

LITERATURA E MATEMÁTICAS

O oito

Sharif ía sacando os libros [da miña bolsa] e ordenándoos nunha morea sobre o escritorio mentres lía coidadosamente os títulos.

–Xogos matemáticos de xadrez... ah! Os *números de Fibonacci*! –exclamou, con ese sorriso que me facía sentir que tiña algo contra min. Sinalaba o aburrido libro de Nim–. De modo que che interesan as matemáticas? –preguntou, mirándome con intención.

–Non moito –dixen, poñéndome en pé e tratando de volver gardar as miñas pertenzas na bolsa. [...]

–Que sabe exactamente sobre os números de Fibonacci? [...]

–Úsanse para proxeccións de mercado –murmurei–. [...]

–Entón non coñece o autor? [...] Refírome a Leonardo Fibonacci. Un italiano nacido en Pisa no século XII, pero educado aquí, en Alxer. Era un brillante coñecedor das matemáticas daquel mouro famoso, Al-Kwarizmi, que deu o seu nome á palabra «algoritmo». Fibonacci introduciu en Europa a numeración arábica, que reemprazou os vellos números romanos...

Maldición. Debín comprender que Nim non me ía dar un libro só para que me entretivese, aínda cando o escribise el mesmo. [...]

Permanecín lendo case ata ao mencer e a miña decisión resultara produtiva, aínda que non sabía con certeza como. Ao parecer, os números de Fibonacci úsanse para algo máis ca as proxeccións do mercado de valores. A resolución dun problema levava a Fibonacci a formar esta interesante sucesión de números empezando polo un e sumándolle a cada número ao precedente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... [...] Descubriu que os cocientes entre cada termo e o anterior se aproximaban ao número $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e que este número describía tamén a estrutura de todas as cousas naturais que formaban unha espiral.

KATHERINE NEVILLE

Límite de sucesións
Operacións con límites
Indeterminacións
Límite de funcións
Ramas infinitas. Asíntotas
Continuidade. Tipos
de descontinuidade

Os números de Fibonacci aparecen con frecuencia na natureza. Por exemplo, o número de espirais dos xirasoles ou das piñas é sempre un destes números. Ademais, como se di nesta novela, ao dividir cada termo da sucesión de Fibonacci entre o anterior, obtense unha nova sucesión de números que se aproximan cada vez máis ao número de ouro: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Aínda que non a descubriu Fibonacci, esta propiedade é verdadeira. Compróbaa ti mesmo.

Sucesións

Unha **sucesión** é un conxunto ordenado de números reais:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

A cada un dos números que forman a sucesión chámase **termo** da sucesión.

O **termo xeral** dunha sucesión é unha expresión alxébrica que nos permite calcular calquera termo da sucesión, sabendo o lugar, n , que ocupa, e represéntase por a_n .

Consideramos a sucesión:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

O seu termo xeral é $a_n = 2n$, sendo n o lugar que ocupa o termo na sucesión.

$$a_3 \rightarrow \text{É o terceiro termo da sucesión: } a_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a_7 \rightarrow \text{É o sétimo termo da sucesión: } a_7 = 2 \cdot 7 = 14$$

$$\text{O termo 34 da sucesión é: } a_{34} = 2 \cdot 34 = 68$$

$$\text{O termo 1.000 da sucesión é: } a_{1.000} = 2 \cdot 1.000 = 2.000$$

Se unha sucesión ten por termo xeral $a_n = \frac{n^2 - 2}{n + 4}$, entón:

- O primeiro termo da sucesión é: $a_1 = \frac{1^2 - 2}{1 + 4} = -\frac{1}{5} = -0,2$
- O termo 18 da sucesión é: $a_{18} = \frac{18^2 - 2}{18 + 4} = \frac{322}{22} = 14,64$
- O termo 1.000 da sucesión é: $a_{1.000} = \frac{1.000^2 - 2}{1.000 + 4} = \frac{999.998}{1.004} = 996,01$

Repasa

1 Escribe os termos 14, 123 e 2.345 destas sucesións.

a) $a_n = n^2 - 3n + 2$

b) $a_n = \frac{n + 4}{2n + 1}$

Factorización dun polinomio

Factorizar un polinomio

é expresar un polinomio como produto de factores que teñan o menor grao posible.

Para factorizar un polinomio pódese utilizar a extracción de factor común, a regra de Ruffini e as igualdades notables.

Factorizamos o polinomio $P(x) = 2x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 12x$.

PRIMEIRO. Se o polinomio non ten termo independente, sacamos factor común.

$$2x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 12x = 2x(x^3 + 4x^2 + x - 6)$$

SEGUNDO. Calculamos os divisores do termo independente do polinomio.

$$\text{Div}(-6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

TERCEIRO. Para comprobar se un divisor, a , do termo independente é raíz, realizamos a división entre $(x - a)$ pola regra de Ruffini.

Despois de encontrar a primeira raíz, repetimos o proceso.

O polinomio factorizado é:

$$2x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 12x = 2x(x^3 + 4x^2 + x - 6) = 2x(x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

	1	4	1	-6
1		1	5	6
	1	5	6	0
-2		-2	-6	
	1	3	0	

Repasa

2 Factoriza este polinomio: $P(x) = 7x^5 + 14x^4 - 35x^3 - 42x^2$

Simplificación de fraccións alxébricas

Simplificamos a fracción alxébrica: $\frac{(y^4 - y^3)(x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)}$

PRIMEIRO. Factorizamos os polinomios do numerador e do denominador.

$$\frac{(y^4 - y^3)(x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)} = \frac{y^3(y - 1)(x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)} = \frac{y^3(y - 1)(x - 1)^2}{xy^2(x - 1)}$$

$\uparrow$ Sacamos factor común y^3 : $y^4 - y^3 = y^3(y - 1)$
 $\uparrow$ Cadrado dunha diferenza: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

SEGUNDO. Dividimos o numerador e o denominador entre os factores comúns a ambos.

$$\frac{\cancel{y^3}(y - 1)(x - 1)\cancel{(x - 1)}}{\cancel{xy^2}(x - 1)} = \frac{y(y - 1)(x - 1)}{x}$$

Repasa

3 Simplifica estas fraccións alxébricas.

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x(x + 1)}$

c) $\frac{y^2(x^2 - 4x + 4)}{x(x - 2)}$

b) $\frac{x^2(x^2 - 4)}{x(x - 2)}$

d) $\frac{(x^2 - 9)(y^2 - 16)}{xy(2x - 6)(y + 4)^2}$

Suma e resta de fraccións alxébricas

Para sumar ou restar fraccións alxébricas é necesario reducilas a común denominador.

Logo súmanse ou réstanse os seus numeradores e divídese entre o denominador común.

Realizamos esta operación: $\frac{3n^2 - 2}{n + 1} - \frac{n^2 + 3}{n - 1}$

Común denominador: $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$

$$\frac{3n^2 - 2}{n + 1} \xrightarrow{(n^2 - 1) : (n + 1) = n - 1} \frac{(3n^2 - 2)(n - 1)}{n^2 - 1} = \frac{3n^3 - 3n^2 - 2n + 2}{n^2 - 1}$$

$$\frac{n^2 + 3}{n - 1} \xrightarrow{(n^2 - 1) : (n - 1) = n + 1} \frac{(n^2 + 3)(n + 1)}{n^2 - 1} = \frac{n^3 + n^2 + 3n + 3}{n^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 - 2}{n + 1} - \frac{n^2 + 3}{n - 1} &= \frac{3n^3 - 3n^2 - 2n + 2}{n^2 - 1} - \frac{n^3 + n^2 + 3n + 3}{n^2 - 1} = \\ &= \frac{2n^3 - 4n^2 - 5n - 1}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

Repasa

4 Resolve estas operacións e simplifica o resultado.

a) $(x + 1) - \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

b) $(2x - 2) - \frac{x - 1}{3x}$

1 Sucesións. Límite dunha sucesión

1.1. Sucesións

Unha **sucesión de números reais** é unha función que asocia a cada número natural n un número real a_n .

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$1 \longrightarrow a_1$$

$$2 \longrightarrow a_2$$

...

$$n \longrightarrow a_n$$

A cada un dos números da sucesión: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, chámase **termo da sucesión**, e o termo a_n é o **termo xeral** da sucesión.

Exemplos

1 Encontra o termo xeral destas sucesións.

a) 2, 4, 6, 8, 10, ...

$$a) f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$1 \longrightarrow f(1) = a_1 = 2$$

$$2 \longrightarrow f(2) = a_2 = 4$$

$$3 \longrightarrow f(3) = a_3 = 6$$

$$4 \longrightarrow f(4) = a_4 = 8$$

...

$$n \longrightarrow f(n) = a_n = 2n$$

$$100 \longrightarrow f(100) = a_{100} = 2 \cdot 100 = 200$$

b) 1, 4, 9, 16, 25, ...

$$b) f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$1 \longrightarrow f(1) = a_1 = 1$$

$$2 \longrightarrow f(2) = a_2 = 4$$

$$3 \longrightarrow f(3) = a_3 = 9$$

$$4 \longrightarrow f(4) = a_4 = 16$$

...

$$n \longrightarrow f(n) = a_n = n^2$$

$$100 \longrightarrow f(100) = a_{100} = 100^2 = 10.000$$

2 Calcula os cinco primeiros termos da sucesión de termo xeral:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 1}, \text{ sendo } a_1 = 1$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 1} \xrightarrow{n=2} a_2 = \frac{a_1 + 2}{a_1 + 1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 1} \xrightarrow{n=3} a_3 = \frac{a_2 + 2}{a_2 + 1} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 1} \xrightarrow{n=4} a_4 = \frac{a_3 + 2}{a_3 + 1} = \frac{17}{12} = 1,41\bar{7}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 1} \xrightarrow{n=5} a_5 = \frac{a_4 + 2}{a_4 + 1} = \frac{41}{29} = 1,414$$

Comprobamos que os termos desta sucesión son números racionais que se aproximan ao valor de $\sqrt{2} = 1,41421\dots$

ACTIVIDADES

1 Obtén o termo xeral destas sucesións.

a) $\frac{3}{5}, \frac{7}{15}, \frac{11}{45}, \dots$

b) $\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{-3}{16}, \dots$

2 Coa túa calculadora, calcula os cinco primeiros termos da sucesión recorrente $a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{a_{n-1} + 1}$, sendo $a_1 = 1$, e determina o número ao que se aproxima.

