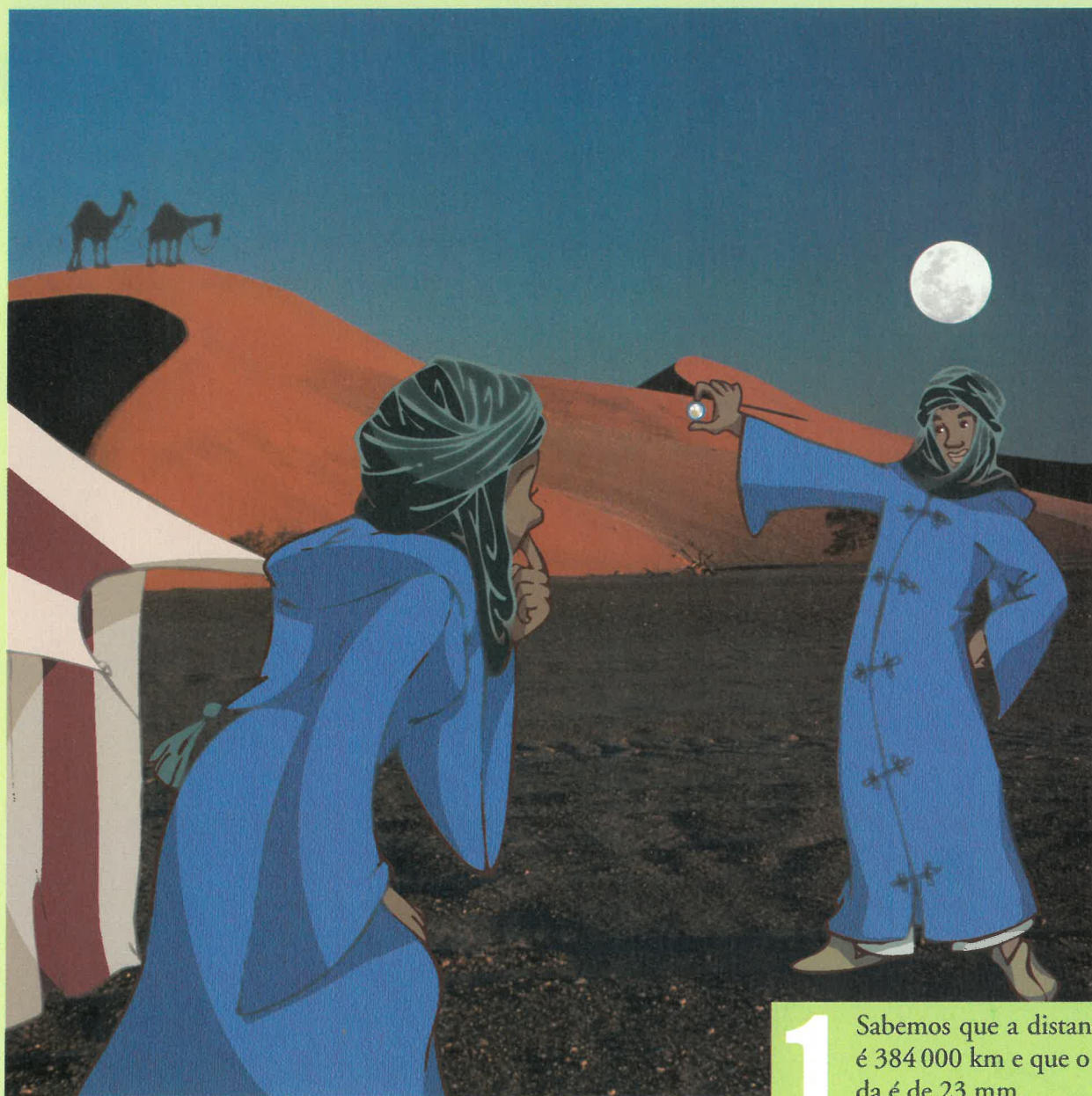
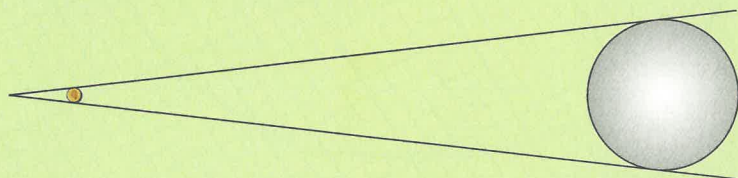


11 A semellanza e as súas aplicacións



Coa axuda de Hamadi, Fatima intenta facer coincidir o disco da moeda coa Lúa. Conségueo cando coloca o seu ollo a 253 cm da moeda.



1 Sabemos que a distancia da Terra á Lúa é 384 000 km e que o diámetro da moeda é de 23 mm.

Calcula o diámetro da Lúa.

2 Se Fatima non contara con axuda, tería que soste un disco coa súa man. O seu brazo estendido alcanza 66 cm.

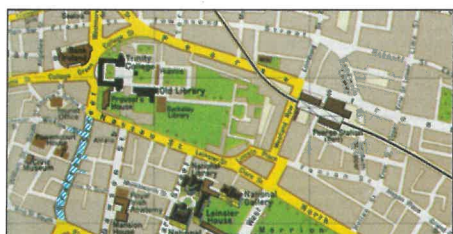
Cal é o diámetro do disco que tería que utilizar para “tapar” a Lúa?

 1. Solucións a estes problemas.

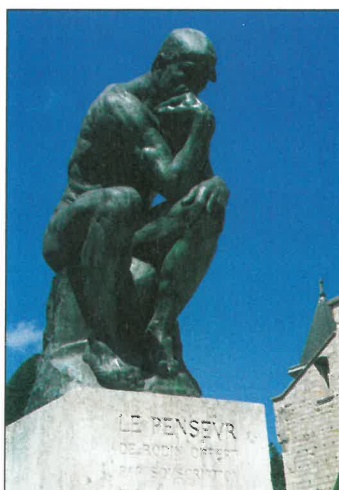
1 Figuras semellantes



Seguramente, nunca viches este cadro. Non obstante, coñécelo perfectamente por medio das súas reproducións.



Cun plano podemos orientarnos nunha cidade. A escala permítenos, ademais, coñecer as distancias.



Dúas figuras semellantes teñen a *mesma forma*. Como se manifesta matematicamente esta aparencia?

- Os ángulos correspondentes en figuras semellantes son iguais.
- As lonxitudes dos segmentos correspondentes en figuras semellantes son proporcionais. A razón de proporcionalidade chámase **razón de semellanza**.

Figuras semellantes na vida corrente

Estamos rodeados de reproducións:

- Fotografías, vídeos, películas en pantallas de distintos tamaños...
- Maquetas de monumentos ou de urbanizacións, copias de cadros famosos, reproducións de coches...
- Planos de edificios ou de cidades, mapas...

As primeiras pretenden, exclusivamente, transmitir unas características que se conservan coa semellanza: a imaxe, a forma, a cor, a beleza do orixinal.

Cos planos e cos mapas pretendemos máis: queremos que, ademais da forma, poidan obter con precisión medidas, distancias. Por iso, van acompañados dunha **escala** coa que conseguimos, como fixemos na páxina anterior, obter magnitudes da realidade medindo sobre a súa reprodución (plano ou mapa).

