

LITERATURA E MATEMÁTICAS

A caricia do escorpión

Continuamos, pois, nese piso calamitoso de Delicias, achicando inundacións domésticas, martelando nos canos. Todos estes desaxustes crispábanme tanto coma a ela, pero a enerxía que consumiamos en combatelos librábanos de discutir outros problemas máis importantes. Ademais do seu amante e amigo, convertíame en enxesador, en fontaneiro, carpinteiro, electricista e non sei cantas cousas máis. [...] Resolvín un problema de unión de dous tubos en cruz sen saber nada do oficio, baseándome nos meus coñecementos de xeometría euclidiana e aplicando o teorema de Cavalieri. [...]

Dependíamos un do outro; ela de min para recompoñer os estragos e eu dela para ter unha misión con que contentala, ou, mellor dito, para contentar o meu amor por ela e así, de volta, quererme máis. Xa se sabe: un hipoteca o amor a si mesmo a que a persoa amada estea de acordo en concedercho. Antepónse a convicción de que a outra persoa está a gusto con un para poder sentirse el tamén cómodo. Cando amas non unes o teu corazón: divídelo. [...]

Segundo un baixa por Delicias, para entrar na nosa antiga rúa hai que atravesar a praza de Luca de Tena, dobrando unha esquina á esquerda, e é aí onde un se atopa co enorme respiradoiro do suburbano. Para ser exactos, non é unha esquina, senón un chafrán (triedro no cal dous planos normalmente perpendiculares son cortados por unha intersección). A placa metálica que airea as emanacións do metro componse de cinco celas de ancho por nove de longo, dun metro cadrado cada unha (en total, corenta e cinco metros cadrados). É difícil eludir ese paso, posto que máis alá hai un xardín con árbores, a menos que un dea un rodeo polo seu lado máis longo, primeiro á esquerda e logo á dereita. O usual nestes casos é abreviar cruzando o respiradoiro pola súa diagonal. Candela, en cambio, percorre os dous catetos do triángulo rectángulo en vez da hipotenusa (a diagonal do rectángulo), cometendo así unha imperdoable infracción pitagórica. Máis que repugnancia ao aire que sae de alí, eu case creo que é por medo de que a placa ceda baixo o seu peso, ou algo. Unha manía coma calquera outra; as miñas son peores.

IGNACIO GARCÍA-VALIÑO

**Vectores. Operacións
con vectores**

Coordenadas dun vector

Produto escalar

Ecuacións da recta

**Posicións relativas
de dúas rectas**

**Distancias e ángulos
entre rectas**

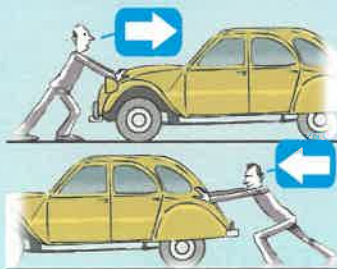
Calcula os módulos dos vectores que definen Candela e o seu mozo ao cruzar a placa metálica que airea as emanacións do metro.
Que relación existe entre eles?

Magnitudes escalares e vectoriais

As magnitudes que quedan definidas mediante un único número chámanse **magnitudes escalares**.

Nas **magnitudes vectoriais** non basta con dar un valor numérico para determinalas, senón que necesitamos coñecer a súa dirección e sentido.

Son magnitudes escalares a lonxitude, a masa, o tempo, a temperatura...



E son magnitudes vectoriais a velocidade, a forza...

O efecto dunha forza depende da dirección en que a apliquemos.

Así, non é o mesmo desprazarse a unha velocidade nunha dirección ou noutra.

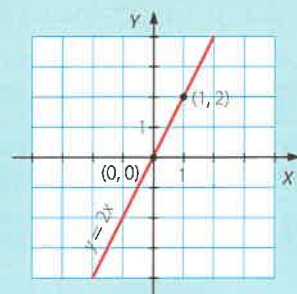
Repasa

1 Pon varios exemplos de magnitudes escalares e vectoriais.

Representación de rectas

Para representar unha recta hai que calcular dous dos seus puntos e unilos mediante unha liña recta.

