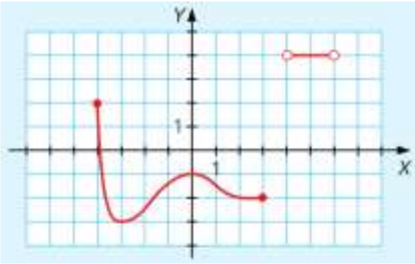
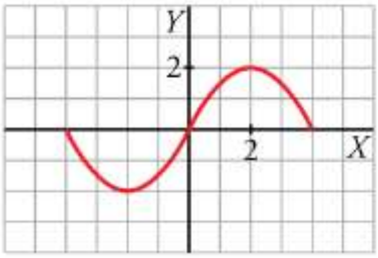
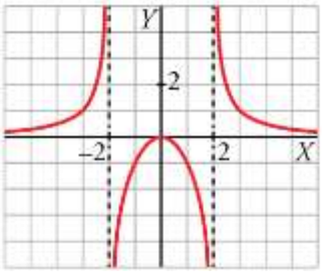
PENDIENTES 2º PARCIAL (BOLETÍN 1): FUNCIONES

CARACTERÍSTICAS FUNCIONES

1. Observando las gráficas de las siguientes funciones, halla el dominio de definición y recorrido







2. Determina el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \frac{2x^2-3}{5}$

c) $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2+1}$

d) $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-1}$

e) $f(x) = \frac{4x^2-6}{x^2+2x+1}$

f) $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^3+3x^2+3x+1}$

g) $f(x) = \frac{2x^2-8}{(x^2-9)(x^2-4)}$

h) $f(x) = \frac{2x^2-4}{(x^2-9)(x^2-4)}$

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 3}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

k) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x^2+1}{x^2-9}}$

l) $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x^2-5x+6}}$

m) $f(x) = Ln\frac{x+1}{x^2-4}$

n) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

o) $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2-5x+6)}$

p) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x-1)}$

3. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = e^x - e^{-x}$

c) $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$

d) $f(x) = Ln\, x$

e) $f(x) = e^{x^2}$

f) $f(x) = 5x^3 + x^2 + 11$

g) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

h) $f(x) = x^3 - 3x$

i) $f(x) = \frac{x^4-5}{3x^2}$

j) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$

4. Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

c) $f(x) = x^3 + x - 10$

d) $f(x) = (x - 2)(x + 3)x$

e) $f(x) = \frac{2x-6}{x+3}$

f) $f(x) = \sqrt{x - 15}$

g) $f(x) = Ln\ (x + 2$

h) $f(x) = Ln\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right)$

OPERACIONES CON FUNCIONES

1. Realizando previamente las operaciones con funciones, halla el valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican teniendo en cuenta que:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

a) $(f \cdot g)(4)$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

c) $(f^2)(2)$

d) $\left(\frac{g}{f}\right)(9)$

2. Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcula:

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

3. Considera las funciones f y g definidas por: $f(x) = \frac{x+1}{3}$ y $g(x) = x^2 - 1$. Calcula:

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(f \circ g)(x)$

4. Halla la función inversa de estas funciones y comprueba analíticamente:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{3}$

b) $f(x) = 4x^3 - 1$

c) $f(x) = \frac{x-5}{2x+1}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

e) $f(x) = x^2$

f) $f(x) = 3 - \sqrt{2x^2 - 1}$

g) $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right)$

h) $f(x) = e^{x-4}$

5. Considerar las funciones $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, $h(x) = x^2 - 1$, $p(x) = \frac{x-1}{x+3}$. Hallar:

a) $(h \circ f)(x)$

b) $(g \circ h)(x)$

c) $(p \circ h)(x)$

d) $(g \circ p)(x)$

e) $(f \circ p)(x)$

f) $f^{-1}(x)$

g) $(g^{-1} \circ h)(x)$

h) $p^{-1}(x)$

i) ¿Alguna de ellas es inversa de otra?

j) ¿La composición de funciones, en general, es conmutativa? Escribe un ejemplo que justifique tu respuesta.

6. Dada $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$, determina la expresión de $f^{-1}(x)$ y comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x)$

INTERPOLACIÓN y EXTRAPOLACIÓN: LINEAL Y CUADRÁTICA

5. Calcula, mediante interpolación o extrapolación lineal, los valores de y que faltan en cada tabla:

a)

x	0,45	0,5	0,6
y	2	…	0,25

b)

x	47	112	120
y	18	37	…

6. Si consumimos 60 m^3 de gas tendremos que pagar un recibo de 35,96 €, y por un consumo de 80 m^3 tendríamos que pagar 43,56 €. ¿Cuál sería el precio del recibo si consumiéramos 70 m^3?