1.2. Límite dunha sucesión

O **límite** dunha sucesión de números reais, de termo xeral a_n , é un número real a cando, para valores moi grandes de n , os termos correspondentes da sucesión se aproximan a el.

Isto escríbese como: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Lese: «O límite da sucesión a_n , cando n tende a infinito, é a ».

Exemplo

3 Calcula o límite das seguintes sucesións.

a) $a_n = \frac{1}{n}$

c) $a_n = -2^n$

b) $a_n = n^2 - 1$

d) $a_n = (-1)^n \cdot n$

a) $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{10}, \dots, a_{100}, \dots$

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{100}, \dots \right\} a_n \rightarrow 0$$

1; 0,5; 0,33; 0,25; 0,2; ...; 0,1; ...; 0,001; ...

A medida que avanzamos na sucesión, os seus valores fanse cada vez máis pequenos e próximos a 0.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

b) $a_n = n^2 - 1 \rightarrow 0, 3, 8, 15, 24, \dots, 100, \dots, 10.000, \dots$ $a_n \rightarrow +\infty$

A sucesión crece indefinidamente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 1) = +\infty$$

c) $a_n = -2^n \rightarrow -2, -4, -8, -16, -32, \dots, -1.024, \dots$ $a_n \rightarrow -\infty$

Os valores dos termos da sucesión son cada vez máis pequenos.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -2^n = -\infty$$

d) $a_n = (-1)^n \cdot n \rightarrow -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \dots$

Os termos situados en posición par son positivos, e os termos situados en posición impar son negativos. Non podemos determinar o valor dun termo con n moi grande.

a_n non ten límite.

Non esquezas



O límite dunha sucesión, se existe, é único.

ACTIVIDADES

3 Con axuda da túa calculadora, atopa o límite das seguintes sucesións.

a) $a_n = (-1)^{2n+4}$

c) $a_n = n^2 - n^3$

b) $a_n = n^2$

d) $a_n = 0,2^n$

4 Escribe sucesións de números reais que cumpran que o seu límite, cando n tende a infinito, é:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ non existe

2 Cálculo de límites

2.1. Límite de potencias

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < k < 1 \\ \text{Non existe} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Exemplo

4 Calcula estes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$, porque $2 > 0$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n \rightarrow$ Non existe, porque $-2 < 0$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, porque $0 < \frac{1}{2} < 1$.

2.2. Límite dun polinomio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k n^k = a_k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^k$$

Non esquezas

$$k \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ -\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

$$k \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } k > 0 \\ +\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Exemplo

5 Determina os límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + n - 2) = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3 + n^2 - n) = (-1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$

2.3. Límite dun cociente de polinomios

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \dots + b_1 n + b_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_p n^p} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < p \\ \frac{a_k}{b_p} & \text{se } k = p \\ \infty & \text{se } k > p \end{cases}$$

Decátate

Se $k > p$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_p n^p} = +\infty \quad \text{se } \frac{a_k}{b_p} > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_p n^p} = -\infty \quad \text{se } \frac{a_k}{b_p} < 0$$

Exemplo

6 Calcula estes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 2}{2n - 1} = +\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2}{2n^2 - 1} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 2}{2n^2 - 1} = \frac{3}{2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 2}{-2n - 1} = -\infty$

ACTIVIDADES

5 Calcula estes límites de sucesións.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,5^n$

6 Calcula os límites das sucesións que presenta os seguintes termos xerais son.

a) $\frac{8n}{2n^2 + 3n - 1}$

b) $\frac{(n-1)^{10}}{(n+2)^{10}}$

3 Operacións con límites

Se a_n e b_n son dúas sucesións de números reais e existen os seus límites, sempre se cumpre que:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$, sempre que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_b a_n = \log_b \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

Exemplo

7 Calcula estes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{2n} + \frac{3n^2}{n^2-3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2-3} = \frac{4}{2} + \frac{3}{1} = 5$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^3-1}{7n} \cdot \frac{n^2}{3n^2+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3+1}{7n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = (+\infty) \cdot \frac{1}{3} = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{9n^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n^2}{n^2}} = 0 + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3-1}{3n^3} \right)^{n^2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-1}{3n^3} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2} = \left(\frac{2}{3} \right)^{+\infty} = 0$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} 9^{\frac{n^2+1}{2n^2}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n^2+3}{2n^2} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{2n^2} = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

Non esquezas



$$k^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq k < 1 \end{cases}$$

$$k^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 \leq k < 1 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

7 Calcula os seguintes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-1}{n^3} \cdot \frac{4n^4}{2n^4+3} \right) \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n^2+1}{n^2+n+2}}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n^2+7}{2n} \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} \right)$$

8 Calcula estoutros límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4+1}{2n^4+1} + \frac{-n^3}{3n^3+n+1} \right) \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} 9^{\frac{n^2+1}{2n^2}}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n^3+1}{2n^3+n} \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} 0,1^{\frac{n+1}{n^2}}$$

4 Indeterminacións

Nalgúns casos, ao calcular límites obtemos expresións que non nos permiten determinar se un límite existe e cal é o seu resultado, ou non existe. Estas expresións denomínanse **indeterminacións**.

Tipos de indeterminacións

Podemos diferenciar os seguintes tipos de indeterminacións.

- Indeterminacións asociadas á suma ou á resta:

$$(+\infty) - (+\infty) \quad (-\infty) - (-\infty) \quad (-\infty) + (+\infty) \quad (+\infty) + (-\infty)$$

Estas indeterminacións exprésanse como $\infty - \infty$.

- Indeterminacións asociadas ao produto:

$$0 \cdot (+\infty) \quad 0 \cdot (-\infty) \quad (+\infty) \cdot 0 \quad (-\infty) \cdot 0$$

Estas indeterminacións exprésanse como $0 \cdot \infty$.

- Indeterminacións asociadas ao cociente:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{+\infty}{+\infty} \quad \frac{+\infty}{-\infty} \quad \frac{-\infty}{+\infty} \quad \frac{-\infty}{-\infty}$$

Estas indeterminacións exprésanse como $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

- Indeterminacións asociadas á potenciación:

$$1^{+\infty} \quad 1^{-\infty} \quad +\infty^0 \quad -\infty^0 \quad 0^0$$

Estas indeterminacións exprésanse como 1^∞ , ∞^0 e 0^0 .

Non esquezas

$$\begin{aligned} a + \infty &= +\infty \\ a - \infty &= -\infty \\ +\infty + \infty &= +\infty \\ -\infty - \infty &= -\infty \end{aligned}$$

Exemplo

- 8 Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$, calcula estes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 0 \cdot \infty & \text{se } a = 0 \rightarrow \text{Indeterminación} \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n}) = a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1^\infty & \text{se } a = 1 \rightarrow \text{Indeterminación} \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ \text{Non existe} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + c_n) = (+\infty) + (-\infty) = +\infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación do tipo } \infty - \infty$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - c_n) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

ACTIVIDADES

- 9 Explica por que non son indeterminacións.

a) $\infty \cdot \infty$

b) $\frac{0}{\infty}$

c) $\frac{\infty}{0}$

d) ∞^1

- 10 Pon exemplos de límites que produzan indeterminacións dos seguintes tipos.

a) $0 \cdot \infty$

b) 1^∞

c) ∞^0

d) 0^0

5 Resolución dalgunhas indeterminacións

Imos estudar certos métodos que nos permitirán resolver unha indeterminación e encontrar o valor do límite.

5.1. Indeterminación do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Estas indeterminacións adoitan aparecer ao calcular límites con cocientes de polinomios nos que hai radicais, e resólvense dividindo entre a maior potencia de n .