Representamos a recta $y = 2x$.



• Para calcular dous puntos desta recta damos valores a x :

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$\text{Para } x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow (1, 2)$$

• Representamos os puntos $(0, 0)$ e $(1, 2)$ e unímolos mediante unha liña recta.

Repasa

2 Representa estas rectas.

a) $y = -2x$

c) $y = -x + 1$

e) $y = 2x - 2$

b) $y = \frac{x}{2}$

d) $y = \frac{-x - 1}{2}$

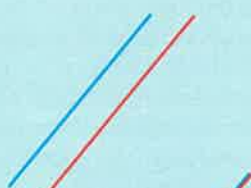
f) $y = \frac{x}{2} - 1$

Posicións relativas de dúas rectas no plano

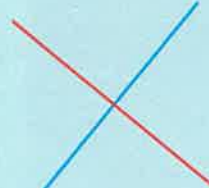
- **Paralelas:** non teñen ningún punto en común.
- **Coincidentes:** todos os seus puntos son comúns.
- **Secantes:** só teñen un punto en común.

Un caso particular das rectas secantes son as **rectas perpendiculares**, que son secantes e dividen o plano en catro partes iguais, é dicir, o ángulo que forman as dúas rectas ao cortarse é de 90° .

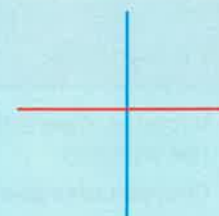
RECTAS PARALELAS



RECTAS SECANTES



RECTAS PERPENDICULARES



RECTAS COINCIDENTES



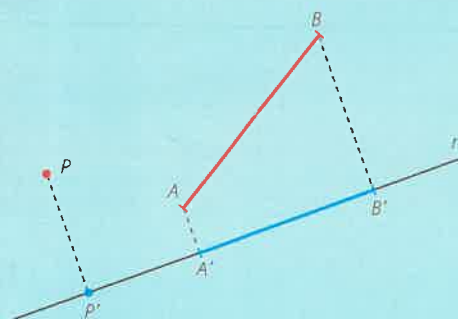
Repasa

3 Debuxa dúas rectas paralelas, r e s . Despois, traza unha perpendicular á recta r e outra á recta s . Como son as rectas que debuxaches?

Proxección dun punto e dun segmento sobre unha recta

Polo punto P trazamos a perpendicular á recta r , e obtense o punto P' . Este punto P' chámase **proxección ortogonal do punto P sobre a recta r** .

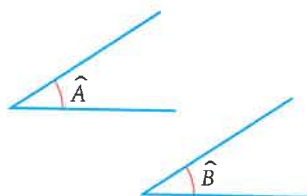
A proxección ortogonal do segmento AB sobre a recta r é o segmento $A'B'$, cuxos extremos son as proxeccións dos puntos A e B .



Repasa

- 4 Representa, nun sistema de eixes cartesianos, o punto $P(-1, 1)$ e a recta $y = x$, e determina a proxección ortogonal do punto sobre a recta.

Ángulos de lados paralelos



Os seus lados son paralelos, dous a dous.

Para entender a relación que existe entre dous ángulos de lados paralelos estudamos os casos que se poden presentar:

- Os dous ángulos de lados paralelos son agudos



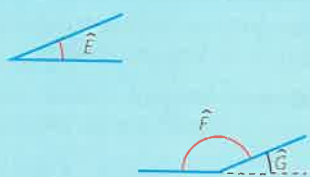
Os ángulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ teñen os lados paralelos e son agudos. Superpoñéndoos podemos ver que $\hat{A} = \hat{B}$. Os ángulos son iguais.

- Os dous ángulos de lados paralelos son obtusos



Os ángulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ teñen os seus lados paralelos e son obtusos. Superpoñéndoos podemos ver que $\hat{C} = \hat{D}$. Os ángulos son iguais.