7. Sabiendo que si 15º C (grados centígrados) equivalen a 59 ºF (grados Fahrenheit); y que 30º C son 86ºF. Averigua cuántos grados centígrados son 68º F

8. Si colgamos de un resorte un peso de 40g, el resorte se estira hasta 12mm; mientras que si colgamos un peso de 60g, se estira hasta 20mm

a) ¿Cuál sería su longitud si colgásemos un peso de 55 g?
b) ¿Cuál sería su longitud si colgásemos un peso de 100 g?
c) ¿Cuál sería su longitud si colgásemos un peso de 5 kg?

Parábola que pasa por tres puntos

Se os puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ non están aliñados, entón existe unha parábola (e só unha) que pasa por A, B e C. Para determinala, poñemos a súa ecuación en forma xeral, $y = ax^2 + bx + c$, e "obrigamos" a que pase por cada un dos tres puntos. Obtemos, así, un sistema de tres ecuacións con tres incógnitas, a, b e c. Ao resolvelo, obtéñense os parámetros da ecuación.

Exercicio resolto

1 *Achar a ecuación da parábola que pasa polos puntos (2, – 1), (6, –5) e (10, 7).*

Expresamos a ecuación da parábola en forma xeral, $y = ax^2 + bx + c$, e obrigamos a que pase por cada un dos puntos dados:

$$\left.\begin{array}{lll} (2,-1) \to -1 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c & \to & 4a + 2b + c = -1 \\ (6,-5) \to -5 = a\cdot 6^2 + b\cdot 6 + c & \to & 36a + 6b + c = -5 \\ (10,7) \to 7 = a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c & \to & 100a + 10b + c = 7 \end{array}\right\}$$

Resolvemos este sistema e obtemos os coeficientes: $a = \frac{1}{2}$, $b = -5$, $c = 7$.

A parábola buscada é $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 7$.

Faino ti. Acha a ecuación da parábola que pasa por (0, 3), (2, –3) e (6, 9).

Método de Newton para obter a ecuación dunha parábola

Aplicando este método, a obtención da parábola que pasa por tres puntos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, conséguese de forma máis cómoda. Utiliza a seguinte expresión como ecuación da parábola:

$$y = p + m(x - x_1) + n(x - x_1)(x - x_2)$$

Ao impoñer que pase por A, B e C, o sistema de ecuacións obtido é graduado e, polo tanto, máis doado de resolver.

Exercicio resolto

1 *Achar, polo método de Newton, a ecuación da parábola que pasa polos puntos (2, −1), (6, −5) e (10, 7).*

Ecuación da parábola: $y = p + m(x - 2) + n(x - 2)(x - 6)$

Impoñemos que pase polos tres puntos dados:

$(2, -1) \rightarrow -1 = p + m \cdot (2 - 2) + n \cdot (2 - 2) \cdot (2 - 6) \rightarrow p = -1$

$(6, -5) \rightarrow -5 = p + m \cdot (6 - 2) + n \cdot (6 - 2) \cdot (6 - 6) \rightarrow p + 4m = -5 \rightarrow m = -1$

$(10, 7) \rightarrow 7 = p + m \cdot (10 - 2) + n \cdot (10 - 2) \cdot (10 - 6) \rightarrow p + 8m + 32n = 7 \rightarrow n = \frac{1}{2}$

Obtemos, así, a ecuación: $y = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 6) - (x - 2) - 1$

Operando e reagrupando obtense, como é natural, a mesma ecuación do exercicio resolto anterior:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 7$$

Faino ti. Acha, polo método de Newton, a ecuación da parábola que pasa por (0, 3), (2, −3) e (6, 9). Comproba que é a mesma que se obtén no *Faino ti* anterior.

9. De una función se sabe que $f(1) = 0$; $f(2) = 3$ y $f(-1) = 6$. Halla la función de segundo grado y utilízala para estimar el valor de $f(0)$.

