' = 1,302 \text{ A};$$

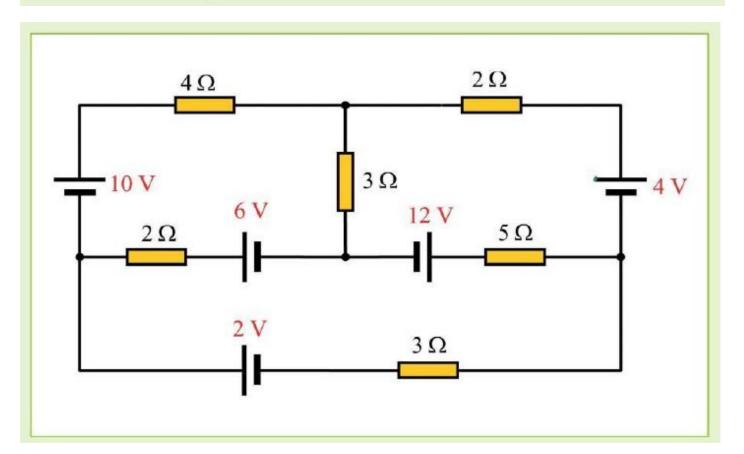
$$I_2 = I'' - I' = 1,953 - 1,302 = 0,651 \text{ A};$$

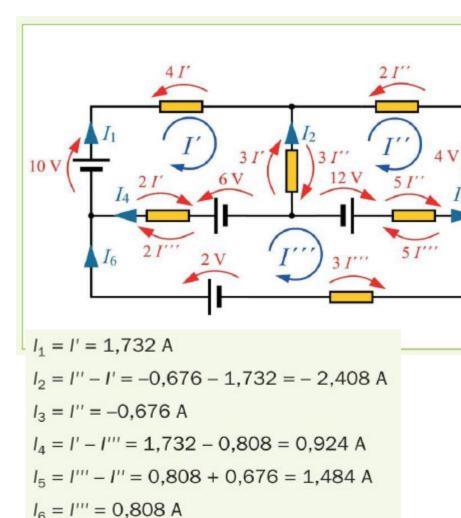
$$I_3 = I''' - I'' = 2,387 - 1,953 = 0,434 \text{ A};$$

 $I_4 = I''' = 2,387 \text{ A}$

 $U_{AB} = 23.87 \text{ V}; P = 56.98 \text{ W}$

Determina las corrientes por cada una de las ramas del circuito de la Figura

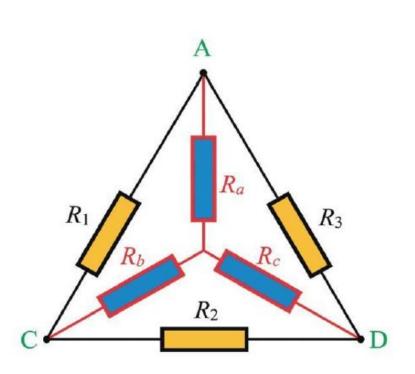




10 - 4I' - 3I' + 3I'' + 6 - 2I' + 2I''' = 0 -3I'' + 3I' - 2I'' - 4 - 5I'' + 5I''' - 12 = 0 2 + 2I''' + 2I' - 6 + 12 + 5I'' - 5I''' - 3I''' = 0 -9I' + 3I'' + 2I''' = -163I' - 10I'' + 5I''' = 16

2I' + 5I'' - 10I''' = -8 I' = 1,732 A; I'' = -0,676 A; I''' = 0,808 A;