- Os dous ángulos de lados paralelos son agudo e obtuso, respectivamente



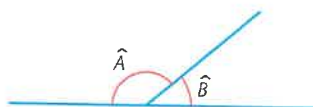
Os ángulos $\hat{E}$ e $\hat{F}$ teñen os lados paralelos, pero o ángulo $\hat{E}$ é agudo e $\hat{F}$ é obtuso.

Observa na figura que $\hat{E} = \hat{G}$, por ser dous ángulos agudos de lados paralelos, e que $\hat{F} + \hat{G} = 180^\circ$.

Do anterior resulta que $\hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$, é dicir, son ángulos suplementarios.

Repasa

- 5 Observa os seguintes ángulos e contesta.

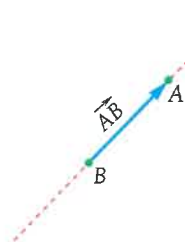


- Canto suman os ángulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$?
- Debuxa no teu caderno un ángulo igual a $\hat{A}$ e outro igual a $\hat{B}$.
- Que condicións cumpren os ángulos que debuxaches?

1 Vectores. Operacións

Un **vector** é un segmento orientado que queda determinado por dous puntos, A e B, e a orde destes. O primeiro dos puntos denomínase **orixe** e o segundo é o **extremo**, e escríbese $\overrightarrow{AB}$.

1.1. Elementos dun vector

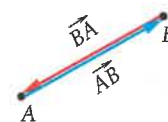


Módulo: é a lonxitude do segmento AB. Escríbese $|\overrightarrow{AB}|$.

Dirección: é a recta sobre a que está situado o vector. Dous vectores teñen a mesma dirección se están situados sobre a mesma recta ou sobre rectas paralelas.

Sentido: é a forma de percorrer o segmento AB, é dicir, de fixar cal dos puntos é a orixe e cal é o extremo.

Dous puntos determinan dous vectores, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, co mesmo módulo e dirección, pero con sentido oposto.

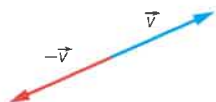


Dous **vectores** son **equivalentes** cando teñen o mesmo módulo, dirección e sentido.

Non esquezas



O oposto dun vector $\vec{v}$ é outro vector $-\vec{v}$ coa mesma dirección e módulo, pero con sentido contrario.



A suma dun vector e o seu oposto é o vector nulo, que é un vector de módulo 0, sen dirección nin sentido.

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

1.2. Suma e resta de vectores

A suma e a resta de dous vectores é outro vector.

Faino así

COMO SUMAMOS E RESTAMOS VECTORES GRAFICAMENTE

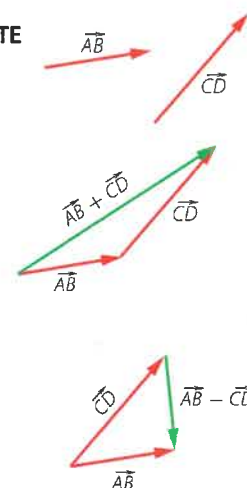
Calcula. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

a) **PRIMEIRO.** Para sumar dous vectores, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, tomamos un vector equivalente a $\overrightarrow{CD}$ que teña a orixe no extremo de $\overrightarrow{AB}$.

SEGUNDO. A suma é o vector do que a orixe é a orixe de $\overrightarrow{AB}$, e o seu extremo, o extremo de $\overrightarrow{CD}$.

b) **PRIMEIRO.** Para restar dous vectores, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, tomamos un vector equivalente a $\overrightarrow{CD}$ en que a orixe sexa a orixe de $\overrightarrow{AB}$.

SEGUNDO. A diferenza é o vector que ten a súa orixe no extremo de $\overrightarrow{CD}$, e o seu extremo, no extremo de $\overrightarrow{AB}$.



ACTIVIDADES

- 1 Copia estes vectores e calcula graficamente a súa suma e a súa diferenza.

$$\vec{u} + \vec{v} \quad \vec{u} - \vec{v}$$



- 2 Realiza as seguintes sumas de vectores.