Escala é o cociente entre cada lonxitude da reprodución (mapa, plano, maqueta) e a correspondente lonxitude na realidade. É, por tanto, a **razón de semellanza** entre a reprodución e a realidade.

Unha escala 1:200 significa, como xa sabes, que 1 cm do plano corresponde a 200 cm = 2 m da realidade.

A expresión 1:200 pode poñerse así: $\frac{1}{200}$, co que se mostra a razón de semellanza entre as dúas figuras.

Relación entre as áreas e entre os volumes

Se a razón de semellanza entre dúas figuras é k , a razón entre as súas áreas é k^2 e a razón entre os seus volumes é k^3 .

A razón entre as áreas de dúas figuras semellantes é igual ao cadrado da razón de semellanza.

A razón entre os volumes de dúas figuras semellantes é igual ao cubo da razón de semellanza.

Se unha maqueta está a escala 1:200, a relación entre a superficie dunha parcela e a da súa representación é $200^2 = 40\,000$. E a relación entre o volume dun edificio e o da súa maqueta é $200^3 = 8\,000\,000$.

Planos, mapas e maquetas

Imos aplicar o dito na páxina anterior a estas representacións (planos e mapas) que levan incluída unha escala coa que podemos deducir medidas na realidade que representan.

Actividades

- 1 Este é o plano dunha parte dunha cidade, a escala 1:10 000.



- a) Xustifica que 1 cm no plano corresponde a 100 m na realidade.
- b) Amalia vive en A e Bieito vive en B. Escolle un itinerario para ir dunha casa á outra e calcula a distancia que teñen que percorrer.
Canto se tarda, aproximadamente, se se percorre paseando a 3 km/h?
- c) Calcula a superficie real do parque.

- 2 Este mapa está a escala 1:20 000 000.

- a) Xustifica que 1 cm no mapa corresponde a 200 km na realidade.
- b) Acha a distancia de Lanzarote a San Sebastián.
- c) Sitúa a túa localidade no mapa e acha a súa distancia a Alxer e a Marrakech.



Exercicio resolto

O debuxo adxunto representa a maqueta dunha urbanización a escala 1:500.

Sobre a maqueta tomáronse as seguintes medidas:

POLIDEPORTIVO $\begin{cases} \text{longo} = 30 \text{ cm} \\ \text{ancho} = 18 \text{ cm} \end{cases}$

DEPÓSITO CILÍNDRICO $\begin{cases} \text{diámetro} = 6 \text{ cm} \\ \text{altura} = 10 \text{ cm} \end{cases}$

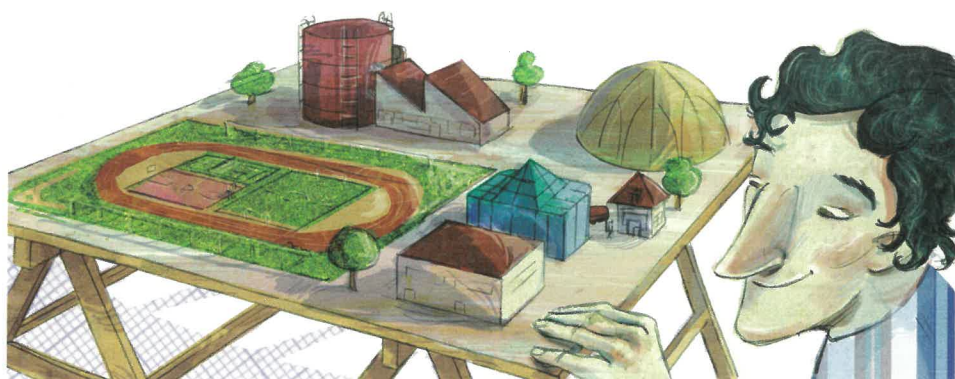
CARPA: diámetro = 16 cm

Para construír a carpa da maqueta necesitáronse 400 cm^2 de tea.

No depósito da maqueta caben 283 cm^3 de area.

Achar:

- A superficie total do polideportivo.
- O volume do depósito.
- A superficie e o volume da carpa, na realidade.



Dimensións na realidade:

POLIDEPORTIVO $\begin{cases} \text{Longo} = 30 \text{ cm} \times 500 = 15\,000 \text{ cm} = 150 \text{ m} \\ \text{Ancho} = 18 \text{ cm} \times 500 = 9\,000 \text{ cm} = 90 \text{ m} \end{cases}$

DEPÓSITO $\begin{cases} \text{Raio} = 3 \text{ cm} \times 500 = 1\,500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ \text{Altura} = 10 \text{ cm} \times 500 = 5\,000 \text{ cm} = 50 \text{ m} \end{cases}$

CARPA: Raio = $8 \text{ cm} \times 500 = 4\,000 \text{ cm} = 40 \text{ m}$

- Superficie do polideportivo = $150 \text{ m} \times 90 \text{ m} = 13\,500 \text{ m}^2$
- Volume do depósito = $\pi r^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 50 = 35\,342,9 \text{ m}^3$

Tamén se pode calcular a partir do volume do depósito na maqueta:

$$V_{\text{depósito real}} = V_{\text{depósito maqueta}} \cdot 500^3 = 283 \text{ cm}^3 \cdot 500^3 = 35\,375\,000\,000 \text{ cm}^3 = 35\,375 \text{ m}^3$$

- Superficie da carpa = $\frac{1}{2} 4\pi r^2 = 2\pi \cdot 40^2 = 10\,053,1 \text{ m}^2$

Tamén se pode calcular a partir da superficie na maqueta:

$$S_{\text{carpa real}} = S_{\text{carpa maqueta}} \cdot 500^2 = 400 \text{ cm}^2 \cdot 500^2 = 100\,000\,000 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$\text{Volume da carpa} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi 40^3 = 134\,041,3 \text{ m}^3$$

2. Se desexas facer máis actividades para **reforzar** o cálculo de lonxitudes, áreas e volumes en figuras semellantes, acude ao teu CD.

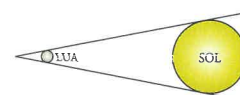
Actividades

- Un edificio da maqueta anterior ten forma de ortoedro. As súas dimensións son $9 \text{ cm} \times 6,4 \text{ cm}$ de planta e 4 cm de altura. Acha as dimensións, a área da fachada e o volume na realidade.
 - A superficie do campo de fútbol sala na maqueta é de 32 cm^2 . Cal é a superficie na realidade?
 - Unha caseta da maqueta está feita con $0,3 \text{ cm}^3$ de poliexpán. Cal é o seu verdadeiro volume?
 - A altura dun edificio na realidade é 65 m . Cal é a súa altura na maqueta?

- Na páxina inicial dicíamos que a Lúa está a $384\,000 \text{ km}$ de nós e calculabamos que o seu diámetro é $3\,500 \text{ km}$.

- Calcula a súa superficie e o seu volume.

- O Sol está a $150\,000\,000 \text{ km}$ de nós. E o seu tamaño aparente é igual que o da Lúa. Segundo isto, acha o diámetro do Sol. Acha tamén a súa superficie e o seu volume a partir das correspondentes magnitudes da Lúa.



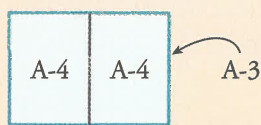
2 Rectángulos de proporcións interesantes

Ten en conta

Todos os rectángulos semellantes entre si teñen a mesma proporción.