Faino así

COMO RESOLVEMOS LÍMITES QUE PRESENTAN UNHA INDETERMINACIÓN DO TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

Resolve estes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3-1}}{n+5}$$

PRIMEIRO. Determinamos se o límite presenta o tipo de indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{\sqrt{n^3+1}} \rightarrow \frac{3 \cdot (+\infty)}{\sqrt{+\infty}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3-1}}{n+5} \rightarrow \frac{\sqrt[3]{+\infty}}{+\infty} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

SEGUNDO. Determinamos a maior potencia de n , considerando que o expoñente de n que está baixo a raíz queda dividido entre o índice da raíz.

$$\text{a) } \frac{3n^2}{\sqrt{n^3+1}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Mayor grado de } n: 2 \\ \sqrt{n^3+1} \rightarrow \text{Mayor grado de } n: \frac{3}{2} \\ n \text{ de maior grao} \rightarrow n^2 \end{array}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[3]{8n^3-1}}{n+5} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Mayor grado de } n: \frac{3}{3} \\ n+5 \rightarrow \text{Mayor grado de } n: 1 \\ n \text{ de maior grao} \rightarrow n \end{array}$$

TERCEIRO. Dividimos o numerador e o denominador entre a potencia de n calculada.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{\sqrt{n^3+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{n^3}{n^4} + \frac{1}{n^4}}} = \frac{3}{0} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3-1}}{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{8n^3-1}}{n}}{\frac{n+5}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{8n^3-1}{n^3}}}{\frac{n+5}{n}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{1} = 2$$

Non esquezas



$$\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$$

$$\sqrt[k]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{se } k \text{ é impar} \\ \text{Non existe} & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$$

Non esquezas



$$\frac{a}{\infty} = 0$$

$$\frac{a}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ \text{Indeterminación} & \text{se } a = 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

11 Calcula os seguintes límites, resolvendo as indeterminacións que poidan presentar.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n+1}}{2n}$$

12 Presentan indeterminacións do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ estas sucesións? En caso afirmativo, calcula o límite.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5-n^2}}{n}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5-n^2}}{n}$$

5.2. Indeterminación do tipo $\infty - \infty$

Estas indeterminacións adoitan aparecer ao calcular límites da diferenza de radicais e da diferenza de cocientes de polinomios. No primeiro caso hai que multiplicar polo conxugado, e no segundo temos que realizar a diferenza dos cocientes.

Faino así

COMO RESOLVEMOS OS LÍMITES CUNHA INDETERMINACIÓN DO TIPO $\infty - \infty$

Resolve estes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{2n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right) \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-3})$$

PRIMEIRO. Determinamos se o límite presenta o tipo de indeterminación $\infty - \infty$.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{2n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right) \rightarrow \infty - \infty \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-3}) \rightarrow \infty - \infty$$

SEGUNDO. Resolvemos a indeterminación, tendo en conta se son radicais ou cocientes de polinomios.

- Se é unha diferenza de cocientes de polinomios, realizamos a resta das fraccións alxébricas.
- Se é unha diferenza de radicais, multiplicamos e dividimos polo seu conxugado.

$$\text{a) } \frac{2n^2}{2n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} = \frac{\cancel{2n^4} + 2n^2 - \cancel{2n^4} - n^3}{(2n+1)(n^2+1)} = \frac{-n^3 + 2n^2}{2n^3 + n^2 + 2n + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-3} &= \frac{(\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-3})(\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2-3})}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2-3}} = \\ &= \frac{7}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2-3}} \end{aligned}$$

TERCEIRO. Calculamos o límite co novo resultado.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{2n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 + 2n^2}{2n^3 + n^2 + 2n + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-3}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2-3}} = 0$$

ACTIVIDADES

13 Calcula os seguintes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 2n + 1}{2n^2 - 1} - \frac{n^2}{n-1} \right)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^2+1} + \frac{-n^3+2}{n} \right)$$

14 Calcula estes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3n})$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{n^2+5})$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+7} + \sqrt{3n^2+n})$$

5.3. Indeterminación do tipo 1^∞

Estas indeterminacións adoitan estar asociadas ao cálculo do límite da sucesión

que presenta como termo xeral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Para resolver esta indeterminación utilizamos a igualdade $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e transformamos a sucesión da que queremos calcular o límite nunha sucesión deste tipo.

Exemplo

9 Calcula os seguintes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} 3n-2} \rightarrow 1^\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n-2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{2}{n} \cdot (3n-2)} = \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (3n-2)}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-4}{n}} = e^6 \end{aligned}$$

Decátate



A sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2,37037 \dots$$

...

$$a_{100} = 1,01^{100} = 2,70581 \dots$$

Trátase dunha sucesión que é sempre crecente e que tende cara ao número 2,718281..., que denominamos número e .

ACTIVIDADES

15 Calcula os seguintes límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$$

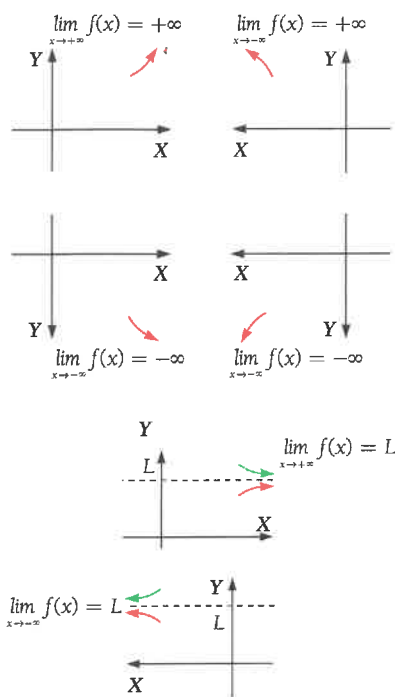
$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{3}}$$

16 Calcula estoutros límites.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{3n-2}$$

6 Límite dunha función no infinito



Se consideramos a expresión alxébrica dunha función $f(x)$ como o termo xeral dunha sucesión, o límite da función cando x tende a infinito coincide co límite da sucesión.

- O **límite dunha función** $f(x)$, **cando x tende a $+\infty$** , é un número real L , cando para valores moi grandes de x , os valores da función aproxímanse ao número L .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Lese: «O límite da función $f(x)$ cando x tende a $+\infty$ é L ».

- O **límite dunha función** $f(x)$, **cando x tende a $-\infty$** , é un número real L , cando para valores moi pequenos de x , os valores da función aproxímanse ao número L .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

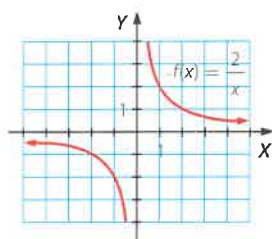
Lese: «O límite da función $f(x)$ cando x tende a $-\infty$ é L ».

Exemplo

10 Calcula o límite destas funcións cando x tende a infinito.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

Representamos a función para estudar os valores de $f(x)$ cando a variable x toma valores moi grandes e moi pequenos.



Cando x toma valores moi grandes, $x \rightarrow +\infty$, $f(x)$ aproxímanse a 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Cando x toma valores moi pequenos, $x \rightarrow -\infty$, $f(x)$ tamén se aproxima a 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

b) $f(x) = \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7}$

A partir do cálculo de límites para as sucesións, substituímos x por n , cando $x \rightarrow +\infty$, ou por $-n$, cando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^3 + 2n}{n^3 - 7} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{4(-n)^3 + 2(-n)}{(-n)^3 - 7} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-4n^3 - 2n}{-n^3 - 7} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Decátate



Na práctica, o grao dos polinomios decide o límite, polo que a substitución de x por n non se realiza e dáse o resultado directamente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 2x}{x^3 - 7} = \frac{4}{1} = 4$$

ACTIVIDADES

17 Calcula os seguintes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x-1} \right)^3$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3}$

18 Calcula estes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{3x+3} \right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2+1} \right)^x$

7 Límite dunha función nun punto

7.1. Límites laterais

Ao aproximarnos a un punto podemos facelo pola esquerda, con valores menores ca el, ou pola dereita, con valores maiores.

- O límite dunha función $f(x)$, cando x tende a un punto c pola esquerda, é un número real L , cando para valores de x moi próximos a c e menores ca c , os valores da función aproxímanse ao número L .

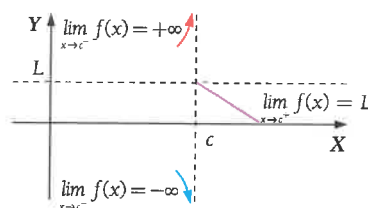
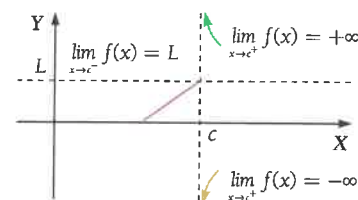
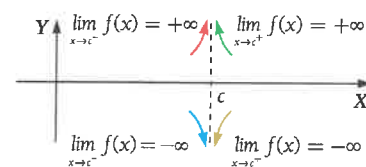
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

Lese: «O límite da función $f(x)$ cando x tende a c pola esquerda é L ».

- O límite dunha función $f(x)$, cando x tende a un punto c pola dereita, é un número real L , cando para valores de x moi próximos a c e maiores ca c , os valores da función aproxímanse ao número L .

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Lese: «O límite da función $f(x)$ cando x tende a c pola dereita é L ».



Exemplos

- 11 Calcula os límites laterais da función $f(x) = \frac{3}{x+1}$ en $x = -1$.

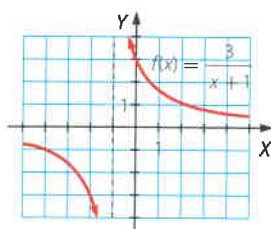
Representamos a función para estudar que valores toma $f(x)$ para valores moi próximos a -1 pola dereita e pola esquerda.