3.- Resolución de circuitos mediante transformaciones de triángulo a estrella

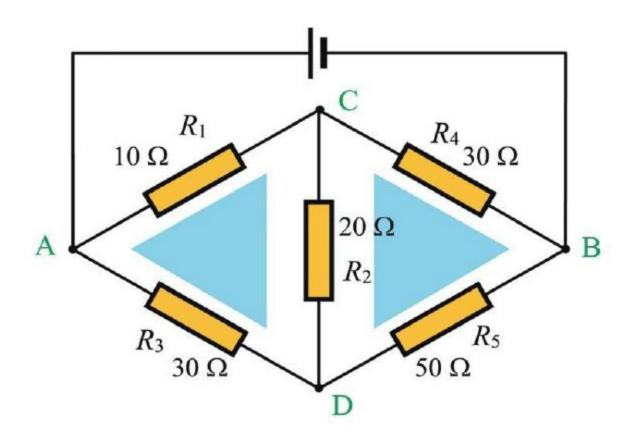


$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

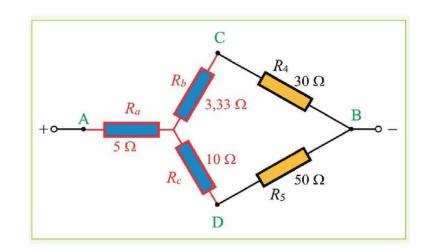
Calcula la resistencia equivalente del circuito

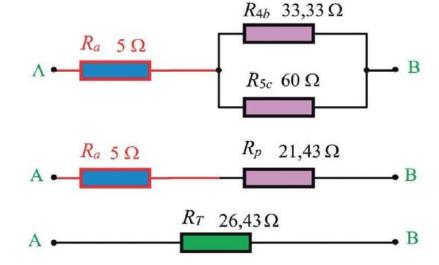


$$R_a = \frac{10 \cdot 30}{10 + 20 + 30} = 5 \ \Omega$$

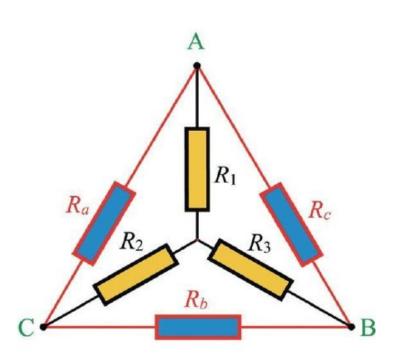
$$R_b = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20 + 30} = 3,33 \ \Omega$$

$$R_c = \frac{20 \cdot 30}{10 + 20 + 30} = 10 \ \Omega$$





4.- Resolución de circuitos mediante transformaciones de estrella a triángulo

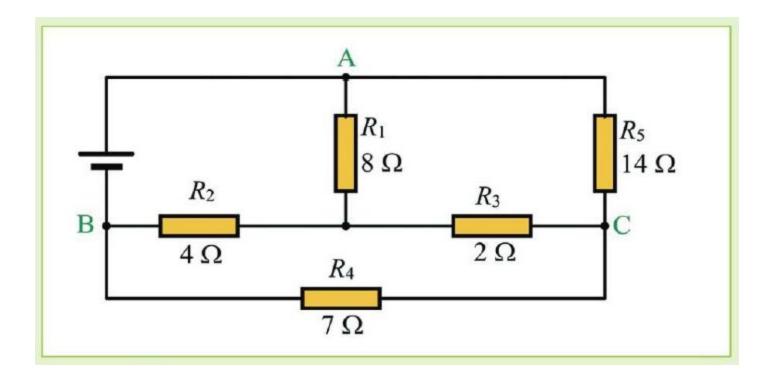


$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

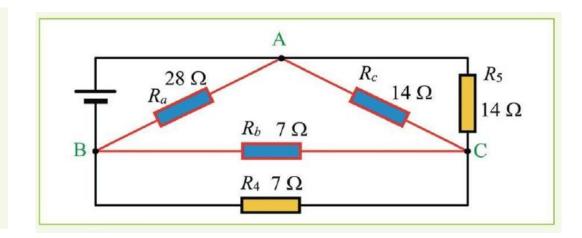
Determina la resistencia equivalente del circuito