10. Halla la ecuación de la parábola que pasa por los siguientes puntos $(1, -1)$; $(3,3)$ y $(5, -1)$. Obtén el vértice, los puntos de corte con los ejes y calcula la ordenada en el punto de abscisa $x = -3$

11. Los beneficios en millones de euros que obtiene una empresa al final de año vienen determinados por el precio por unidad que produce. Si las vende a 1€, obtiene 1 millón de euros; si las vende a 2€, obtiene 6 millones de euros, y si las vende a 5€, obtiene 9 millones de euros

a) Obtén la fórmula de la parábola que pasa por los tres puntos.
b) Calcula el beneficio si se vende cada unidad a 3€.
c) Representa la parábola y calcula el precio por unidad para que el beneficio sea máximo, y halla dicho beneficio.

PENDIENTES 2º PARCIAL (BOLETÍN 2): CÁLCULO DE LÍMITES

1. Sobre la gráfica de $f(x)$, calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

c) $\lim_{x\to -2} f(x) = \nexists$

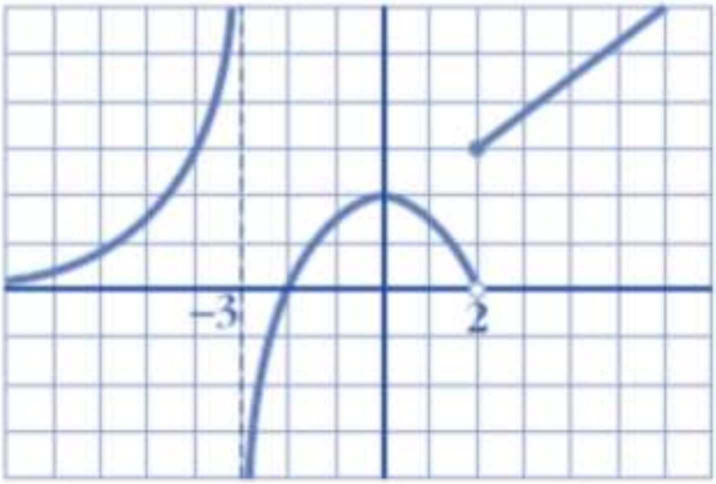
d) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

g) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

h) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$



2. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to +\infty} (x^2 - 9x + 1) = +\infty$

b) $\lim_{x\to +\infty} (-x^2 + 2x + 5) = -\infty$

c) $\lim_{x\to +\infty} (23 - x^2) = -\infty$

d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x}\right) = -1$

e) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 3\right) = 3$

f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$

g) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

h) $\lim_{x\to +\infty} 7^x = +\infty$

i) $\lim_{x\to -\infty} 7^x = 0$

j) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x+1}{2x}\right)^x = +\infty$

k) $\lim_{x\to -\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$

l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$

3. Calcula los siguientes límites $\left[\text{Indeterminación } \frac{\infty}{\infty}\right]$

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^3-3x+2}{2x^2-x+8} = +\infty$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2-5x+3}{2x^2-9} = \frac{7}{2}$

c) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2}\right) = \frac{2}{3}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+3+\frac{x-2}{x+1}}{x+\frac{x^2}{x-2}}\right) = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4x-5}{2x} - \frac{2}{x+1}\right) = 2$

f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-5}}{1-2x} = \frac{1}{2}$

4. Calcula los siguientes límites $[\text{Indeterminación } \infty - \infty]$

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-5x}{x+1} - \frac{3x}{2}\right) = -\infty$

b) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x^2-5x}{x+3} - 2x\right) = -11$

c) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-2x} - \frac{2x^2+1}{2x-4}\right) = 0$

d) $\lim_{x\to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = +\infty$

e) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-5} - \sqrt{2x^2-1}\right) = -\infty$

f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}\right) = 0$

g) $\lim_{x\to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

h) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{e^x}\right) = 0$

5. Calcula los siguientes límites $[\text{Indeterminación } 1^\infty]$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+1}{2+3x^2}\right)^{3x^2-5} = \frac{1}{e}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = e^{\frac{2}{3}}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2} = e^0 = 1$