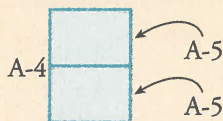
A cadea A-0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

A folla de papel dobre da A-4 chámase A-3.



Á súa vez, o dobre da A-3 é a A-2 e o dobre da A-2 é a A-1.

A metade de A-4 é A-5.

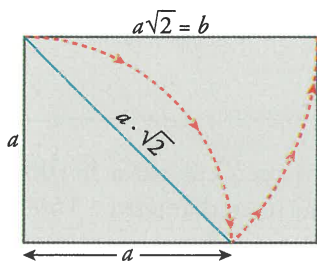


A metade da A-5 é a A-6.

...

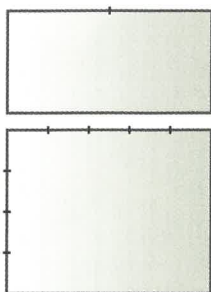
Todas elas son semellantes.

A maior delas, A-0, ten unha área de 1 m^2 .



Exercicio

Usando este método, comproba que media folla A-4 é semellante a unha folla A-4.



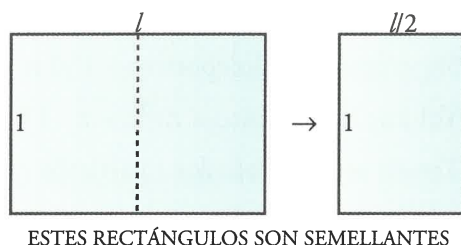
O lado maior deste rectángulo é o dobre que o menor. É dicir, os lados deste rectángulo están na proporción 2:1. Se tomamos como unidade o lado menor, o maior mide 2.

A proporción entre o lado maior e o menor deste rectángulo é 5:4. Se tomamos como unidade o lado menor, o lado maior mide $5/4$.

Imos estudar dous rectángulos de proporcións moi interesantes.

Unha folla de papel A-4

As follas de papel que se utilizan habitualmente (A-4) teñen unha curiosa propiedade: se as partimos pola metade, cada un dos dous anacos é semellante á folla inicial. Baseándonos nesta propiedade, imos achar a proporción entre os seus lados:



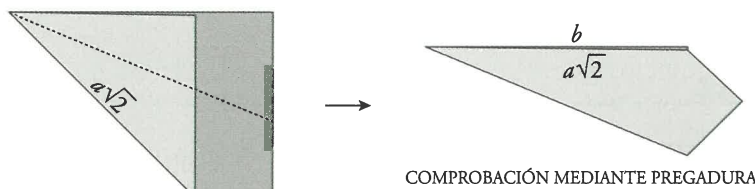
Tomamos como unidade o lado menor. A semellanza dos dous rectángulos lévanos á seguinte proporción:

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l/2}$$

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l/2} \rightarrow \frac{l^2}{2} = 1 \rightarrow l^2 = 2 \rightarrow l = \sqrt{2}$$

Chegamos á conclusión de que para que un rectángulo sexa semellante á súa metade é necesario que a proporción entre os seus lados sexa $\sqrt{2}$.

Observa na marxe como se comproba se un rectángulo de dimensións a e b cumpre esta propiedade, usando soamente un compás. Tamén se pode comprobar mediante dous pregamentos.

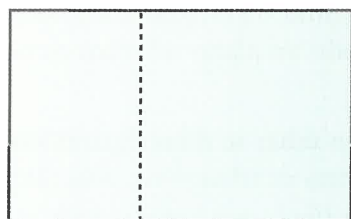


COMPROBACIÓN SINXELA DE SE DOUS RECTÁNGULOS SON SEMELLANTES

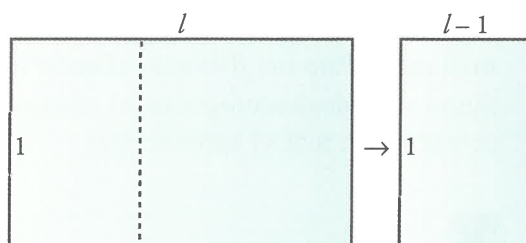


Encáixase o rectángulo pequeno nunha esquina do grande. A esquina oposta do pequeno debe estar situada sobre a diagonal do grande.

Rectángulo áureo



O rectángulo da marxe ten a seguinte peculiaridade: se se lle suprime un cadrado, o rectángulo que queda é semellante ao inicial. Vexamos cal é a relación entre as súas dimensións:



Tomamos como unidade o lado menor. A semellanza dos dous rectángulos lévanos á seguinte proporción:

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$$

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1} \rightarrow l(l-1) = 1 \rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \rightarrow l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

A relación entre os dous lados é o número $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Lembras? É o **número áureo**,

Φ , que viamos na unidade 3. Por iso este rectángulo e todos os semellantes a el se chaman **rectángulos áureos**.

O carné de identidade e as tarxetas de crédito, por exemplo, son rectángulos áureos. En arquitectura tamén se utilizan con moita frecuencia rectángulos áureos.



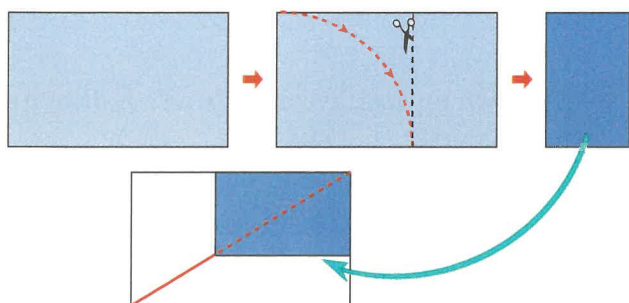
Lembra

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618...$$

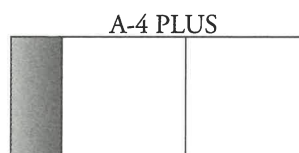
Actividades

- 1** Se a unha folia A-4 se lle corta unha tira de 2,5 cm de ancho ao longo do lado maior, obterás un rectángulo áureo. Constrúe dous.

A un deles, córtalle un cadrado. Proba que o rectángulo remanente é semellante ao rectángulo inicial.



- 2** Se a unha folia A-4 lle engadimos un cadrado, o rectángulo resultante, ao que chamaremos A-4 PLUS, ten a seguinte curiosa propiedade: se lle quitamos dous cadrados, o rectángulo remanente é semellante ao inicial.



O rectángulo sombreado é semellante ao rectángulo total.

- a) Compróbaos practicamente.
b) Demóstrao tendo en conta que as dimensións do A-4 PLUS son $\sqrt{2} + 1$, 1 e as do rectángulo sobranter son 1, $\sqrt{2} - 1$.

3ª Semellanza de triángulos

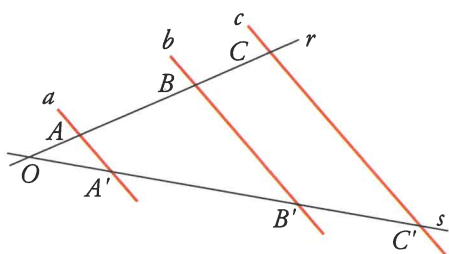
Nas páxinas anteriores tratamos con pares de figuras que **sabiamos de antemá que eran semellantes**, e, baseándonos nesa semellanza, ao estudar unha delas obtiñamos consecuencias para a outra. Así, estudando un plano sabemos como é planta do edificio ou da cidade.