Cando x toma valores moi próximos a -1 e menores ca -1 , os valores de $f(x)$ tenden a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = -\infty$$

Cando x toma valores moi próximos a -1 e maiores ca -1 , os valores de $f(x)$ tenden a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty$$

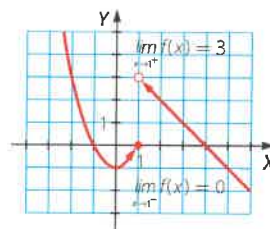


- 12 Calcula os límites laterais de $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

Para calcular o límite lateral dunha función nun punto substituímos na función a variable x polo punto 1; se non obtemos unha indeterminación, ese é o límite.

Límite pola esquerda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$

Límite pola dereita: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 4) = -1 + 4 = 3$



Os límites laterais non coinciden.

ACTIVIDADES

- 19 Calcula os límites laterais no punto $x = 3$ de:

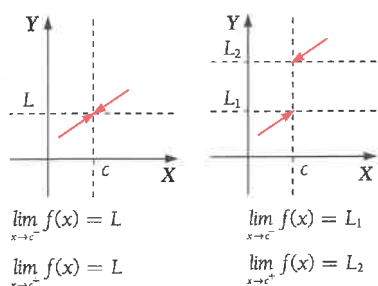
$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x < 3 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

- 20 Calcula os límites laterais en $x = 0$ das seguintes funcións.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

7.2. Límite dunha función nun punto



- O límite dunha función $f(x)$, cando x tende a un punto c , é un número real L cando $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Lese: «O límite da función $f(x)$ cando x tende a c é L ».

- Da mesma maneira, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ o $-\infty$, cando os límites laterais son iguais a estes valores.
- Se $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, dicimos que non existe o límite de $f(x)$ cando x tende a c .

Decátate



Para comprobar o signo de $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, substituímos x na función por un valor próximo a 2 e menor ca 2.

$$\frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{1,99^2 + 2}{1,99 - 2} < 0$$

$x = 1,99$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

Facemos o mesmo para $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

$$\frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{2,01^2 + 2}{2,01 - 2} > 0$$

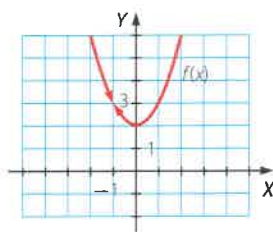
$x = 2,01$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Exemplo

- Calcula os seguintes límites de funcións.

a) $f(x) = x^2 + 2$ en $x = -1$



Representamos a función para estudar que lle ocorre a $f(x)$ cando x toma valores moi próximos a -1 . E comprobamos que os valores de $f(x)$ tenden a 3.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2) = 3$$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$ en $x = 3$ e en $x = 2$

Para calcular o límite dunha función nun punto podemos substituír x polo punto na función; se obtemos un número, ese é o límite.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{3^2 + 2}{3 - 2} = \frac{11}{1} = 11$$

Se ao substituír x polo punto na función, obtemos un límite con resultado $+\infty$ ou $-\infty$, é necesario calcular os límites laterais.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{2^2 + 2}{2 - 2} = \frac{6}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\overset{>0}{x^2 + 2}}{\underset{<0}{x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overset{>0}{x^2 + 2}}{\underset{>0}{x - 2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2}{x - 2} \longrightarrow \text{Non existe } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2}$$

ACTIVIDADES

- 21 Calcula o límite da función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 5} \text{ en } x = 2 \text{ e en } x = 5.$$

- 22 Razona se existe ou non o límite da función

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 3} + \frac{x + 3}{x - 2} \text{ en } x = 2, \text{ en } x = 3 \text{ e en } x = 4.$$

Faino así

COMO CALCULAMOS O LÍMITE NUNHA FUNCIÓN DEFINIDA A ANACOS

Calcula o límite de: $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \leq -1 \\ -2x^2+4 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$ e en $x = 0$.

PRIMEIRO. Se no punto no que queremos calcular o límite, a función pasa dunha expresión alxébrica a outra, calculamos os seus límites laterais.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1) = -1-1 = -2$$

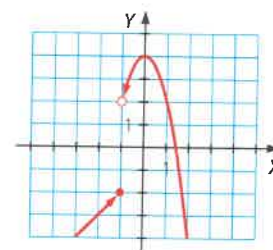
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x^2+4) = -2 \cdot (-1)^2 + 4 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \longrightarrow \text{Non existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

SEGUNDO. Se non é un punto do tipo anterior, calculamos o límite nese punto substituíndo a variable x polo punto na expresión alxébrica da función.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x^2+4) = -2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$0 > -1$



Os límites laterais non coinciden.

7.3. Indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$

Esta indeterminación adoita aparecer ao calcular límites dunha función racional, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, nun punto c no que $P(c) = 0$ e $Q(c) = 0$. Para resolvela hai que factorizar os polinomios do numerador e do denominador e simplificar.

Non esquezas

Se un polinomio $P(x)$ toma o valor 0 en $x = c$, entón é divisible por $(x - c)$.

$$P(c) = 0 \rightarrow P(x) = (x - c) P_1(x)$$

Faino así

COMO RESOLVEMOS OS LÍMITES CUNHA INDETERMINACIÓN DO TIPO $\frac{0}{0}$

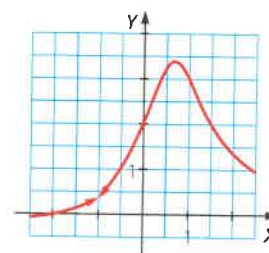
Resolve este límite: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1}$

PRIMEIRO. Determinamos se o límite presenta o tipo de indeterminación $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{(-1)^3 + 1} = \frac{0}{0}$$

SEGUNDO. Factorizamos os polinomios do numerador e do denominador, simplificamos a fracción alxébrica e calculamos o límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x^2-x+1} = \\ &\quad \text{Factorizamos} \qquad \qquad \qquad \text{Simplificamos} \\ &= \frac{-1+2}{(-1)^2 - (-1) + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Os límites laterais coinciden.

ACTIVIDADES

23 Calcula os seguintes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

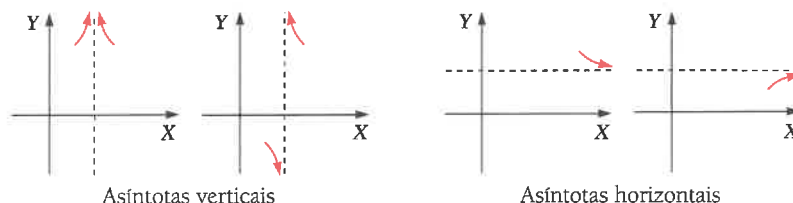
24 Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1}$ se $m = 2$ e $m = 3$.

Podes determinar o límite para un valor m calquera?

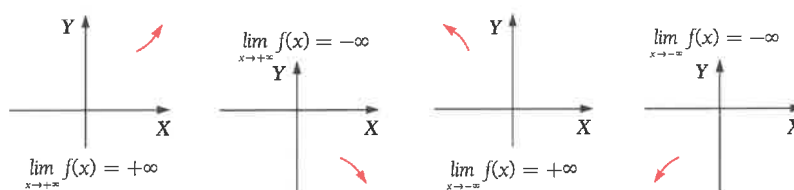
8 Ramas infinitas. Asíntotas

Na gráfica dunha función poden existir tramos nos que a función se afasta indefinidamente. Estes tramos chámanse **ramas infinitas** da función.

- Cando unha rama infinita se achega indefinidamente a unha recta, esa recta chámase **asíntota**, e a rama infinita, **rama asíntótica**.



- Se a rama infinita non se achega a ningunha recta denomínase **rama parabólica**.



Asíntotas verticais, horizontais e oblicuas

Unha función $f(x)$ ten unha **asíntota vertical** en $x = c$ se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$.

Faino así

COMO CALCULAMOS AS ASÍNTOTAS VERTICAIS DUNHA FUNCIÓN RACIONAL

Calcula as asíntotas verticais da función $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$.

PRIMEIRO. Determinamos as raíces do polinomio do denominador.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

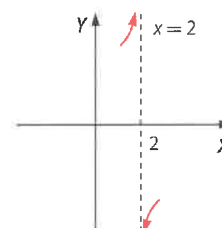
SEGUNDO. Calculamos o límite da función neses puntos. Se o resultado é $+\infty$ ou $-\infty$, a función ten unha asíntota vertical nese punto.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{x-2} = \frac{-1}{0} = -\infty \rightarrow f(x) \text{ ten unha asíntota vertical en } x = 2.$$

TERCEIRO. Calculamos os seus límites laterais para determinar a situación da rama infinita con respecto á asíntota.

$$x = 1,99 \rightarrow \frac{1-x}{x-2} = \frac{1-1,99}{1,99-2} > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{x-2} = +\infty$$

$$x = 2,01 \rightarrow \frac{1-x}{x-2} = \frac{1-2,01}{2,01-2} < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x-2} = -\infty$$



ACTIVIDADES

- 25** Pon un exemplo dunha función que teña como asíntotas verticais as rectas que presentan as ecuacións:

$$x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3$$

- 26** Calcula as asíntotas verticais das funcións.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x}$$

Unha función $f(x)$ ten unha **asíntota horizontal** en $y = k$ se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$.

Faino así

COMO CALCULAMOS AS ASÍNTOTAS HORIZONTAIS DUNHA FUNCIÓN

Estuda se a función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x}$ ten unha asíntota horizontal.

PRIMEIRO. Calculamos o límite da función cando $x \rightarrow \infty$. Se o resultado é distinto de $+\infty$ ou $-\infty$, a función ten unha asíntota horizontal.