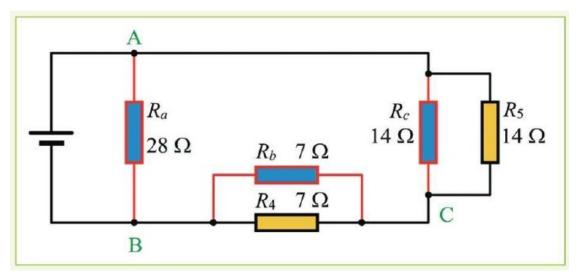


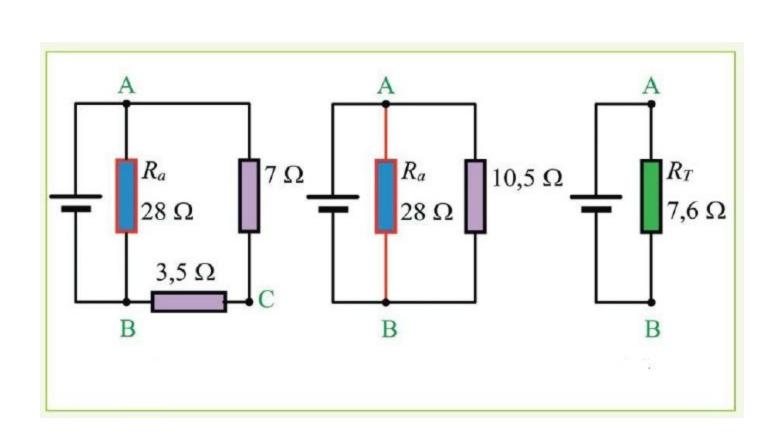
$$R_{a} = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8}{2} = 28 \Omega$$

$$R_{b} = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8}{8} = 7 \Omega$$

$$R_{c} = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8}{4} = 14 \Omega$$





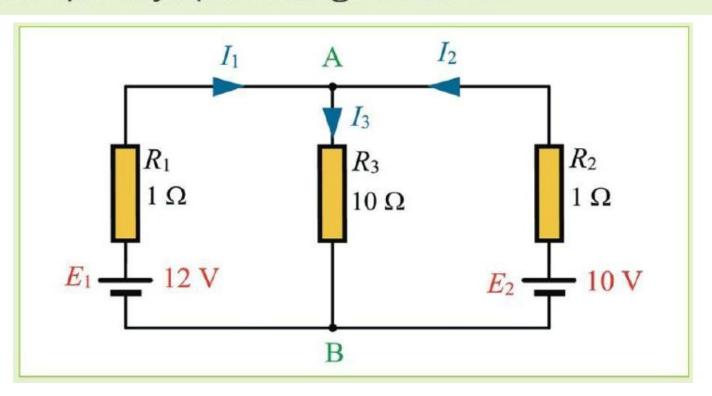


4.- Teorema de la superposición

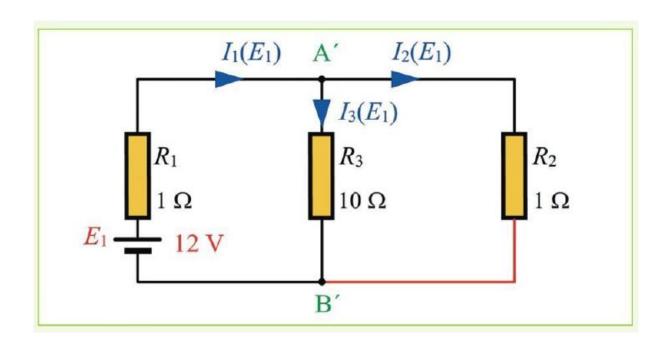
El teorema de la superposición nos indica que en un circuito formado por varias fuentes de tensión o de corriente, la tensión o la corriente que se presenta en cualquier componente de dicho circuito es la suma de los efectos producidos por cada una de las fuentes trabajando independientemente. El proceso de resolución de circuitos mediante el teorema de superposición suele ser el siguiente:

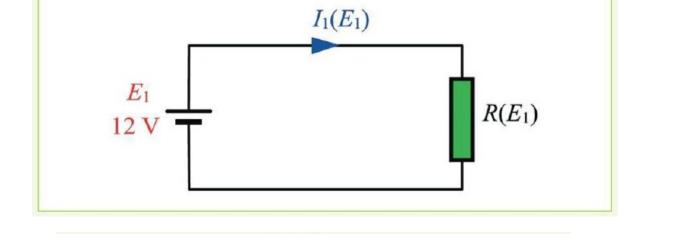
- 1.º Se selecciona una de las fuentes del circuito para que actúe por separado del resto.
 - 2.º Para eliminar el resto de las fuentes se procede de tal forma que si es una fuente de tensión se sustituye cortocircuitándola; pero si es una fuente de corriente se sustituye por un circuito abierto.
 - 3.º Se calculan las intensidades de corriente de cada uno de los circuitos equivalentes generados y que se corresponden con cada fuente por separado.
 - 4.º Se superponen los efectos producidos de forma aislada por cada fuente, con lo que se obtienen el resultado deseado.

Determina las corrientes proporcionadas por cada uno de los generadores del circuito de la Figura , así como la corriente que fluye por la carga de 10 Ω .



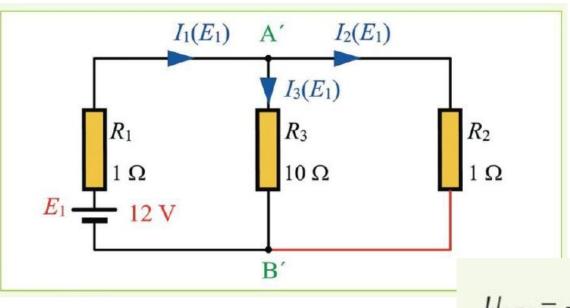
Primero aislamos del circuito la fuente de tensión E₁. Para hacerlo cortocircuitamos la fuente E₂, tal como se muestra en la Figura y resolvemos el circuito.





$$R(E_1) = R_1 + \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2} = \dots = 1,91 \Omega$$

 $I_1(E_1) = \frac{E_1}{R(E_1)} = \dots = 6,28 \text{ A}$



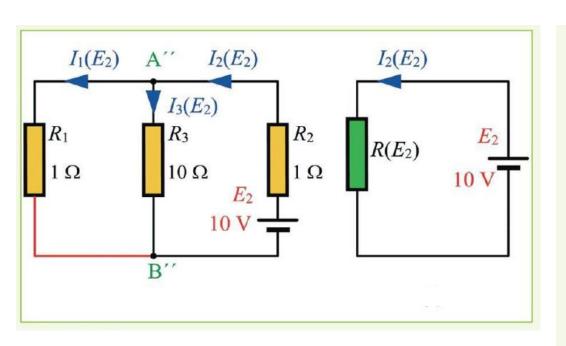
$$J_{A'B'} = -\frac{1}{F}$$

$$U_{A'B'} = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2} I_1(E_1) = \dots = 5,71 \text{ V}$$

$$I_2(E_1) = \frac{U_{A'B'}}{R_2} = \dots = 5,71 \text{ A}$$

$$I_3(E_1) = \frac{U_{A'B'}}{R_3} = \dots = 0,57 \text{ A}$$

Ahora repetimos el mismo proceso para aislar la fuente E_2 .