O que agora nos propoñemos é máis difícil: **como saber se dúas figuras son semellantes**. Para iso, debemos afondar na semellanza de triángulos, pois calquer figura se pode descompoñer en triángulos. (Se a figura ten lados curvos, a descomposición será só aproximada).

Teorema de Tales

Se as rectas a , b e c son paralelas e cortan outras dúas rectas r e s , entón os segmentos que determinan nelas son proporcionais.

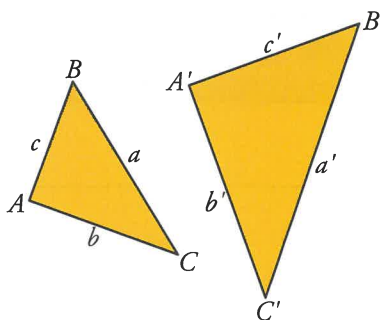
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \text{Como consecuencia, verificase: } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$



Tamén ocorre o recíproco: se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ son proporcionais a $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ e as rectas a e b son paralelas, entón a recta c é paralela a elas.

O teorema de Tales serve para estudar a semellanza de triángulos.

Triángulos semellantes



Dous **triángulos semellantes** teñen:

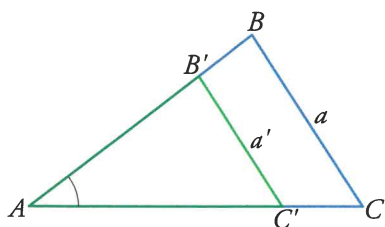
- Os seus lados proporcionais:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \text{razón de semellanza}$$

- Os seus ángulos, respectivamente iguais:

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$$

Triángulos en posición de Tales



Os triángulos ABC e $A'B'C'$ teñen un ángulo común, o $\hat{A}$. É dicir, o triángulo pequeno está encaixado no grande.

Ademais, os lados opostos a $\hat{A}$ son paralelos.

Dicimos que eses dous triángulos están en **posición de Tales**.

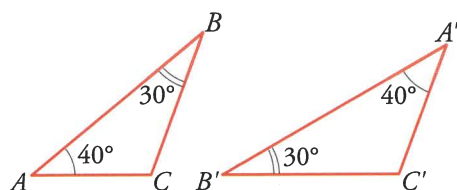
Dous triángulos en posición de Tales son semellantes.

Criterio de semellanza de triángulos

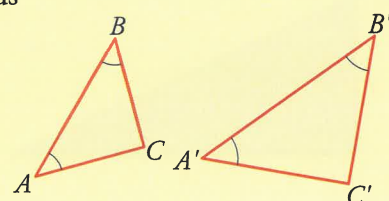
Para saber se dous triángulos son semellantes, non é necesario comprobar neles todas as condicións dadas na páxina anterior. Será suficiente ver que se cumpren algunhas de elas.

Dous triángulos son semellantes se teñen dous pares de ángulos respectivamente iguais.

$\widehat{ABC}$ é semellante a $\widehat{A'B'C'}$ se:
 $\hat{A} = \hat{A'}$ e $\hat{B} = \hat{B'}$.



SON SEMELLANTES



Aplicación: cálculo da distancia a un punto inaccesible

Desde a casa de Eva, A , vese o depósito de auga, B , dunha vila. Eva quere saber a que distancia se atopa. Para iso, fai o seguinte:

- Busca un lugar, C , relativamente próximo á súa casa, desde o cal se vexa o depósito de auga.

- Mide os ángulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ e a distancia $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = 45 \text{ m} \quad \hat{A} = 62^\circ \quad \hat{C} = 105^\circ$$

- Constrúe no seu caderno un triángulo $A'B'C'$ semellante ao ABC tomando:

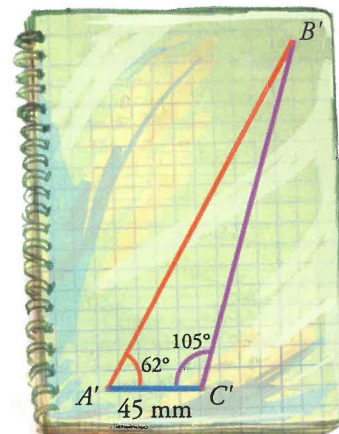
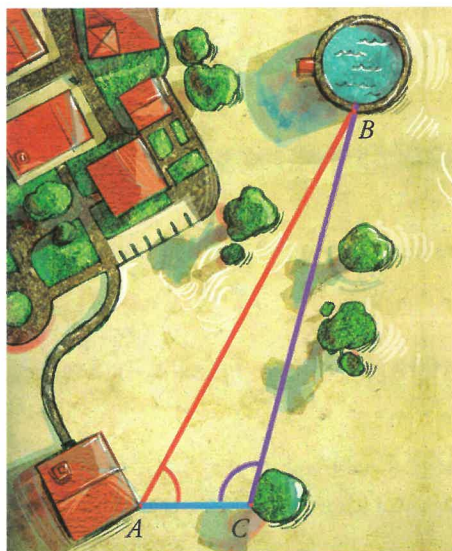
$$\hat{A'} = \hat{A} = 62^\circ \quad \hat{C'} = \hat{C} = 105^\circ$$

(Por tanto, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'B'C'}$ son semellantes).

Toma o lado $\overline{A'C'} = 45 \text{ mm}$, co que a razón de semellanza é 1:1 000.

- Mide sobre o seu caderno, coa regra, a lonxitude do lado $A'B'$: $\overline{A'B'} = 193 \text{ mm}$.

- Tendo en conta a razón de semellanza, calcula $\overline{AB}$, que é a distancia buscada. Por tanto, deduce que a distancia da súa casa ao depósito de auga é de 193 m.



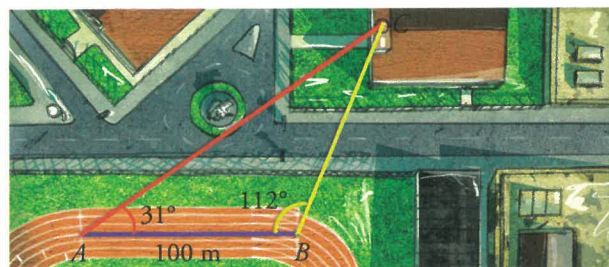
Actividades

- Desde os extremos A e B da recta dos 100 m dunha pista de atletismo vese a torre dunha igrexa.

Medimos os ángulos $\hat{A} = 31^\circ$ e $\hat{B} = 112^\circ$.

Debuxa no teu caderno un triángulo semellante, $A'B'C'$, con $\overline{A'B'} = 5 \text{ cm}$.

Medindo $\overline{A'C'}$, calcula a distancia real, $\overline{AC}$.



Os triángulos rectángulos son particularmente importantes, tanto desde o punto de vista teórico como práctico. Por iso lles imos dedicar unha atención especial. Empecemos lembrando algúns resultados que xa coñeces.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Nun triángulo rectángulo calquera, o cadrado da hipotenusa é igual á suma dos cadrados dos catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Aínda que é unha igualdade entre áreas, adóitase utilizar para obter a lonxitude de un dos tres lados coñecendo a dos outros dous:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

ÁREA

Como en todo triángulo, a área dun triángulo rectángulo é igual á metade da lonxitude da base pola altura. Pero aquí podemos tomar os dous catetos como base e altura. Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Como consecuencia, podemos calcular h a partir de a , b e c .