- a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



1.3. Multiplicación dun vector por un número

O **produto** dun vector $\vec{v}$ por un número real k é outro vector $k \cdot \vec{v}$, que cumpre as seguintes propiedades.

- O seu módulo é k veces o módulo de $\vec{v}$.
- A súa dirección é a mesma que a de $\vec{v}$.
- O seu sentido é o de $\vec{v}$ se $k > 0$, e ten sentido contrario se $k < 0$.

Decátate



Se multiplicamos $\vec{v}$ por -1 obtemos o seu oposto: $-\vec{v}$.

$$-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v}$$

Faino así

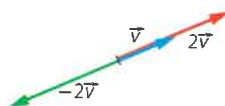
COMO MULTIPLICAMOS GRAFICAMENTE UN VECTOR POR UN NÚMERO REAL

Dado un vector $\vec{v}$, calcula $2\vec{v}$ e $-2\vec{v}$.

PRIMEIRO. Multiplicamos o módulo do vector por k .

SEGUNDO. Mantemos a orixe e a dirección do vector.

TERCEIRO. O sentido será igual se $k > 0$, e contrario, se $k < 0$.



1.4. Combinación lineal de vectores

Dados dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, chamamos **combinación lineal** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao vector $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, onde λ e μ son números reais.

Un vector $\vec{w}$ é combinación lineal doutros dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se existen dos números reais, λ e μ , tales que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Faino así

COMO EXPRESAMOS UN VECTOR COMO COMBINACIÓN LINEAL DOUTROS DOUS

Expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

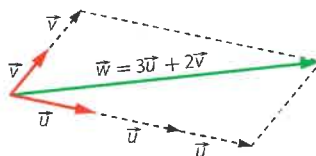


PRIMEIRO. Tomamos vectores equivalentes a $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que teñan a mesma orixe.

SEGUNDO. Trazamos as rectas que pasan por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

TERCEIRO. Desde o extremo de $\vec{w}$ trazamos paralelas a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A intersección das rectas determina $\lambda\vec{u}$ e $\mu\vec{v}$. Comparando o módulo de $\vec{u}$ co de $\lambda\vec{u}$ determinamos λ , e despois facemos o mesmo con $\vec{v}$ e $\mu\vec{v}$.

Neste caso, $\lambda = 3$ e $\mu = 2$.



Escribese así



Un vector exprésase utilizando a súa orixe e o seu extremo e poñendo unha frecha sobre eles, $\overrightarrow{AB}$, ou mediante unha letra minúscula, $\vec{v}$.

ACTIVIDADES

3 Copia os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, e realiza graficamente as seguintes operacións.

a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

b) $-\vec{c} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$

c) $\vec{b} + (\vec{c} + \vec{a})$



4 Escribe o vector $\vec{a}$ como combinación lineal dos vectores $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Expresa $\vec{b}$ en función de $\vec{a}$ e $\vec{c}$, e tamén $\vec{c}$ en función de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

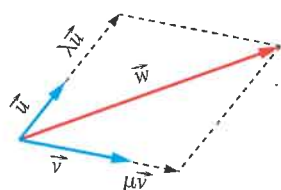
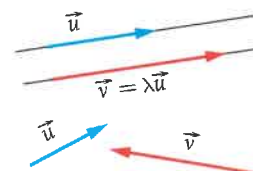


2 Bases

2.1. Vectores linealmente independientes

Un conxunto de vectores son **linealmente dependentes** se algún deles se pode expresar como combinación lineal dos demais. En caso contrario, dicimos que son **linealmente independentes**.

- Dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ coa mesma dirección son linealmente dependentes porque $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ teñen distinta dirección, son linealmente independentes, xa que un deles non se pode expresar como combinación lineal do outro.



- Se temos dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ con distinta dirección, calquera vector do plano, $\vec{w}$, pódese poñer como combinación lineal deles.

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

E, ademais, os números λ e μ son únicos.