6. Calcula los siguientes límites en los puntos indicados

a) $\lim_{x\to1}(x^2+5) = 6$

b) $\lim_{x\to0}\frac{15x^4+3x+1}{4x-3} = -\frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to0}(x+1)^{x+2} = 1$

d) $\lim_{x\to0} e^{x+1} = e$

e) $\lim_{x\to0}\frac{x+3}{x} = \pm\infty$

f) $\lim_{x\to3}\frac{x^2+1}{x-3} = \pm\infty$

g) $\lim_{x\to e}(1+lnx) = 2$

h) $\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

7. Calcula los siguientes límites $\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]$

a) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0$

b) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$

c) $\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2-9} = -\frac{1}{6}$

d) $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^2+3x} = -9$

e) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2} = 1$

f) $\lim_{x\to-1}\frac{x^4-1}{x^3+2x^2-x-2} = 2$

g) $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^2-1} = 2$

h) $\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2+2x} = \frac{1}{2}$

i) $\lim_{x\to a}\frac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2} = a$

j) $\lim_{x\to2}\left(\frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2}\right) = -\frac{1}{4}$

8. Calcula los siguientes límites $[\text{Indeterminación } 1^\infty]$

a) $\lim_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{-\frac{1}{4}}$

b) $\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{e^3}$

c) $\lim_{x\to-1}\left(\frac{3x+2}{x^2-2}\right)^{\frac{5}{x+1}} = e^{-25}$

9. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \begin{cases}\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty\end{cases}$

b) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right) = \begin{cases}\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to0^-} f(x) = \nexists\end{cases}$

c) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1} = \begin{cases}\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty\end{cases}$

d) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9} = \begin{cases}\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty\end{cases}$

10. Dadas las siguientes funciones a trozos, calcula los límites indicados

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 \ , & si\ x<3 \\ \frac{3}{x+5} \ , & si\ x\geq 3\end{cases}$; $\lim_{x\to-1} f(x)$; $\lim_{x\to3} f(x)$; $\lim_{x\to-5} f(x)$; $\lim_{x\to6} f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x<1 \\ 4-x & si\ 1\leq x<3 \\ x-2 & si\ x\geq 3\end{cases}$; $\lim_{x\to1} f(x)$; $\lim_{x\to3} f(x)$; $\lim_{x\to5} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

PENDIENTES 2º PARCIAL (BOLETÍN 4): ASÍNTOTAS

1. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

a) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{3x^2-7}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

f) $f(x) = x^2 + 5x - 1$

g) $f(x) = \ln x$

h) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x < 1 \\ 2x+3 & 1 \leq x \leq 4 \\ 7x+2 & x > 4 \end{cases}$

2. En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función.

$$M(t) = \frac{30t}{t+4} \quad (t \; en \; días)$$

a) ¿Cuántos montajes realizará al terminar el período de entrenamiento que dura 20 días?

b) Halla la asíntota horizontal y explica su significado.

3. Una entidad financiera paga un tanto por ciento en función del dinero depositado, definido por:

$$R(x) = \frac{6x + 8000}{x + 10000}$$

Donde x es la cantidad de dinero depositado en euros, y $R(x)$ el valor del tanto por ciento. ¿Hacia qué valor se estabilizará el tanto por ciento cuando se deposite una cantidad muy grande?

4. Los beneficios o las pérdidas de una empresa vienen dados por la función

$$f(x) = \frac{5x^2 - 20}{x^2 + 4}$$

Donde x es el número de años que lleva funcionando, y $f(x)$ son millones de euros.

a) Halla los beneficios o las pérdidas en el primer, segundo y tercer año.

b) ¿Hacia qué valor se estabilizan las ganancias o pérdidas con el paso del tiempo?

5. Los gastos mensuales en euros que una familia tiene en alimentación vienen dados por la función

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}4x + k & 0 \leq x \leq 1000 \\ \dfrac{2000x}{x + 3000} & x > 1000 \end{cases}$$

Donde x son los ingresos de la familia en euros.

a) Halla el valor de k para que los gastos sean continuos; es decir, no haya salto en $x = 1000$ €

b) ¿Hacia qué valor se estabilizan los gastos de alimentación de las familias con la renta más alta?

6. En una ciudad se hace un censo inicial y se sabe que el número de habitantes evoluciona según la función

$$P(t) = \frac{t^2 + 500t + 2500}{(t + 50)^2}$$

Donde t es el número de años transcurridos desde que se hace el censo, y $P(t)$ es el número de habitantes en millones.

a) ¿Cuántos habitantes hay cuando se realiza el censo inicial?

b) ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 50 años?

c) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué población se estabilizará? Halla la asíntota horizontal para comprobarlo.