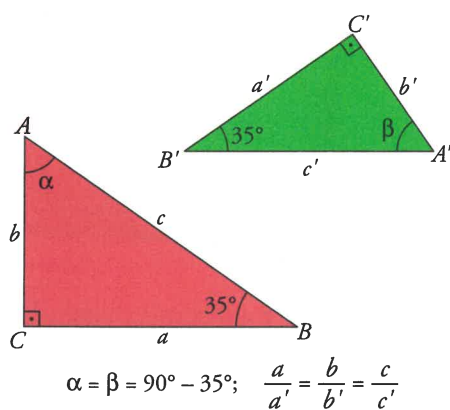
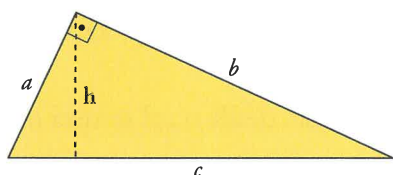
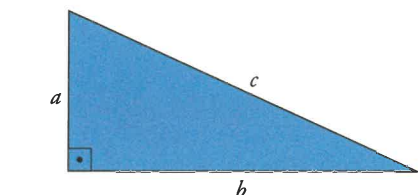
Criterio de semellanza de triángulos rectángulos

Dous triángulos rectángulos son semellantes se teñen igual un dos seus ángulos agudos.

Pois con ese ángulo e o ángulo recto xa son dous os ángulos iguais e, por tanto, tamén será igual o terceiro.

Este criterio de semellanza é moi fácil de aplicar. Basta recoñecer que dous triángulos rectángulos teñen un ángulo agudo igual para asegurar que os seus lados son proporcionais.

Por iso, os triángulos rectángulos son especialmente útiles para resolver problemas de semellanza.



Actividades

- 1** a) Comproba que 3, 4 e 5 son “números pitagóricos”; é dicir, que poden ser lonxitudes dos lados dun triángulo rectángulo (ou sexa, que $5^2 = 3^2 + 4^2$).

Fai o mesmo para:

- b) 0,6; 0,8 e 1 c) 5, 12 e 13 d) 7, 24 e 25
e) 8, 15 e 17 f) 1; 1,875 e 2,125

- 2** Calcula tanto a área como a altura sobre a hipotenusa dos seis triángulos rectángulos descritos no exercicio anterior.

- 3** Un triángulo rectángulo ten un ángulo de 28° . Outro triángulo rectángulo ten un ángulo de 62° . Explica por que son semellantes.

Vexamos algúns exemplos de aplicacións do criterio de semellanza en triángulos rectángulos.

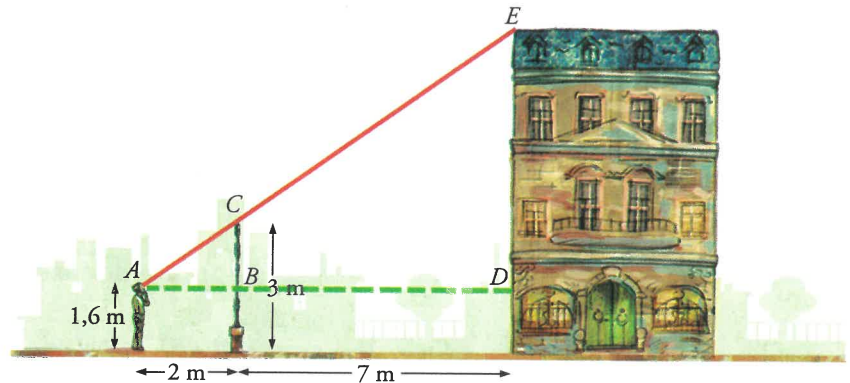
Problemas resoltos

1. Para medir a altura dun edificio, Miguel sitúase de modo que ve aliñados a parte alta da reixa e do edificio. Sinála a súa posición e toma as medidas que se ven no debuxo.

a) Explicar por que os triángulos ABC e ADE son semellantes.

b) Calcular ED e a altura do edificio.

1.



a) Os triángulos ABC e ADE son semellantes por ser rectángulos cun ángulo agudo igual, $\hat{A}$.

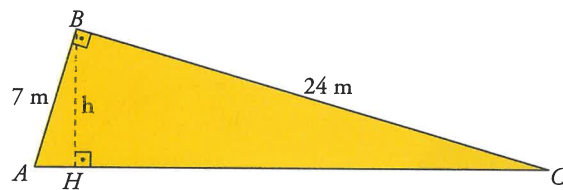
$$b) \frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AB} \rightarrow \frac{ED}{3 - 1,6} = \frac{2 + 7}{2} \rightarrow ED = \frac{9 \cdot 1,4}{2} = 6,3 \text{ m}$$

A altura do edificio é $6,3 + 1,6 = 7,9 \text{ m}$.

2. Unha antena de radio está suxeita por dous cables de 7 m e 24 m, que forman entre si un ángulo recto.

Xustificar que os triángulos ABH e ABC son semellantes e calcular a altura da antena.

2.



Os triángulos ABC e ABH son semellantes, por ser rectángulos e ter un ángulo agudo igual, $\hat{A}$.

Calculamos a hipotenusa do triángulo ABC :

$$\overline{AC}^2 = 7^2 + 24^2 \rightarrow \overline{AC} = 25 \text{ m}$$

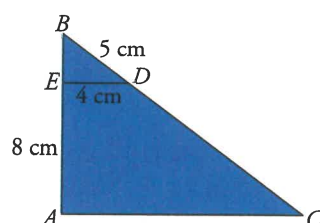
$$\text{Por semellanza: } \frac{BH}{BC} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{h}{24} = \frac{7}{25} \rightarrow h = \frac{24 \cdot 7}{25} = 6,72 \text{ m}$$

Actividades

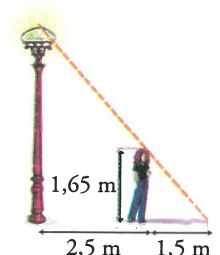
4 Calcula a altura dunha árbore que proxecta unha sombra de 7,22 m no momento en que un poste de 1,60 m dá unha sombra de 67 cm.

6 No mesmo instante e lugar da actividade 4, que lonxitude terá a sombra dun edificio que mide 32 m de altura?

5 Acha os lados do triángulo ABC .



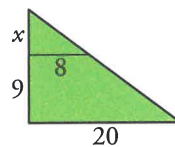
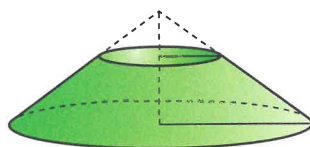
7 Se a altura de Rita é 1,65 cm, cal é a altura do farol?



Problemas resoltos

3. Achar o volume dun tronco de cono cuxa altura é 9 cm, e os raios das dúas bases miden 20 cm e 8 cm, respectivamente.

3.