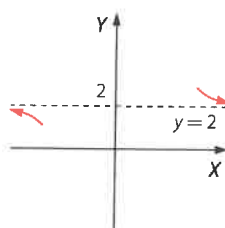
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow f(x) \text{ ten unha asíntota horizontal en } y = 2.$$

SEGUNDO. Para determinar a situación da rama infinita con respecto á asíntota, calculamos o signo de $f(x) - k$ para valores de x moi grandes e moi pequenos.

$$f(x) - k = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x} - 2 = \frac{6x + 1}{x^2 - 3x}$$

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{6x + 1}{x^2 - 3x} > 0 \rightarrow f(x) \text{ por enriba da asíntota}$$

$$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{6x + 1}{x^2 - 3x} < 0 \rightarrow f(x) \text{ por debaixo da asíntota}$$



Calculadora



Para saber como se comporta a función cando $x \rightarrow +\infty$, damos valores moi grandes a x .

$$x = 1.000 \rightarrow \frac{6 \cdot 1.000 + 1}{1.000^2 - 3 \cdot 1.000} > 0$$

Facemos o mesmo cando $x \rightarrow -\infty$.

Unha función $f(x)$ ten unha **asíntota oblicua** en $y = mx + n$ se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$$

Faino así

COMO CALCULAMOS AS ASÍNTOTAS OBLICUAS DUNHA FUNCIÓN

Estuda se a función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ ten unha asíntota oblicua.

PRIMEIRO. Calculamos $\frac{f(x)}{x}$. Neste caso, resulta: $\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2 + 1}{x - 2}}{x} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

SEGUNDO. Calculamos o límite desta expresión cando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1$$

TERCEIRO. Se o resultado é un número distinto de 0, calculamos o límite de $f(x) - mx$.

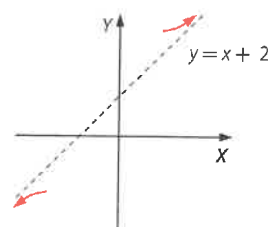
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x - 2} = 2$$

Por tanto, $f(x)$ ten unha asíntota oblicua que é $y = x + 2$.

Decátate



Ao igual que na asíntota horizontal, para determinar a posición das ramas infinitas con respecto á asíntota oblicua, calculamos o signo de $f(x) - (mx + n)$ cando $x \rightarrow +\infty$ e cando $x \rightarrow -\infty$.



ACTIVIDADES

27 Pode ocorrer que unha función teña unha asíntota horizontal e outra oblicua cando $x \rightarrow +\infty$?

Razoa a resposta.

28 Calcula as súas asíntotas e representa as funcións.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

9 Continuidade dunha función

Non esquezas



Unha función é **continua** nun intervalo se é continua en todos os puntos do intervalo.

Unha función $f(x)$ é **continua** nun punto $x = a$ se se cumpre que:

- 1.º Existe $f(a)$.
- 2.º Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- 3.º Cúmprese que $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Se unha función non é continua nun punto, dicimos que a función presenta unha **descontinuidade** nese punto.

Continuidade nas funcións elementais

As funcións elementais presentan descontinuidades nos puntos nos que non están definidas.

- As **funcións polinómicas** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- As **funcións racionais** non son continuas nos puntos que anulan o denominador.
- As **funcións con radicais** de índice par non existen nos valores que fan o radicando negativo. Se o índice é impar, son continuas.
- As **funcións exponenciais** son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- As **funcións logarítmicas** non son continuas nos puntos nos que a expresión da que queremos calcular o logaritmo se converte en cero ou nun número negativo.
- Das **funcións trigonométricas**, a única función que non é continua é $f(x) = \tan x$, xa que non existe en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Faino así

COMO ESTUDAMOS A CONTINUIDADE DUNHA FUNCIÓN

Estuda a continuidade destas funcións.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

PRIMEIRO. Determinamos os puntos nos que a función non está definida.

a) Non está definida cando o denominador é cero: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

b) Non está definida cando o radicando é negativo: $1 - x < 0 \rightarrow x > 1$

SEGUNDO. A función presenta descontinuidades nos puntos que calculamos e é continua no resto.

a) $f(x)$ é continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) $f(x)$ é continua en $(-\infty, 1]$.

ACTIVIDADES

29 Estuda a continuidade destas funcións.

a) $f(x) = x^{-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$

c) $f(x) = \ln(1 - x^2)$

30 Calcula m e n para que a función $f(x)$ sexa continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ mx + n & \text{se } 1 < x < 3 \\ 4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

10 Tipos de descontinuidade

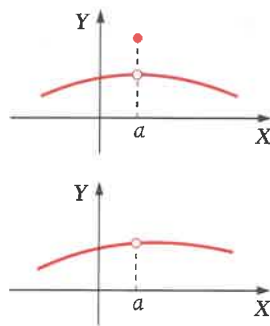
Descontinuidade evitable

Prodúcese cando existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, pero ocorre unha destas condicións.

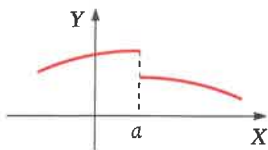
- Non coincide co valor da función nese punto.

$$f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

- A función non está definida no punto.



Descontinuidade de salto finito



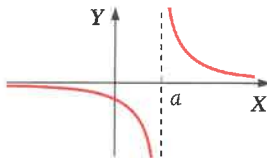
Prodúcese cando non existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ debido a que, aínda que existen os límites laterais, estes non coinciden.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Descontinuidade de salto infinito

Un ou os dous límites laterais son infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$



Decátate

- A descontinuidade evitable chámase así porque, redefinindo o valor da función nese punto, a función é continua.
- A descontinuidade de salto finito é frecuente nas funcións definidas a anacos, nos puntos nos que a función cambia a súa expresión alxébrica.
- Na descontinuidade de salto infinito existe unha asíntota vertical en $x = a$.

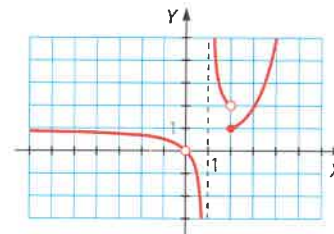
Exemplo

- 14 Estuda a continuidade e clasifica os puntos de descontinuidade desta función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ x(x-1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Esta función presenta descontinuidades en $x = 0$, en $x = 1$ e en $x = 2$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(x-1)} = 0$, pero non existe $f(0) \rightarrow$ A descontinuidade é evitable; $f(x)$ sería continua en $x = 0$, definindo $f(0) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x(x-1)} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x(x-1)} = +\infty \rightarrow$ A descontinuidade é inevitable, de salto infinito; $f(x)$ ten unha asíntota vertical en $x = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x(x-1)} = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x + 5) = 1 \rightarrow$ A descontinuidade é inevitable, de salto finito; en $x = 2$, a función cambia a súa expresión alxébrica.



Esta función presenta os tres tipos de descontinuidades.

ACTIVIDADES

- 31 Estuda a continuidade da función que asigna a cada número a súa parte enteira.

$$y = [x]$$

Especifica os tipos de descontinuidades que presenta esta función.

- 32 Estuda a continuidade destas funcións.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x < 4 \\ 5 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

Límite dunha sucesión

1. COMO SE CALCULA O LÍMITE DUN COCIENTE DE POLINOMIOS CON RADICAIS

15 Calcula os seguintes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^5 + 1}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2 + 1}}{4n + 5}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 4}}{\sqrt{n + 1}}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Determináse o grao dos polinomios do numerador e do denominador, tendo en conta que cando hai un polinomio baixo un radical, o seu grao é o grao do polinomio dividido entre o índice do radical.

- a) Numerador $\rightarrow 3n$ Grao = 1
 Denominador $\rightarrow \sqrt{n^5 + 1}$ Grao = $\frac{5}{2}$
- b) Numerador $\rightarrow \sqrt{5n^2 + 1}$ Grao = $\frac{2}{2} = 1$
 Denominador $\rightarrow 4n + 5$ Grao = 1
- c) Numerador $\rightarrow \sqrt[3]{n^2 - 4}$ Grao = $\frac{2}{3}$
 Denominador $\rightarrow \sqrt{n + 1}$ Grao = $\frac{1}{2}$

SEGUNDO. Compáranse os graos obtidos para aplicar os resultados coñecidos na resolución de límites de cocientes de polinomios.

- a) Grao do numerador < Grao do denominador

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^5 + 1}} = 0$$

- b) Grao do numerador = Grao do denominador

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2 + 1}}{4n + 5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

- c) Grao do numerador > Grao do denominador

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 4}}{\sqrt{n + 1}} = +\infty$$

2. COMO SE RESOLVE A INDETERMINACIÓN 1^∞

NOS LÍMITES DO TIPO $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)^{R(n)}$

16 Calcula: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+2}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Determina se o límite presenta o tipo de indeterminación 1^∞ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+2)} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

SEGUNDO. Súmase 1 e réstase 1 dentro da paréntese.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+1}{n-1} - 1\right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}+1}{n-1}\right)^{n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n+2}$$

TERCEIRO. Pásase o numerador da fracción ao denominador.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n+2}$$

CUARTO. Multiplícase o expoñente polo denominador que se obtivo e polo seu inverso.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot (n+2)}$$

QUINTO. Tómasse a parte do expoñente necesaria para formar a sucesión cuxo límite será e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2(n+2)}{n-1}}$$

SEXTO. Resólvese o límite tendo en conta as operacións con límites.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{n-1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{n-1}} = e^2$$

Límite dunha función nun punto

1. COMO SE CALCULA O LÍMITE DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO

17 Calcula os seguintes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 16}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Substitúese x polo punto no que se quere calcular o límite.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 16} = \sqrt{3^2 + 16} = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x - 4} = \frac{4^2}{4 - 4} \rightarrow \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - 9} = \frac{-3 + 3}{(-3)^2 - 9} \rightarrow \frac{0}{0}$

SEGUNDO. Compróbase se o resultado obtido é un número, é ∞ ou é unha indeterminación. En cada caso, procédese dun modo diferente.