$$R(E_2) = R_2 + \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1} = \dots = 1,91 \Omega$$

$$I_2(E_2) = \frac{E_2}{R(E_2)} = \dots = 5,24 \text{ A}$$

$$U_{A''B''} = \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1} I_2(E_2) = \dots = 4,76 \text{ V}$$

$$I_1(E_2) = \frac{U_{A''B''}}{R_1} = \dots = 4,76 \text{ A}$$

$$I_3(E_2) = \frac{U_{A''B''}}{R_2} = \dots = 0,48 \text{ A}$$

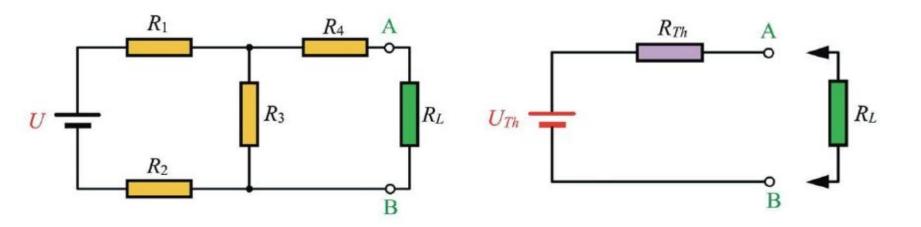
Por último sumamos las corrientes obtenidas con cada una de las fuentes, teniendo en cuenta los sentidos de las corrientes obtenidas en cada uno de los circuitos correspondientes.

$$I_1 = I_1(E_1) - I_1(E_2) = 6,28 - 4,76 = 1,52 \text{ A}$$

 $I_2 = I_2(E_2) - I_2(E_1) = 5,24 - 5,71 = -0,47 \text{ A}$
 $I_3 = I_3(E_1) + I_3(E_2) = 0,57 + 0,48 = 1,05 \text{ A}$

5.- Teorema de la Thévenin

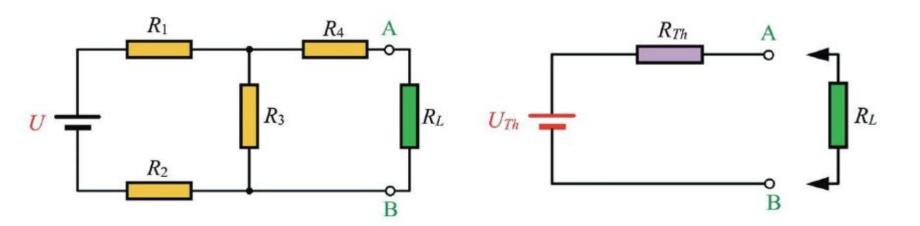
Mediante este teorema es posible reducir una red compleja con varias cargas interconectadas entre sí y encontrar un circuito equivalente sencillo, en el que solamente aparezca una fuente de tensión ideal con una resistencia en serie.



Supongamos que tenemos que calcular la corriente para diferentes valores óhmicos de la carga R_I conectada entre los extremos A y B de un circuito como el de la Figura.

Con los métodos conocidos hasta ahora, habría que reducir el circuito hasta encontrar uno equivalente con una sola resistencia para cada uno de los valores de la carga R_I.

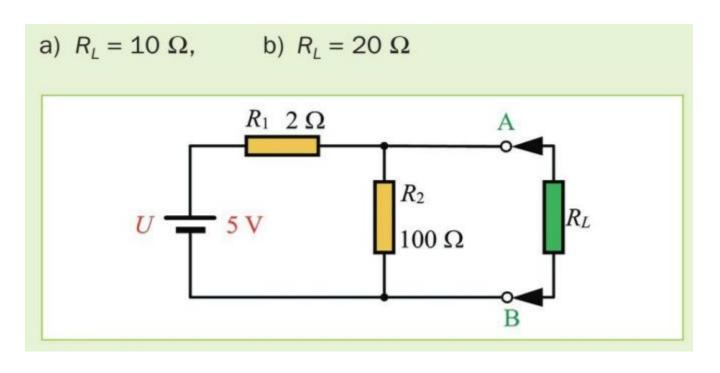
Mediante el teorema de Thévenin basta con encontrar una sola vez un circuito que contenga una fuente de tensión ideal U_{TH} en serie con una resistencia R_{TH} .



A la tensión que aparece cuando se desconecta la resistencia de carga se la conoce por el nombre de tensión de Thévenin (U_{TH}) .