2.2. Bases

Non esquezas



- Dada unha base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, dicimos que é unha **base ortonormal** cando:
 $|\vec{u}| = 1 \quad |\vec{v}| = 1$
 sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ perpendiculares.
- No plano, dous vectores con distinta dirección forman unha base.

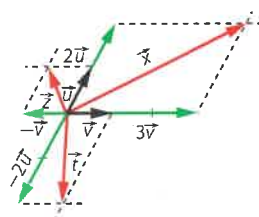
Dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forman unha **base** no plano se son linealmente independentes, e calquera vector se pode expresar como combinación lineal deles. Represéntase por $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Un vector $\vec{w}$ pódese poñer sempre como combinación lineal dos vectores da base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\} \rightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Os números (a, b) son as **coordenadas** de $\vec{w}$ respecto da base B .

Exemplo

- 1 Calcula as coordenadas destes vectores respecto da base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.



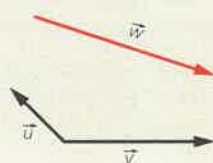
$$\vec{x} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \rightarrow \vec{x} = (2, 3)$$

$$\vec{z} = \vec{u} - \vec{v} \rightarrow \vec{z} = (1, -1)$$

$$\vec{t} = -2\vec{u} + \vec{v} \rightarrow \vec{t} = (-2, 1)$$

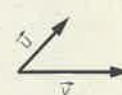
ACTIVIDADES

- 5 Comproba que os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forman unha base, e expresa o vector $\vec{w}$ en función deles.



- 6 Dada a base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:

- a) Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.
- b) Comproba que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forman unha base.
- c) Expresa $\vec{u}$ e $\vec{v}$ en combinación lineal de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

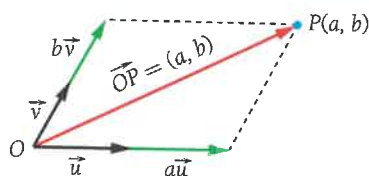


3 Coordenadas dun vector

3.1. Sistema de referencia

Un **sistema de referencia** no plano, $R = \{O, [\vec{u}, \vec{v}]\}$, está formado por un punto fixo O e unha base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Mediante un sistema de referencia, a cada punto P asóciase un vector $\vec{OP}$. As coordenadas do punto P son as coordenadas do vector $\vec{OP}$ respecto da base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.



3.2. Coordenadas dun vector

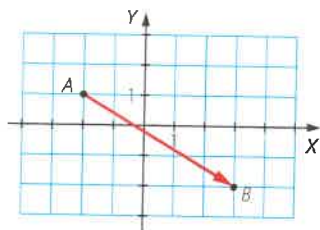
No sistema de referencia cartesiano, as **coordenadas** dun vector $\vec{AB}$ son as coordenadas do punto extremo menos as do punto orixe:

$$\left. \begin{array}{l} A(a_1, a_2) \\ B(b_1, b_2) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, o seu módulo é: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Exemplo

- 2 Calcula as coordenadas e o módulo deste vector.



$$\left. \begin{array}{l} A(-2, 1) \\ B(3, -2) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{AB} = (3 - (-2), -2 - 1) = (5, -3)$$

As coordenadas do vector $\vec{AB}$ son $(5, -3)$.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = 5,83$$

O módulo do vector $\vec{AB}$ é 5,83.

3.3. Vectores paralelos

Dous **vectores** son **paralelos** cando teñen a mesma dirección.

En coordenadas, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son paralelos se $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$.

Exemplo

- 3 Comproba que $\vec{u} = (-2, 8)$ é paralelo a $\vec{v} = (1, -4)$.

Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son paralelos, porque: $\frac{-2}{1} = \frac{8}{-4}$

ACTIVIDADES

- 7 Debuxa os puntos $A(2, 1)$ e $B(1, 2)$ e calcula.

- As coordenadas dos vectores $\vec{AB}$ e $\vec{BA}$.
- Os seus módulos.