- Se o resultado é un número, o límite está resolto.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 16} = 5$

- Se o resultado é ∞ , é necesario calcular os límites pola dereita e pola esquerda.

b) Se $x = 3,99 \rightarrow \frac{x^2}{x - 4} = \frac{3,99^2}{3,99 - 4} < 0$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2}{x - 4} = -\infty$

Se $x = 4,01 \rightarrow \frac{x^2}{x - 4} = \frac{4,01^2}{4,01 - 4} > 0$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2}{x - 4} = +\infty$

Por tanto, non existe $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x - 4}$.

- Se o resultado é unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, resólvese factorizando os polinomios.

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\cancel{x + 3}}{(\cancel{x + 3})(x - 3)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{-3 - 3} = -\frac{1}{6}$

2. COMO SE CALCULAN LÍMITES DE COCIENTES DE POLINOMIOS

18 Calcula os seguintes límites de cocientes de polinomios.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 6}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 6}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Estúdase se o denominador da fracción alxébrica se anula no punto en que se quere calcular o límite.

- a) Se $x = 2 \rightarrow$ Denominador: $x - 3 \neq 0$
- b) Se $x = 3 \rightarrow$ Denominador: $x - 3 = 0$
- c) Se $x = 3 \rightarrow$ Denominador: $x^2 - 9 = 0$

SEGUNDO.

- Se o denominador non se anula, substitúese ese punto na función e calcúlase o resultado.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 6}{x - 3} = \frac{2 + 6}{2 - 3} = -8$

TERCEIRO.

- Se o denominador se anula, compróbase se tamén se anula o numerador.
 - b) Se $x = 3 \rightarrow$ Denominador: $x - 3 = 0$
Numerador: $x + 6 \neq 0$
 - c) Se $x = 3 \rightarrow$ Denominador: $x^2 - 9 = 0$
Numerador: $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Se o numerador non se anula, o límite é ∞ .

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 6}{x - 3} = \frac{9}{0} = +\infty$

- Se o numerador tamén se anula obtense unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Para resolver este tipo de indeterminacións divídese entre $(x - c)$, sendo c o punto en que se quere calcular o límite.

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3) : (x - 3)}{(x^2 - 9) : (x - 3)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{3 + 1}{3 + 3} =$
 $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

PROBLEMAS RESOLTOS

3. COMO SE CALCULAN LÍMITES NUN PUNTO DE COCIENTES DE POLINOMIOS CON RADICAIS

19 Calcula este límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Estúdase se o límite dá unha indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} = \frac{\sqrt{3+6} - 3}{3-3} \rightarrow \frac{0}{0}$$

SEGUNDO. Para resolver a indeterminación, multiplícanse o numerador e o denominador polo conxugado do polinomio que ten a raíz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+6) - 3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ramas infinitas. Asíntotas

1. COMO SE REPRESENTA GRAFICAMENTE UNHA FUNCIÓN, COÑECENDO AS SÚAS ASÍNTOTAS E OS SEUS PUNTOS DE CORTE

20 Debuxa a gráfica dunha función que ten:

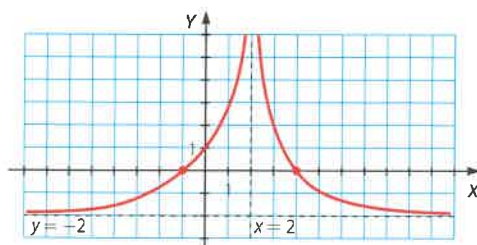
- Unha asíntota horizontal en $y = -2$.
- Cando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, a función está por enriba da asíntota.
- Corta o eixe X nos puntos -1 e 4 .
- Ten unha asíntota vertical en $x = 2$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Represéntanse as asíntotas e os puntos de corte nos eixes de coordenadas.

SEGUNDO. Represéntase a información que se dá sobre as súas ramas infinitas.

TERCEIRO. Únense as ramas infinitas cos puntos de corte mediante curvas.



2. COMO SE ESTUDA A EXISTENCIA DE ASÍNTOTAS NUNHA FUNCIÓN

21 Determina se a función $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$ ten asíntotas e calcúlalas.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Se o resultado é un número, existe unha asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9}{x} = \infty \rightarrow \text{Non ten asíntotas horizontais.}$$

SEGUNDO. Estúdanse os puntos en que a función non está definida e calcúlase o seu límite. Se este límite é ∞ , existe unha asíntota vertical. Neste caso, determínase a situación da rama infinita con respecto á asíntota.

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x} \rightarrow \text{Non está definida para } x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 9}{x} = \frac{9}{0} = +\infty \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

$$\text{Se } x = -0,01 \rightarrow \frac{x^2 + 9}{x} < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 9}{x} = -\infty$$

$$\text{Se } x = 0,01 \rightarrow \frac{x^2 + 9}{x} > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 9}{x} = +\infty$$

TERCEIRO. Se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, calcúlase

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$. Se este límite é tamén un número, existe unha asíntota oblicua e determínase a situación da rama infinita. En caso contrario, non existe.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 9}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9}{x^2} = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 9}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x} = 0$$

Ten unha asíntota oblicua en $y = x$.

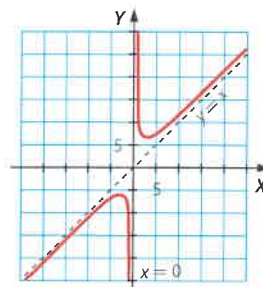
Como $f(x) - x = \frac{9}{x}$, resulta:

$$x = 1.000 \rightarrow \frac{9}{x} > 0$$

Así, se $x \rightarrow +\infty$, a gráfica está por enriba da asíntota.

$$x = -1.000 \rightarrow \frac{9}{x} < 0$$

Así, se $x \rightarrow -\infty$, a gráfica está por debaixo da asíntota.



Continuidade dunha función

1. COMO SE ESTUDA A CONTINUIDADE NUNHA FUNCIÓN DEFINIDA A ANACOS

- 22 Estuda a continuidade desta función, e determina os tipos de discontinuidade que presenta.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + 14 & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ \sqrt{x^2 + 16} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Estúdase a continuidade das distintas funcións no intervalo en que están definidas.

Se $x \leq 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x+3}$ é unha función racional.

Non está definida cando $x+3 = 0 \rightarrow x = -3$.

$f(x)$ ten unha discontinuidade en $x = -3$ de salto infinito porque os límites laterais son ∞ .

Se $0 < x \leq 3 \rightarrow f(x) = -x^2 + 14$ é unha función polinómica. Sempre está definida.

Se $x > 3 \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ é unha función radical de índice par. Non está definida cando o radicando é negativo. Como $x^2 + 16$ é sempre positivo, $f(x)$ sempre está definida.

SEGUNDO. Estúdase a continuidade nos puntos en que a función pasa dunha expresión alxébrica a outra. Para iso, calcúlanse os límites pola dereita e pola esquerda neses puntos.

Para $x = 0$:

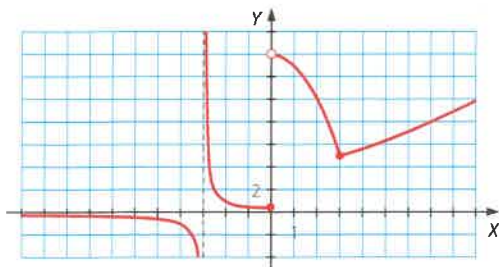
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 14) = 14$$

$f(x)$ ten unha discontinuidade en $x = 0$ de salto finito, porque existe $f(0) = \frac{1}{3}$, pero non existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Para $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 + 14) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 + 16} = 5$$

$f(x)$ é continua en $x = 3$.



2. COMO SE DETERMINA UN PARÁMETRO PARA QUE UNHA FUNCIÓN DEFINIDA A ANACOS SEXA CONTINUA

- 23 Calcula k para que a función sexa continua.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x < 2 \\ kx + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Determináanse os puntos en que a función pode presentar discontinuidades.

A función só presenta problemas en:

- $x = 3$, porque este punto anula o denominador de $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Como esta parte da función corresponde a $x < 2$, o punto $x = 3$ non é un punto de discontinuidade.

- $x = 2$, porque neste punto a función pasa dunha expresión alxébrica a outra.