Ampliamos o tronco ata completar un cono. Chamámoslle x ao incremento da altura. Temos en conta a semellanza dos dous triángulos: o pequeno, de catetos 8 e x ; o grande, de catetos 20 e $x + 9$:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+9}{20} \rightarrow 20x = 8x + 72 \rightarrow 12x = 72 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

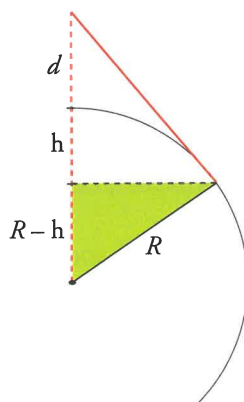
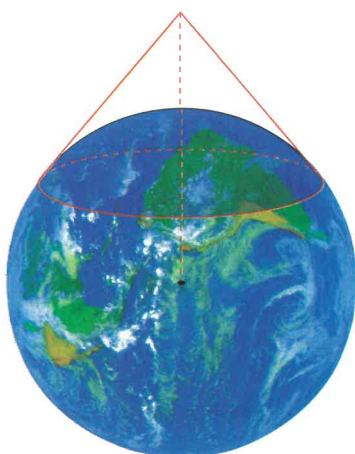
O volume do tronco de cono é a diferenza de volumes de dous conos:

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot (9+6) - \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi(6000 - 384) = 5881,06 \text{ cm}^3$$

4. Que porción de Terra se ve desde 1 000 km de altura? Lembremos que o raio da Terra mide 6 366 km.

4. A porción de Terra que se ve ao mirar a Terra (ou calquera outra esfera grande) a unha certa distancia é un casquete esférico. (A liña do horizonte é a circunferencia na que o cono formado polas visuais é tanxente á esfera).

Chamámoslle $d = 1\,000$ km á distancia desde o punto de mira á esfera;



$R = 6\,366$ km, ao raio da esfera, e h , á altura do casquete esférico cuxa área queremos calcular. Lembremos que $A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi Rh$.

Para calcular h , temos en conta que o triángulo rectángulo verde é semellante ao grande:

$$\begin{aligned} \frac{R}{R+d} &= \frac{R-h}{R} \rightarrow \frac{6\,366}{7\,366} = \frac{6\,366-h}{6\,366} \rightarrow \\ &\rightarrow 6\,366^2 = 7\,366 \cdot 6\,366 - 7\,366h \rightarrow \\ &\rightarrow h = 864,24 \text{ km} \end{aligned}$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi \cdot 6\,366 \cdot 864,24 = 34\,568\,526 \text{ km}^2$$



3. Axuda para resolver problemas nos que interveñen triángulos semellantes no espazo.

Actividades

- 8 Calcula o volume dun tronco de cono cuxa altura é 9 cm e cuxas bases teñen raios de 20 cm e 35 cm.

- 9 Calcula o volume dun tronco de pirámide cuadrangular regular cuxas bases son cadrados.

Lados dos cadrados: 40 cm e 16 cm

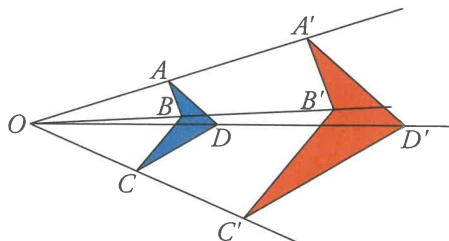
Altura: 9 cm

- 10 Un globo sobe 643 m sobre a superficie da Terra. Di qué superficie terrestre se verá desde arriba.

- 11 Na páxina inicial desta unidade calculabamos o diámetro da Lúa: 3 500 km.

Un foguete aproxímase á Lúa. Indaga qué superficie de Lúa se ve desde o foguete cando se atopa a 1 000 km de distancia.

5 Homotecia e semellanza



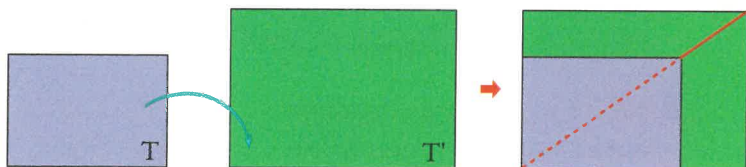
Cada punto da figura azul (por exemplo, o A) transformouse nun punto da vermella (A') que cumpre as condicións:

- O , A e A' están aliñados.
- $\overline{OA'} = 2 \cdot \overline{OA}$

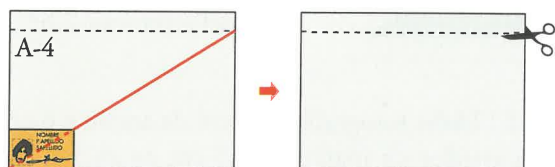
É unha **homotecia** de centro O e razón 2.

A homotecia é unha transformación que produce figuras semellantes. A razón de semellanza é igual á razón de homotecia. Se dúas figuras son homotéticas, os seus segmentos correspondentes son paralelos.

No apartado 2 desta unidade aplicamos a homotecia para comprobar que dous rectángulos son semellantes. Observa como podemos utilizala para construír un rectángulo áureo a partir dunha folla A-4, tendo en conta que o DNI é un rectángulo áureo.



COMPROBACIÓN DE QUE OS RECTÁNGULOS T E T' SON SEMELLANTES



CONSTRUCCIÓN DUN RECTÁNGULO ÁUREO CUNHA FOLLA A-4



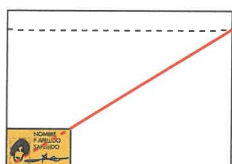
Na páxina inicial desta unidade, a moeda e o disco da Lúa sitúanse homoteticamente. O centro de homotecia é o ollo de Fatima, e a razón de homotecia, o cociente entre os diámetros das dúas circunferencias. Trátase dunha homotecia no espazo, pois os dous discos están en planos distintos (aínda que paralelos) e o centro de homotecia está fóra de ambos os planos.

A rapaza da fotografía utiliza este procedemento para comprobar se “a fiestra que ve alí en fronte” é un rectángulo áureo: compáraa co seu DNI, mediante unha homotecia con centro no seu ollo. Se co DNI consegue “tapar exactamente” a fiestra, entón serían semellantes, e a fiestra, ao igual que o DNI, sería un rectángulo áureo.

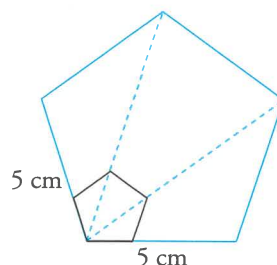


Actividades

- 1 No procedemento descrito arriba para obter unha folla de papel con dimensións áureas a partir dunha A-4 e coa axuda do DNI, aplícase unha homotecia. Cal é o seu centro, e cal a súa razón?



- 2 Debuxa un pentágono regular de 5 cm de lado. Para iso, calca un pentágono regular dalgún sitio e procede como se indica no debuxo.



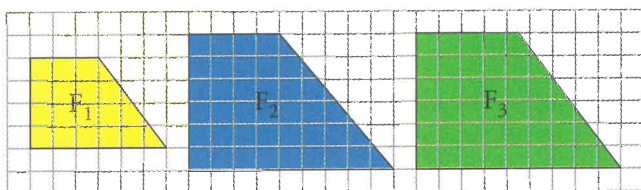
E

xercicios e problemas

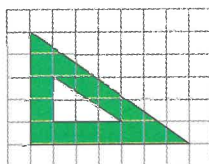
PRACTICA

Figuras semellantes

- 1 ■■■ Cales destas figuras son semellantes? Cal é a razón de semellanza?



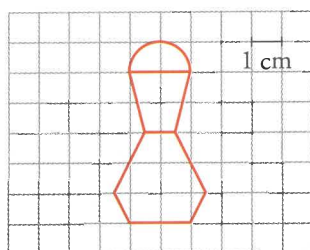
- 2 ■■■ a) Son semellantes os triángulos interior e exterior?