La resistencia que queda conectada en serie con la fuente de tensión del circuito equivalente es la resistencia de Thévenin (R_{TH}), y es la que corresponde a los terminales A y B de la carga cuando se han cortocircuitado todas las fuentes de tensión del circuito.

En el circuito de la Figura se nos muestra el circuito equivalente de una fuente de alimentación; se trata de determinar la corriente y la tensión para los siguientes valores de la resistencia de carga R.



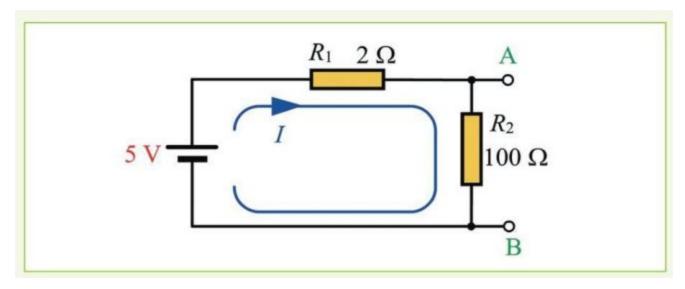
Lo primero que haremos será encontrar el circuito equivalente de Thévenin entre los extremos de la carga R_L . Para ello, primero cortocircuitamos la fuente de tensión de 5 V, según se muestra en el circuito de la Figura . Con este circuito es fácil calcular la resistencia de Thévenin, que se

lelo:

circuito es facil calcular la resistencia de Thevenin, que se corresponderá con la que aparece entre los terminales A y B. Como las resistencias R_1 y R_2 están conectadas en para-

 $R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1,96 \Omega$ $R_1 \ 2 \Omega \qquad A$ $R_2 \qquad R_{Th}$

Para calcular la tensión de Thévenin, cálculamos la tensión que aparecen entre los terminales A y B:

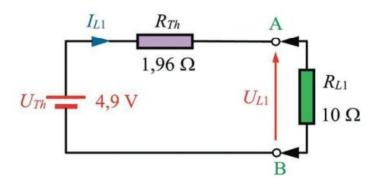


$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{5}{2 + 100} = 0,049 \text{ A}$$

$$U_{Th} = U_{AB} = R_2 I = 100 \cdot 0,049 = 4,9 \text{ V}$$

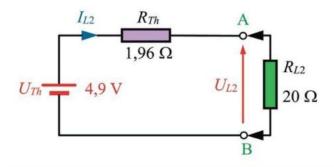
Una vez encontrados los valores de U_{TH} y R_{TH} , resolvemos el ejercicio:

a)
$$R_L = 10 \Omega$$
,



$$I_{L1} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_{L1}} = \frac{4,9}{1,96 + 10} = 0,41 \text{ A}$$
$$U_{L1} = I_{L1}R_{L1} = 0,41 \cdot 10 = 4,1 \text{ V}$$

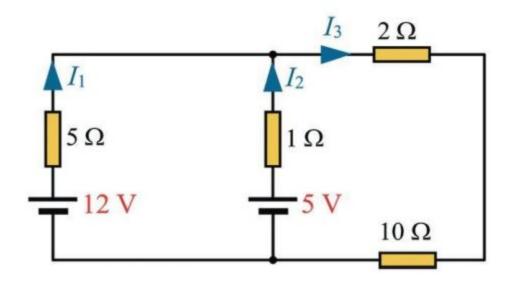
b)
$$R_L = 20 \Omega$$

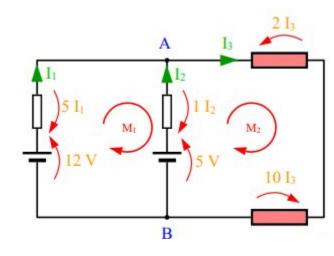


$$I_{L2} = \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_{L2}} = \dots = 0,22 \text{ A}$$

$$U_{L2} = I_{L2}R_{L2} = \dots = 4,46 \text{ V}$$

Determina las corrientes que fluyen por el circuito de la Figura:



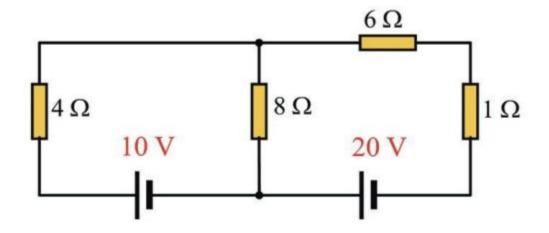


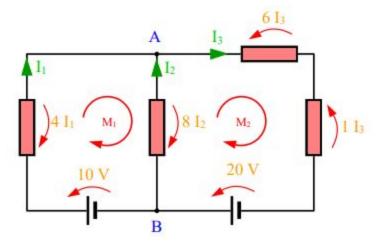
$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 12 - 5I_1 + 1I_2 - 5 = 0 \\ 5 - 1I_2 - 2I_3 - 10I_3 = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = 1,25 \text{ A}$$

 $I_2 = -0,75 \text{ A}$
 $I_3 = 0,5 \text{ A}$

Averigua la tensión que aparece en la carga de 8 ohmios del circuito de la Figura:





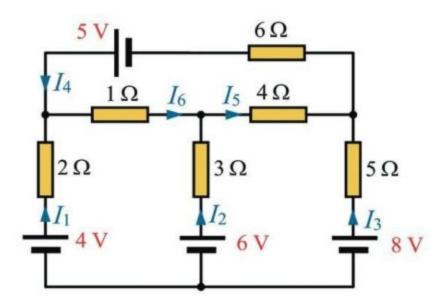
$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 10 - 4I_1 + 8I_2 = 0 \\ 20 - 8I_2 - 6I_3 - 1I_3 = 0 \end{cases}$$

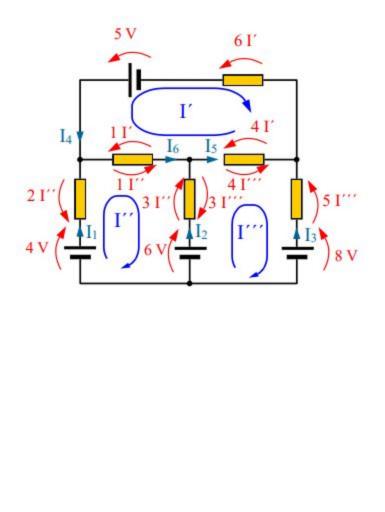
$$I_1 = 2,67 \text{ A}$$

 $I_2 = 0,0875 \text{ A}$
 $I_3 = 2,76 \text{ A}$

$$U = RI_2 = 8 \cdot 0.0875 = 0.7 \text{ V}$$

Calcula las intensidades en el circuito de la figura:





$$(1) -5 - 6I' + 4I' - 4I''' + 1I' - 1I'' = 0$$

$$(2) 4 - 2 I'' - 1 I' + 1 I'' - 3 I'' + 3 I''' - 6 = 0$$

(3)
$$6 + 3I'' - 3I''' - 4I' + 4I''' - 5I''' - 8 = 0$$

$$(1) - 1I' - 1I'' - 4I''' = 5$$

$$(2) - 1I' - 4I'' + 3I''' = 2$$

$$(3) - 4I' + 3I'' - 4I''' = 2$$

$$I'' = -1,059 \text{ A}$$

$$I_3 = -I''' = 0.882 \text{ A}$$

$$I_4 = -I' = 0,412 \text{ A}$$

 $I_1 = I'' = -1,059 \text{ A}$

 $I_2 = I''' - I'' = -0.882 + 1.059 = 0.177 \text{ A}$

$$I_5 = I''' - I' = -0.882 + 0.412 = -0.47 \text{ A}$$

$$I_5 = I'' - I' = -0.882 + 0.412 = -0.47 \text{ A}$$

 $I_6 = I'' - I' = -1.059 + 0.412 = -0.647 \text{ A}$