SEGUNDO. Nos puntos en que se pode presentar discontinuidade, calcúlanse $f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Neste caso; estúdase o punto $x = 2$.

$$f(2) = k \cdot 2 + 1 = 2k + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{2^2 - 9}{2 - 3} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (kx + 1) = k \cdot 2 + 1 = 2k + 1$$

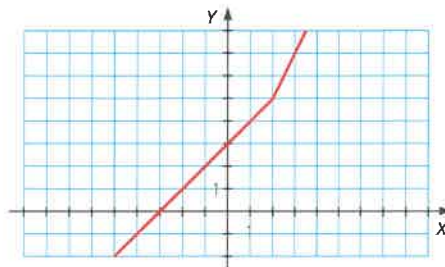
TERCEIRO. Calcúlase k para que a función en $x = a$ e o límite nese punto coincidan, isto é, $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$2k + 1 = 5 \rightarrow k = 2$$

Para que a función sexa continua en todos os seus puntos, débese definir como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



ACTIVIDADES

Límite dunha sucesión

- 33** Calcula o termo xeral das sucesións cuxos primeiros
 ○○○ termos son:

a) $1, -1, 1, -1, \dots$ b) $1, 2, 4, 8, \dots$

- 34** Con axuda da calculadora, calcula o límite desta sucesión
 ○○○ definida de forma recorrente.

$$a_1 = 1 \quad a_n = \frac{3a_{n-1} + 2}{4a_{n-1} + 3}$$

- 35** Calcula o límite da seguinte sucesión con axuda
 ○○○ da táboa.

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{2n + 1}$$

n	5	50	500	5.000	50.000
a_n					

- 36** Comproba a igualdade con axuda da táboa.

○○○ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 6n}{2n + 1} = -3$

n	5	50	500	5.000	50.000
a_n					

Indeterminacións

- 37** Calcula os seguintes límites de sucesións.

○○○

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + n}{n - 3} - \frac{n^2 + 2}{n - 1} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 2}{3n} - \frac{n^2}{n + 3} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n - \frac{4n^2 - 2n + 7}{2n + 1} \right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 + 1}{2n + 4} - \frac{9n^2 - 5}{3n + 6} \right)$

- 38** Obtén os resultados de:

○○○

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n - 3}}{3n + 1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 3n + 2}{\sqrt{n^3 + 2n^4}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - 2n + 6n^3}}{n^2 - n - 6}$

- 39** Determina os límites.

○○○

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n - 1})$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n + 31} - 3n)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n - \sqrt{16n^2 + 2})$

Límite dunha función no infinito

- 40** Calcula os seguintes límites.

○○○

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 2x^2 - 3$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2 + 2x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x|$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x$

- 41** Representa as funcións.

○○○ $f(x) = 2x - 3$ $g(x) = x^2 + 2x - 1$

A partir da gráfica, calcula os seguintes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

- 42** Calcula.

○○○

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x)$

- 43** Determina os límites.

○○○

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^3 + x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3)$

- 44** Calcula os límites.

○○○

a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} |-2t^2 + 5|$

b) $\lim_{t \rightarrow -\infty} |t^3 + 6t + 3|$

- 45** Calcula os límites, e comproba o resultado
 ○○○ coa túa calculadora.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x - 6x^4 + x^3}{3x + 2x^2 - 3}$

- 46 Calcula estes límites con axuda da calculadora, e comproba o resultado obtido.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 7}{2x^2 + x + 1}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + x - 2x^3}{2x^2 - 3x + 11}$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 10x}{-x^2 + 2x^3 - x + 3}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 3x + 21}{5x^2 - 4x^3 + 2x}$

- 47 Escribe, en cada caso, un polinomio, $P(x)$, para obter os resultados indicados cando calculamos o límite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 + 6x - 1}{P(x)}$$

- a) 4 c) 0 e) $-\infty$
 b) 5 d) $+\infty$ f) 1

- 48 Encontra o valor de:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3})$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 4})$

- 49 Calcula os límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{x} + \frac{3 - x^2}{x + 2} \right)$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x} - \frac{2x^2 + 1}{2x - 4} \right)$

- 50 Obtén os resultados de:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-3x + 6x^2}}{x^2 + 2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 5x^3 - 2x^2}}{3x - 1}$

- 51 Determina.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

Límite dunha función nun punto

- 52 Determina os límites, calculando previamente os seus límites laterais.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 5}$ d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 3} (1 + 2x)^x$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \ln \left(\frac{x + 1}{3} \right)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5}{\sqrt{4 + x}}$

- 53 Con axuda da calculadora, completa a táboa e comproba que se $f(x) = \frac{x^2}{x - 3}$, entón $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -0,5$.

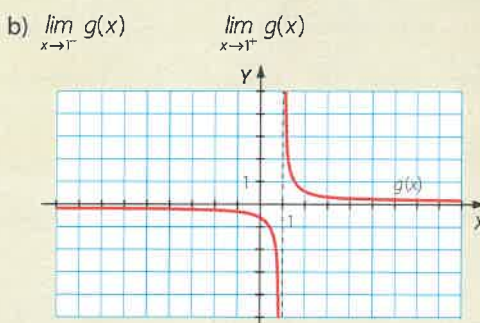
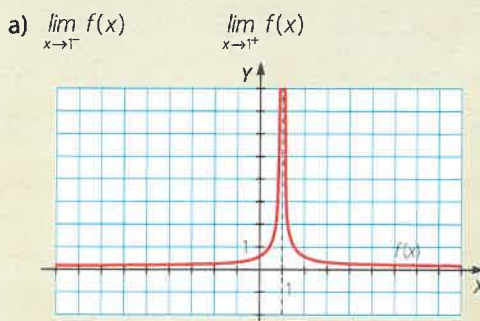
x	0	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)							

- 54 Calcula os límites indicados na función.

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{se } x < 4 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 6^-} g(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} g(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$

- 55 Observa as gráficas das funcións $f(x)$ e $g(x)$, e calcula os seguintes límites.



- 56 Determina os límites, e se é preciso, calcula os límites laterais.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{9 - x^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$

- 57 Calcula os límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x$ c) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \sin x$
 b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{\sin x}$

ACTIVIDADES

58 Dada a función $f(x)$ definida a anacos, encontra os límites.

●●●

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x < -2 \\ \frac{9}{x-1} & \text{se } -2 \leq x < 3 \\ x^2+6x-32 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

59 Calcula os límites laterais e o seguinte límite.

●●●

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}$$

60 Resolve os límites.

●●●

- a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16}$
 f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x}$

61 Dada a función:

●●●

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$$

determina os seguintes límites.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Asíntotas dunha función

62 Encontra o límite da función cando x tende a 0 e cando x tende a 3.

●●●

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}$$

Especifica o valor dos límites laterais, se é necesario.

63 Determina o límite, e comproba o resultado

●●●

coa calculadora.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 4x}{x + 2} - 3x \right)$$

64 Observa as táboas de valores da función.

●●●

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7}$$

x	1	10	100	1.000	10.000
f(x)	-0,11	1,69	1,974	1,9975	1,99975

x	-1	-10	-100	-1.000	-10.000
f(x)	1	2,17	2,024	2,0025	2,00025

É certo que $y = 2$ é unha asíntota? Cando x tende a $+\infty$, está a función por enriba ou por debaixo da asíntota? Que sucede cando x tende a $-\infty$?

65 Decide se a función $y = \frac{3-2x}{x+1}$ ten alguna asíntota

●●●

horizontal, e sitúa a función con respecto a esa asíntota.

66 Observa as táboas de valores da función.

●●●

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999
f(x)	-7	-17	-97	-997	-9.997	-99.997

x	3,0001	3,001	3,01	3,1	3,5
f(x)	100.003	10.003	1.003	103	23

É certo que $x = 3$ é unha asíntota vertical? Cando x tende a 3 pola esquerda, a rama infinita da función tende a $+\infty$ ou $-\infty$? Que sucede cando x tende a 3 pola dereita?

67 Decide se a función $y = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ ten algunha

●●●

asíntota vertical, e estuda as súas ramas infinitas próximas a esas asíntotas.

68 Observa a táboa de valores da función.

●●●

$$f(x) = \frac{4x^2 + 6x}{2x - 3}$$

x	10	100	1.000	10.000
f(x)	27,06	206,09	2.006,009	20.006,0009

Esta é a táboa de valores da recta $y = 2x + 6$.

x	10	100	1.000	10.000
y = 2x + 3	26	206	2.006	20.006

É certo que a recta é unha asíntota da outra función? Que posición teñen cando x tende a $+\infty$? Investiga a posición relativa de ambas cando x tende a $-\infty$.

- 69** Comproba se a recta $y = x + 3$ é unha asíntota oblicua da función $y = \frac{x^2 + 5x}{x + 2}$. En caso afirmativo, decide a posición que ocupa unha respecto da outra.

- 70** Calcula as asíntotas oblicuas das funcións e a súa posición relativa respecto delas.