- b) Cantas unidades medirán os catetos dun triángulo semellante ao menor cuxa razón de semellanza sexa 2,5?

- 3 ■■■ Unha fotografía de 9 cm de ancho e 6 cm de alto ten arredor un marco de 2,5 cm de ancho. Son semellantes os rectángulos interior e exterior do marco? Responde razoadamente.

- 4 ■■■ Un xoiroiro quere reproducir un broche como o da figura duplicando o seu tamaño.



- a) Fai un debuxo da figura ampliada.
b) Calcula a súa superficie.

- 5 ■■■ Un rombo cuxas diagonais miden 275 cm e 150 cm, que área ocupará nun plano de escala 1:25?

- 6 ■■■ Unha maqueta está feita a escala 1:250. Calcula:

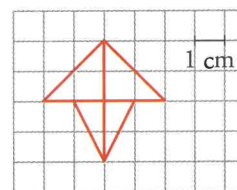
- a) As dimensións dunha torre cilíndrica que na maqueta mide 6 cm de altura e 4 cm de diámetro.
b) A superficie dun xardín que na maqueta ocupa 40 cm^2 .
c) O volume dunha piscina que na maqueta contén 20 cm^3 de agua.

- 7 ■■■ Neste mapa de escala 1:1 500 000, a distancia entre Monção e Ponte da Barca é 2 cm.

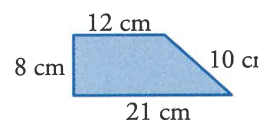
- a) Cal é a distancia real?
b) Calcula a distancia entre Viana do Castelo e Valença do Minho.
c) Qué distancia haberá no plano entre dúas cidades que distan 180 km?



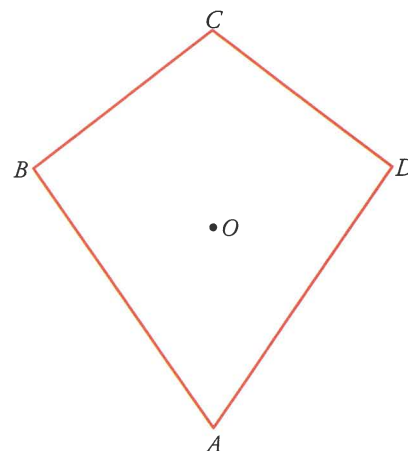
- 8 ■■■ Esta figura é o logotipo dunha empresa automobilística. Queren reproducilo de forma que ocupe 54 cm^2 de superficie. Cales serán as súas dimensións? Debúxao.



- 9 ■■■ Canto medirán os lados dun trapezio semellante ao da figura, cuxo perímetro sexa $163,2 \text{ cm}$?



- 10 ■■■ a) Copia esta figura no teu caderno e amplíaa a dobre tomando O como centro de homotecia.
b) Redúcea a $1/3$ tomando A como centro de homotecia.

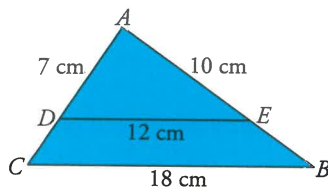


Semellanza de triángulos

- 11**  Comproba se son semellantes dous triángulos ABC e $A'B'C'$ que cumpren as condicións seguintes:
- a) $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 18$; $\overline{CA} = 12$
 $\overline{A'B'} = 25$; $\overline{B'C'} = 45$; $\overline{C'A'} = 30$
- b) $\overline{AB} = 20$; $\overline{BC} = 30$; $\overline{CA} = 40$
 $\overline{A'B'} = 40$; $\overline{B'C'} = 50$; $\overline{C'A'} = 60$
- c) $\hat{A} = 58^\circ$; $\hat{B} = 97^\circ$
 $\hat{A}' = 58^\circ$; $\hat{C}' = 35^\circ$

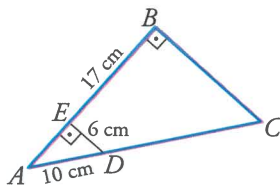
- 12**  O perímetro dun triángulo isóscele é 49 m e a súa base mide 21 m. Acha o perímetro doutro triángulo semellante, cuxa base mide 4 m. Cal é a razón de semellanza entre o triángulo maior e o menor?

- 13**  No triángulo ABC trazamos $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CB}$.



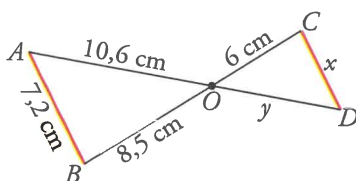
Por que son semellantes os triángulos ABC e ADE ?
 Calcula $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

- 14**  Por que son semellantes os triángulos ABC e AED ?



Acha o perímetro do trapezio $EBCD$.

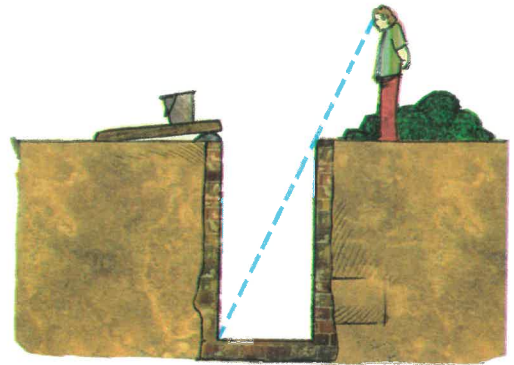
- 15**  Observa esta figura, na que o segmento AB é paralelo a CD .



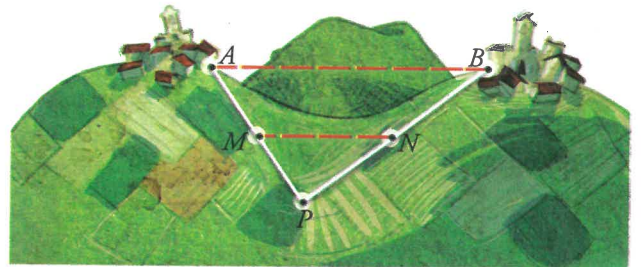
- a) Di por que son semellantes os triángulos OAB e ODC .
 b) Calcula x e y .

PENSA E RESOLVE

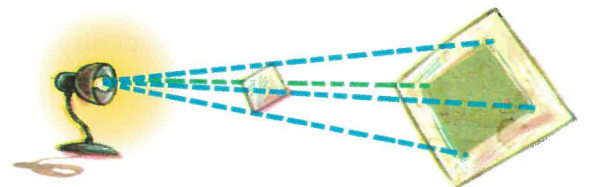
- 16**  Cal é a profundidade dun pozo, se a súa anchura é 1,2 m e afastándote 0,8 m do bordo, desde unha altura de 1,7 m, ves que a visual une o bordo do pozo coa liña do fondo?



- 17**  Entre dúas vilas A e B hai un outeiro. Para medir a distancia AB , fixamos un punto P desde o que se ven as dúas vilas e tomamos as medidas: $\overline{AP} = 15$ km, $\overline{PM} = 7,2$ km e $\overline{MN} = 12$ km. (MN é paralelo a AB). Calcula a distancia $\overline{AB}$.