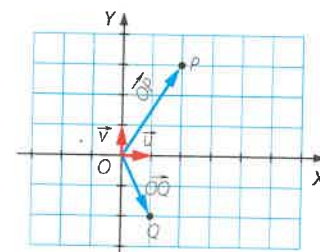
- 8 Encontra cales son vectores paralelos.

$$\begin{array}{lll} \vec{a} = (2, 1) & \vec{b} = (-2, -1) & \vec{c} = (-2, 1) \\ \vec{d} = (2, -1) & \vec{e} = (4, 2) & \vec{f} = (-6, 3) \end{array}$$

Decátate



$\{O, [\vec{u}, \vec{v}]\}$ é o sistema de referencia cartesiano.



$$\vec{OP} = 2\vec{u} + 3\vec{v} = \rightarrow P(2, 3)$$

$$\vec{OQ} = \vec{u} - 2\vec{v} = \rightarrow Q(1, -2)$$

4 Operacións con coordenadas

Non esquezas



A suma dun vector e o seu oposto é o vector cero.

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} = (0, 0)$$

4.1. Suma e resta de vectores

- A **suma** de dous vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é outro vector $\vec{u} + \vec{v}$ con coordenadas: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- A **resta** de dous vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é outro vector $\vec{u} - \vec{v}$ con coordenadas: $\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2) - (v_1, v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Exemplo

4 Dados os puntos $A(1, 3)$, $B(4, 6)$, $C(3, 3)$ e $D(3, 1)$, calcula.

a) $\vec{AB} + \vec{CD}$

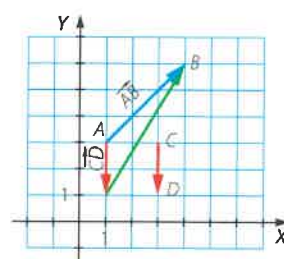
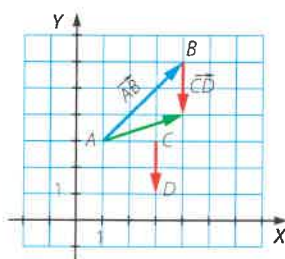
$$\vec{AB} = (4 - 1, 6 - 3) = (3, 3)$$

b) $\vec{AB} - \vec{CD}$

$$\vec{CD} = (3 - 3, 1 - 3) = (0, -2)$$

a) $\vec{AB} + \vec{CD} = (3, 3) + (0, -2) = (3, 1)$

b) $\vec{AB} - \vec{CD} = (3, 3) - (0, -2) = (3, 5)$



4.2. Multiplicación dun vector por un número

O **produto** dun vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ por un número real k é outro vector $k \cdot \vec{v}$, con coordenadas: $k \cdot \vec{v} = k \cdot (v_1, v_2) = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)$

O módulo do vector $k \cdot \vec{v}$ é k veces o módulo de $\vec{v}$: $|k \cdot \vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$

Decátate



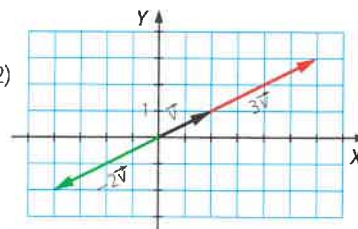
As coordenadas do vector oposto a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son $-\vec{v} = (-v_1, -v_2)$.

Exemplo

5 Dado o vector $\vec{v} = (2, 1)$, calcula $3\vec{v}$ y $-2\vec{v}$.

$$3\vec{v} = 3 \cdot (2, 1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1) = (6, 3)$$

$$-2\vec{v} = -2 \cdot (2, 1) = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 1) = (-4, -2)$$



ACTIVIDADES

9 Dados os puntos $A(0, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 2)$ e $D(-3, 4)$, calcula os vectores.

a) $\vec{AB} - \vec{CD}$

b) $\vec{AC} + \vec{DC}$

c) $\vec{BD} - \vec{CA}$

10 Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, realiza as seguintes operacións de vectores.