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 4}{x - 1}$ b) $f(x) = \frac{2x^2 + 4}{2 + x}$

- 71** Determina todas as asíntotas das funcións, e sitúa as súas ramas infinitas.

a) $f(x) = \frac{2 - 6x}{x + 3}$ d) $f(x) = \frac{3}{x - 1}$
b) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}$ e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6}$
c) $f(x) = \frac{4x^3}{x - 5}$ f) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$

- 72** Obtén todas as ramas infinitas e as asíntotas das funcións, e decide a posición que teñen entre si.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3}$
b) $f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8}$
c) $f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8}$
d) $f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8}$

- 73** Calcula as asíntotas destas funcións, e a posición das ramas infinitas.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x + 3}$
b) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + x - 6}$
c) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2}$
d) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4}$
e) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x - 2)^2}$
f) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4}$

- 74** Calcula as ramas infinitas e as asíntotas das funcións.

a) $y = x^2 + 5x - 1$ c) $y = \log x$
b) $y = 2^x - 1$ d) $y = tx$

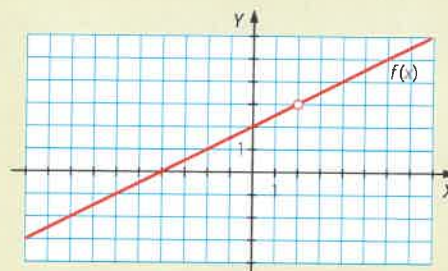
- 75** Encontra as asíntotas das funcións.

a) $y = \frac{|2x - 3|}{x}$ b) $y = \frac{2x}{\sqrt{4 - x^2}}$

Continuidade dunha función. Tipos

- 76** Observa a gráfica da función e determina estes límites.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



Estuda a continuidade da función $f(x)$.

- 77** Completa a táboa para a función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

x	2,5	2,9	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
f(x)							

Comproba que o seu límite, cando x tende a 3, é:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$

Canto vale $f(3)$? Fai unha representación da función. Que diferenza hai entre as gráficas de $f(x)$ e de $y = x + 1$?

- 78** Debuxa unha función que sexa continua, salvo en $x = -1$, que teña un salto infinito e que teña en $x = 3$ un salto finito.

- 79** Debuxa unha función cuxo dominio sexa $[0, +\infty)$, e que presente un punto de discontinuidade evitable en $x = 4$.

- 80** Determina os puntos de discontinuidade das seguintes funcións.

a) $y = \frac{1}{x + 3}$ e) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 7x + 12}$
b) $y = \frac{x + 2}{x^2 - x + 12}$ f) $y = \sqrt{x - 5}$
c) $y = \sqrt{4 + x}$ g) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$
d) $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$ h) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$

ACTIVIDADES

- 81** Estuda a continuidade das funcións en $x = 3$, e se presentan discontinuidade, decide de que tipo de discontinuidade se trata.

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x < 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x-1} & \text{se } x < 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \\ x-2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \ln(x-2) & \text{se } x < 3 \\ -2 & \text{se } x = 3 \\ \sin(x-3) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x-3} & \text{se } x < 3 \\ x-15 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{se } x \neq 3 \\ -2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

- 82** Que valor debe tomar a para que as funcións sexan continuas?

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & \text{se } x < -2 \\ a & \text{se } x = -2 \\ -2x-7 & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{se } x \leq -2 \\ ax-2 & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} tx - \frac{\pi}{2x} & \text{se } x \leq -2 \\ \log(ax+7) & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

- 83** Razoa se a seguinte función é continua en $x = 3$ e en $x = 0$.

$$y = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{se } x \geq 3 \\ \frac{12}{x} + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

- 84** Estuda a continuidade en todo o dominio das funcións. Determina os puntos de discontinuidade que presenta cada unha delas.

- $y = \sin(x + \pi)$
- $y = \ln(x + e)$
- $y = tx \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$
- $y = 2^{x-3}$

- 85** Investiga se as funcións son continuas.

$$a) f(x) = \begin{cases} \log(x+7) & \text{se } x < 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \\ \frac{5}{x+2} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3x+5}{2}} & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ x+1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2-x} & \text{se } x < 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \\ 2^{x+1} + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- 86** Estuda a continuidade da seguinte función.

$$g(t) = \begin{cases} \log(t+7) & \text{se } t < 3 \\ 2 & \text{se } t = 3 \\ \frac{4}{7-t} & \text{se } t > 3 \end{cases}$$

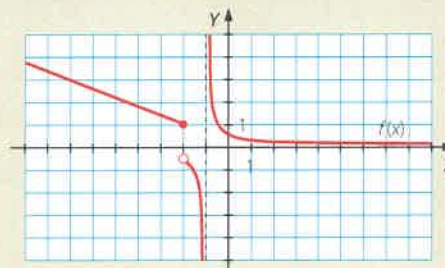
Se presenta puntos de discontinuidade, estuda o límite cando t tende a eles e decide que tipos de discontinuidades son.

- 87** Estuda a continuidade das funcións.

- $y = [x]$ (Parte enteira de x)
- $y = \frac{x}{|x|}$
- $y = |x^2 - 1|$
- $y = \frac{1}{|x^2 - 1|}$

Problemas con límites

- 88** Observa a gráfica da función e determina os límites que se indican.



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

89 Calcula os límites indicados na función definida a anacos.

•••

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 1 & \text{se } x < -1 \\ 3x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

90 Calcula $\lim_{x \rightarrow 3} (f \circ g)$, sendo as funcións:

•••

$$g(x) = x + 2 \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 10x}$$

91 Fai a gráfica aproximada dunha función que cumpra as seguintes condicións.

•••

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

92 Realiza a gráfica aproximada dunha función que cumpra as seguintes condicións.

•••

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

93 Constrúe a gráfica aproximada dunha función que cumpra estas condicións.

•••

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$

94 Representa tres funcións que cumpran que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ e cada unha destas condicións.

•••

- a) $f(3) = 5$ b) $f(3)$ non existe. c) $f(3) = 2$

95 Debuxa unha función continua que cumpra que $f(x)$ é negativa se $x > 3$ e é positiva se $x < 3$.

•••

- a) Canto vale $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$? E $f(3)$?
b) Hai un posible resultado? Razona a resposta.

96 Calcula as asíntotas destas funcións.

•••

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} \quad g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2}$$

Razona as diferenzas entre ambas as funcións.

97 Escribe unha función racional para cada caso.

•••

- a) Que teña $x = 2$ e $x = -3$ como únicas asíntotas.
b) As súas únicas asíntotas son $x = -2$ e $y = 3$.
c) As súas asíntotas son $x = 4$ e $y = 2x - 1$.

98 Calcula o valor de a para que o límite teña valor

•••

$$\text{finito: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax.$$

Con ese valor de a , calcula b para que se verifique que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 1} - ax - b = 0$$

Que relación existe entre a función $y = \frac{2x^2 + 3}{x - 1}$ e a recta $y = ax + b$?

99 Calculouse que a poboación de raposos nunha leira

•••

se rexe pola fórmula $z = 100 \frac{6t^2 + 3}{2 + t^2}$, onde z

representa o número de raposos e t é o tempo transcorrido, en meses.

O veterinario da leira observou que, nos primeiros seis meses, a poboación aumentou. Investiga se o crecemento será indefinido, se tenderá a estabilizarse a poboación ou se tenderá a diminuír.



100 A famosa fórmula $M = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ débese a Einstein,

•••

e expresa a masa M dun corpo en función da súa velocidade v , sendo c a velocidade da luz (300.000 km/s).

Calcula o límite da masa M cando v tende a c . Á vista dese resultado, cres que un corpo pode alcanzar esa velocidade?

101 Representa mediante unha función definida a anacos a tarifa dun aparcadoiro.

•••

APARCADOIRO

Horario: de 10:00 a 22:00 horas

Tarifas:

- Cada hora ou fracción: 2 €
- Máis de 5 horas: 10 €
- Estancia máxima: 12 horas

- a) Estuda a súa continuidade.
b) Clasifica os puntos de discontinuidade, se os tivese.

PARA FINALIZAR...

Reflexiona sobre a teoría

- 102** Calcula o valor de k para que o seguinte límite sexa un número real: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + kx + 2}{x^2 - 4}$

Para o valor de k obtido, canto vale o límite?

- 103** Calcula os límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \cos x$

IDEA CLAVE

Ten en conta que, aínda que non saibas o valor, si sabes entre que valores está.

- 104** Que ocorrerá coas raíces da ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se o coeficiente a tende a cero e os coeficientes b e c son constantes, sendo $b \neq 0$?

IDEA CLAVE

Calcula o límite de cada unha das raíces cando $a \rightarrow 0$.

- 105** Comproba que $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ non existe.

IDEA CLAVE

Compara os límites laterais cando $x \rightarrow 0$.

- 106** Estuda a continuidade de cada unha das seguintes funcións.

a) $y = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 0 \\ 5^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 5^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ 2^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

IDEA CLAVE

O punto dubidoso é $x = 0$. No primeiro caso é necesario calcular os límites laterais en $x = 0$; no segundo, a función é igual á esquerda e á dereita de cero.

Pensa un pouco máis

- 107** Demostra que a recta de ecuación $y = \frac{b}{a}x$ é unha asíntota da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Análise do enunciado

Os coeficientes da recta relaciónanse cos coeficientes da hipérbole.

Deseño da resolución

Formúlanse as condicións necesarias para que haxa unha rama asíntótica.

Clave para resolver o problema

Despexa a variable y na hipérbole e comproba que ocorre coa diferenza entre estas dúas funcións e a recta cando $x \rightarrow \infty$.

- 108** Se medimos o ángulo x en radiáns, demostra que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Se o ángulo x se mide en graos sesaxesimais,

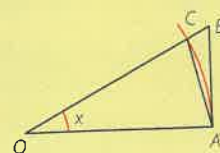
entón $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$.

Análise do enunciado

Temos que resolver unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$.

Deseño da resolución

A medida da lonxitude do arco está comprendida entre a medida dos segmentos AB e AC .



Clave para resolver o problema

A área do sector circular OAC está comprendida entre a área dos triángulos $\widehat{OAC}$ e $\widehat{OAB}$.