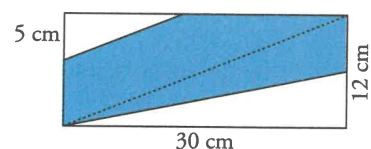


- 18**  Unha lámpada situada a 25 cm dunha lámina cadrada de 20 cm de lado proxecta unha sombra sobre unha pantalla paralela que está a 1,5 m da lámpada.



Canto mide o lado do cadrado proxectado?

- 19**  Se $\overline{DF} = 5$ cm, cal é a área e o perímetro do pentágono $FECGA$?

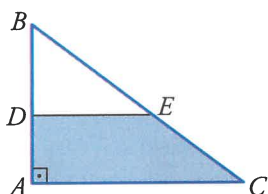


E

xercicios e problemas

- 20** Os catetos do triángulo rectángulo ABC miden $\overline{AC} = 28$ cm e $\overline{AB} = 21$ cm.

Desde o punto D tal que $\overline{AD} = 9$ cm, trázase unha paralela a AC . Acha a área e o perímetro do trapezio $ADEC$.

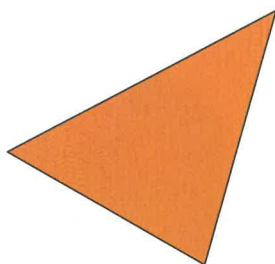


- 21** Nunha estrada de montaña, atopámonos cun sinal que nos advirte que a pendente é do 8%; é dicir, por cada 100 m que percorremos, o desnivel é de 8 m.



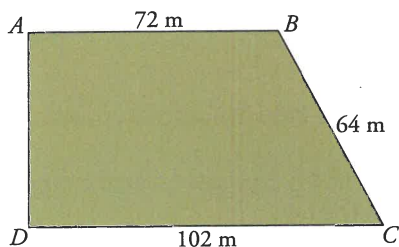
- Cal é o desnivel que se produce cando percorremos 3 km?
- Para que o desnivel sexa de 500 m, cantos quilómetros teremos que percorrer?

- 22** Esta figura representa, a escala 1:2000, unha parcela de terreo. Calcula o seu perímetro e a súa área, tomando as medidas necesarias.



- 23** Os lados maiores de dous triángulos semellantes miden 8 cm e 13,6 cm, respectivamente. Se a área do menor é 26 cm², cal é o área do maior?

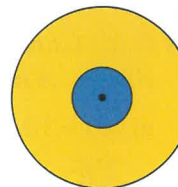
- 24** Unha parcela ten forma de trapezio rectángulo coas dimensións que se ven na figura.



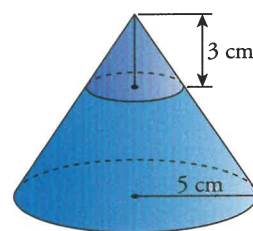
- Calcula a súa área.
- Quérese facer un pozo no punto onde se cortan as prolongacións dos lados AD e BC . A que distancia de A e de B estará o pozo?

- 25** Nestes dous círculos concéntricos, o raio do maior é o triplo do menor.

- Se a área do maior é 951 cm², cal é a área do menor?
- Calcula o raio de cada círculo.



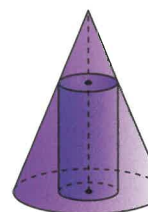
- 26** Para facer un funil de boca ancha, cortamos un cono de 5 cm de raio a 3 cm do vértice.



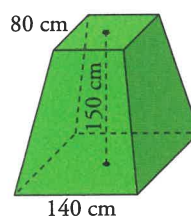
A circunferencia obtida ten 2 cm de raio.

Acha o volume do funil.

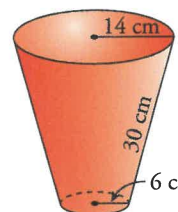
- 27** Recubrimos cun tellado cónico un depósito cilíndrico de 4 m de raio e 14,4 m de altura. Se o raio do cono é 10 m, cal é o volume da zona comprendida entre o cono e o cilindro?



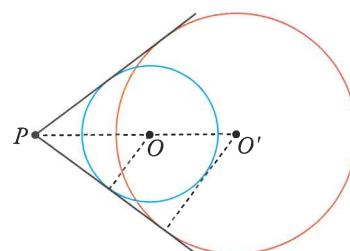
- 28** A base dunha escultura ten forma de tronco de pirámide cuadrangular regular na que os lados das bases miden 80 cm e 140 cm, e a súa altura, 150 cm. Acha o seu volume.



- 29** Acha o volume dunha macesta como a da figura, na que os raios das bases miden 6 cm e 14 cm, e a xeratriz, 30 cm.



- 30** Desde un punto P , trazamos as tanxentes comúns a dúas circunferencias. As distancias de P aos centros son $\overline{PO} = 17$ cm e $\overline{PO'} = 30$ cm. Se o raio da maior mide 18 cm, canto mide o raio da menor?



Infórmate

Tarxetas con ouro

- As tarxetas de banda magnética, utilizadas como claves de identificación, por exemplo nos caixeiros automáticos, son *rectángulos áureos*.

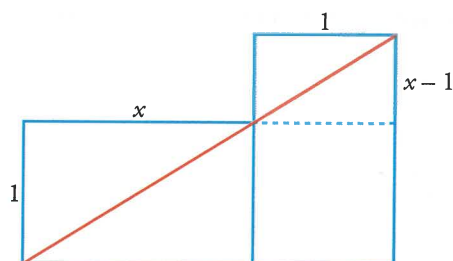
Se mides as súas dimensións, comprobarás que a relación entre os seus lados é o *número de ouro*.

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618...$$

É que con outras dimensións nos parecería unha tarxeta pouco harmónica ou desproporcionada.

- Comproba que colocando dous rectángulos como indica a figura, a diagonal dunha prolóngase pasando por un dos vértices da outra.

E aproveita esa propiedade para demostrar que, efectivamente, $x = \Phi$.



$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Autoavaliación

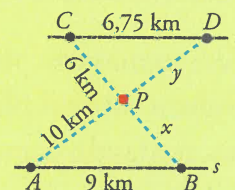
Reflexiona sobre a túa aprendizaxe

- Manexas a semellanza de figuras para obter medidas dunha a partir da outra?
- Cóñeces as condicións que se deben comprobar para asegurar que dous triángulos son semellantes?
- Utilizas con soltura a semellanza para resolver problemas?

Verifícao resolvendo exercicios

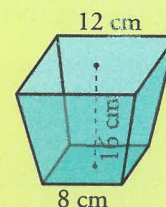
- Queremos facer unha maqueta dun xardín rectangular a escala 1:400. O seu perímetro é de 850 m, e a súa área, de 37 500 m². Cales serán estas medidas na maqueta?
- Álvaro debe situarse a 3 m dun charco para ver a copa dunha árbore reflectida nel. Se a distancia do charco á árbore é de 10,5 m e a estatura de Álvaro é de 1,72 m, cal é a altura da árbore?

- Un centro comercial P está situado entre dúas vías paralelas r e s . Quérese unir, mediante estradas, coas poboacións A , B , C e D .



Cos datos da figura, calcula x e y .

- Un floreiro ten forma de tronco de pirámide de bases cadradas de 8 cm e 12 cm de lado, e altura 16 cm. Calcula o seu volume.



- No teu CD-ROM tes unha **autoavaliación moito máis ampla e completa**. Nel encontrarás, ademais, orientacións e, se o desexas, as solucións dos exercicios.