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$

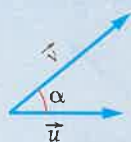
b) $5\vec{u} + \vec{v}$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

5 Produto escalar

Chámase **produto escalar** de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e escríbese $\vec{u} \cdot \vec{v}$, o número que resulta ao multiplicar os seus módulos polo coseno do ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$



Exemplo

- 6 Calcula o produto escalar dos vectores $\vec{u} = (4, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1)$, sabendo que o ángulo que forman é de 45° .

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \\ |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$

5.1. Propiedades do produto escalar

- O produto escalar de dous vectores non nulos é cero só se os vectores son perpendiculares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$|\vec{u}| \neq 0, |\vec{v}| \neq 0$

- O produto escalar dun vector por si mesmo é o cadrado do seu módulo.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$$

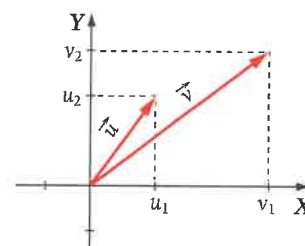
- O produto escalar é conmutativo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- O produto escalar é distributivo: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

5.2. Expresión en coordenadas do produto escalar

Dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, nun sistema de eixes coordenados, a expresión do **produto escalar** é:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$



Exemplo

- 7 Calcula o produto dos vectores $\vec{u} = (4, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4$$

ACTIVIDADES

- 11 Sexan os vectores $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ e $\vec{w} = (0, -1)$. Calcula.

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c) $\vec{w} \cdot \vec{v}$ e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w})$
b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ d) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

- 12 O produto escalar de dous vectores coincide co produto dos seus módulos. Que podes dicir dos vectores?

- 13 Calcula o produto escalar dos vectores $\vec{u} = (3, 2)$ e $\vec{v} = (4, -6)$. Que deduces do resultado?

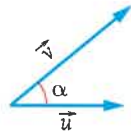
6 Aplicacións do produto escalar

6.1. Ángulo entre dous vectores

Decátate



- Se $\cos \alpha = \pm 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ$.
Os vectores son paralelos.
- Se $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$.
Os vectores son perpendiculares.



Consideramos a expresión do produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, a súa expresión en coordenadas é:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \\ |\vec{u}| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ |\vec{v}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Exemplo

- 8 Calcula o ángulo que forman os vectores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (-5, 1)$.

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot (-5) + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = \frac{-9}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{26}} = -0,79 \rightarrow \alpha = 142^\circ 7' 30''$$

6.2. Vectores perpendiculares

Un vector perpendicular a $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é $\vec{v} = (-u_2, u_1)$.

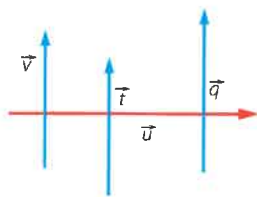
Dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (-u_2, u_1)$, temos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot (-u_2) + u_2 \cdot u_1 = -u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1 = 0 \rightarrow \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ son perpendiculares.}$$

Decátate



Todos os vectores perpendiculares a un dado son paralelos entre si, é dicir, as súas coordenadas son proporcionais.



$\vec{v}$, $\vec{t}$ e $\vec{q}$ son perpendiculares a $\vec{u}$.
 $\vec{v}$, $\vec{t}$ y $\vec{q}$ son paralelos.

Faino así

COMO CALCULAMOS VECTORES PERPENDICULARES A UN VECTOR DADO

Encontra tres vectores perpendiculares ao vector $\vec{u} = (4, 6)$.

PRIMEIRO. Cambiamos de orde as coordenadas e o signo da primeira coordenada.

$$\vec{u} = (4, 6) \rightarrow \vec{v} = (6, -4)$$

SEGUNDO. Calquera vector paralelo a $\vec{v}$ é tamén perpendicular a $\vec{u}$.