7. La función $P(t) = \begin{cases} 2 + t^2\,, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2}\,, & t > 1 \end{cases}$ muestra cómo varía la profundidad de la capa de arena de una playa desde la construcción de un dique (p en metros, t en años). Si la profundidad llega a superar los $4\ m$, se tendrá que elevar el paseo marítimo.

a) Estudia si la profundidad es una función continua del tiempo.

b) A largo plazo, ¿será necesario elevar la altura del paseo?

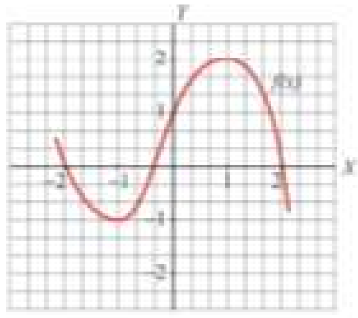
PENDIENTES 2º PARCIAL (BOLETÍN 5): DERIVADAS

TASA DE VARIACIÓN MEDIA

1. Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo [1,2] e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo: $f(x) = 2x^2 - 3x$ Sol: $TVM\ [1,2] = 3\ (positiva) \Longrightarrow f(x)$ crece en $[1,2]$

2. Dada la función $f(x) = (x-1)^2$. Calcula la tasa de variación media en el intervalo $[0,1]$. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo? Sol: $TVM\ [0,1] = \ (positiva) \Longrightarrow f(x)$ crece en $[0,1]$

3. Calcula la tasa de variación media de esta función, $f(x)$, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:



a) $[-1, 0]$ Sol: $TVM\ [-1,0] = 2\ (positiva) \Longrightarrow f(x)$ crece en $[-1,0]$

b) $[1, 2]$ Sol: $TVM\ \ [1,2] = -2\ (negativa) \Longrightarrow f(x)$ decrece en $[1,2]$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO APLICANDO LA DEFINICIÓN

4. Utilizando la definición, calcula la derivada en $x = 2$ y en $x = -1$ de estas funciones:

c) $f(x) = x + 1$ Sol: $f'(-1) = f(2) = 1$

d) $f(x) = 2x^2 + x$ Sol: $f'(-1) = -3\ ;\ f(2) = 9$

e) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ Sol: $f'(-1) = -\frac{1}{16}\ ;\ f(2) = -1$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$ Sol: $f'(-1) = -1\ ;\ f(2) = -\frac{1}{4}$

g) $f(x) = (x-1)^2$ Sol: $f'(-1) = \ -4\ ;\ f(2) = 2$

h) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ Sol: $f'(-1) = 2\ ;\ f(2) = -\frac{1}{4}$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN APLICANDO LA DEFINICIÓN

5. Halla $f'(x)$, aplicando la definición de derivada

a) $f(x) = x^2 + 1$ Sol: $f'(x) = 2x$

b) $f(x) = \frac{x+1}{3}$ Sol: $f'(x) = \frac{1}{3}$

c) $f(x) = 2x^2$ Sol: $f'(x) = 4x$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ Sol: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

CÁLCULO DE DERIVADAS

6. Halla la función derivada de:

a) $f(x) = 2x^7$ Sol: $f'(x) = 14x^6$

b) $f(x) = x^{-3}$ Sol: $f'(x) = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$

c) $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$ Sol: $f'(x) = 12x^3 - 2$

d) $f(x) = 3x^4 - \frac{9x^2}{3}$ Sol: $f'(x) = 12x^3 - 6x$

e) $f(x) = (3x^2 + x)^4$ Sol: $f'(x) = 4(3x^2 + x)^3 \cdot (6x + 1)$

f) $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$ Sol: $f'(x) = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$

g) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2}$ Sol: $f'(x) = \frac{-3x^2+2x-6}{(x^2-2)^2}$

h) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$ Sol: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

i) $f(x) = \sqrt{4x^3 + 1}$ Sol: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^3+1}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3+1}} = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}}$

j) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3}$ Sol: $f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-3}}$

k) $f(x) = \sqrt[5]{3x^2}$ Sol: $f'(x) = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}}$

l) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3}$ Sol: $f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-3}}$

m) $f(x) = e^x$ Sol: $f'(x) = e^x$

n) $f(x) = ln\, x$ Sol: $f'(x) = \frac{1}{x}$

o) $f(x) = xe^x$ Sol: $f'(x) = (1 + x)e^x$

p) $f(x) = (x^2 - 3x)e^x$ Sol: $f'(x) = e^x(x^2 - x - 3)$

q) $f(x) = x \cdot ln\, x$ Sol: $f'(x) = lnx + 1$

r) $f(x) = \frac{3x+1}{e^x}$ Sol: $f'(x) = \frac{2-3x}{e^x}$

s) $f(x) = e^{4x^3-2x}$ Sol: $f'(x) = e^{4x^3-2x} \cdot (12x^2 - 2)$

t) $f(x) = 2^{x^2-1}$ Sol: $f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2-1} \cdot ln2$

u) $f(x) = ln(3x^4 - 2x)$ Sol: $f'(x) = \frac{12x^3-2}{3x^4-2x}$

v) $f(x) = \log_5(3x)$ Sol: $f'(x) = \frac{3}{3x \cdot ln}$

w) $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$ Sol: $f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)$

x) $f(x) = sen\, x$ Sol: $f'(x) = \cos x$

y) $f(x) = cos\, x$ Sol: $f'(x) = -sen\, x$

z) $f(x) = tg\, x$ Sol: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

aa) $f(x) = x^2\, sen\, x$ Sol: $f'(x) = 2xsenx + x^2 \cos x$

bb) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot sen\, x$ Sol: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} sen\, x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$

cc) $f(x) = cos(x^3)$ Sol: $f'(x) = 3x^2 \cdot \cos(x^3)$

dd) $f(x) = sen\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$ Sol: $f'(x) = \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$

ee) $f(x) = \frac{-3x^5+2x}{7}$ Sol: $f'(x) = \frac{1}{7}(-15x^2 + 2)$

PENDIENTES 2º PARCIAL (BOLETÍN 6): APLICACIONES DERIVADAS

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: $\boldsymbol{y = 4x - 2}$

2. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x$ que tenga pendiente -7.

Solución: $\boldsymbol{y = -7x - 2}$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ que sea paralela a la recta $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Solución: $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + 1}$

MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS

4. Estudia la monotonía y encuentra los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = (x-1)^5$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

e) $f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$

f) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

g) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x < 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 & x \geq 0 \end{cases}$

5. Determina a y b en la función $f(x) = x^2 + ax + b$ sabiendo que tiene un máximo en el punto $(1,8)$ Sol: $a = -2$ y $b = 9$

6. Hallar el valor de a para que la función $f(x) = x^2 + ax + a$ tenga un mínimo en $x = 2$ Sol: $a = -4$

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

7. Estudia la curvatura y encuentra los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = (2x-4)^5$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

e) $f(x) = e^{-x^2}$

f) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

g) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

ESTUDIO COMPLETO DE FUNCIONES

8. Representa gráficamente las siguientes funciones, realizando previamente su estudio completo:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $f(x) = \frac{5}{x-3}$

d) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-16}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

g) $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$

h) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

i) $f(x) = 2e^{-x}$

j) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)$

PROBLEMAS APLICADOS

9. Suponiendo que el rendimiento (R) en % de un estudiante en una hora de examen viene dada por la función $R(t) = 300t(1-t)$ siendo $0 \leq t \leq 1$ (tiempo en horas), se pide:

a) Representar gráficamente la función $R(t)$ Sol: Es una parábola cóncava

b) Indicar cuándo aumenta y disminuye el rendimiento. Sol: Crece en 0-30min; Decrece en 30min-1h

c) ¿Cuándo se hace cero el rendimiento? Sol: Al cabo de una hora

d) ¿Cuándo es máximo el rendimiento y cuál es su valor? Sol: A la media hora y tiene 75%

10. El coeficiente de elasticidad de un producto, en función de la temperatura (t) en grados centígrados, viene definido por la función: $E\,(t) = \frac{t^2}{9} - 2t + 10$

a) ¿A qué temperatura o temperaturas se obtiene una elasticidad de 2? Sol: 6º C y 12º C

b) Calcula el valor de la temperatura para que la elasticidad sea mínima Sol: 9º C

c) ¿Cuánto es esa elasticidad mínima? Sol: La elasticidad mínima es 1

11. La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley: $C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000$, siendo x el número del día del mes

a) ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2? Sol: 30 314€

b) Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima Sol: Día 3 y día 27

c) Calcula el valor de esas cotizaciones máxima y mínima Sol: Día 3: 30 351€; Día 27: 23 439€

12. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que estos se ajustan a la función $B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $0 \leq t \leq 10$ (t años) (ABAU 2021)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año de estudio?

b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios

c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?