Calcúlase vectores paralelos a $\vec{v}$ multiplicando ou dividindo as súas coordenadas por un mesmo número distinto de cero.

$$\vec{v} = (6, -4) \xrightarrow{\cdot 2} \vec{w} = (12, -8) \quad \vec{v} = (6, -4) \xrightarrow{:2} \vec{z} = (3, -2)$$

Tres vectores perpendiculares son: $\vec{v} = (6, -4)$ $\vec{w} = (12, -8)$ $\vec{z} = (3, -2)$

ACTIVIDADES

- 14 Calcula o ángulo que forman estes vectores expresados en coordenadas.

- a) $\vec{u} = (1, -3)$ $\vec{v} = (2, 3)$
b) $\vec{u} = (-1, 2)$ $\vec{v} = (4, 3)$

- 15 Encontra tres vectores perpendiculares e outros tres paralelos aos seguintes vectores.

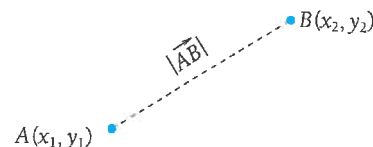
- a) $\vec{a} = (1, 1)$ c) $\vec{c} = (0, 1)$
b) $\vec{b} = (3, 2)$ d) $\vec{d} = (1, -5)$

7 Aplicacións dos vectores

Distancia entre dous puntos

A distancia entre dous puntos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é igual a $|\vec{AB}|$.

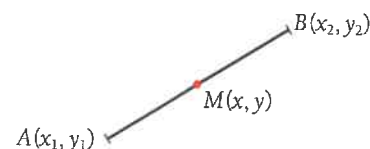
$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Punto medio dun segmento

As coordenadas do punto medio dun segmento de extremos $A(x_1, y_1)$

e $B(x_2, y_2)$ son: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

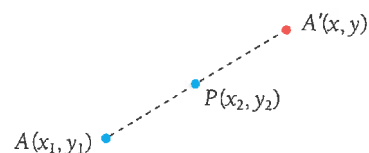


Se o punto $M(x, y)$ é o punto medio de $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB} \rightarrow (x - x_1, y - y_1) = \frac{1}{2} (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

Punto simétrico a un punto

As coordenadas do punto simétrico a $A(x_1, y_1)$ con respecto a $P(x_2, y_2)$ son: $A'(2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1)$.



Como o punto $P(x_2, y_2)$ é o punto medio do segmento AA' :

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{x_1 + x}{2} \rightarrow x = 2x_2 - x_1 \\ y_2 = \frac{y_1 + y}{2} \rightarrow y = 2y_2 - y_1 \end{cases}$$

Exemplo

- 9 Determina a distancia entre os puntos $A(-4, 4)$ e $B(2, -2)$, o punto medio do segmento AB e o punto simétrico de A con respecto a B .

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - (-4))^2 + ((-2) - 4)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Punto medio } \xrightarrow{A(-4, 4), B(2, -2)} M\left(\frac{-4 + 2}{2}, \frac{4 + (-2)}{2}\right) \rightarrow M(-1, 1)$$

$$\text{Punto simétrico } \xrightarrow{A(-4, 4), B(2, -2)} A'(2 \cdot 2 - (-4), 2 \cdot (-2) - 4) \rightarrow A'(8, -8)$$

ACTIVIDADES

- 16 Calcula o perímetro dun triángulo cuxos vértices están situados nos puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ e $C(-1, 3)$.

- 17 Dados $A(-2, 3)$ e $B(1, -2)$, calcula o punto medio de AB e os simétricos de A respecto de B e de B respecto de A .

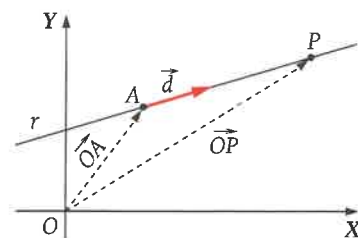
8 Ecuacións da recta

8.1. Ecuación vectorial da recta

Nun sistema de referencia, unha recta r queda determinada por:

- Un punto A da recta. O vector $\vec{OA}$ chámase **vector de posición**.
- Un vector $\vec{d}$ cuxa dirección é a recta r e que chamamos **vector director**.

O vector $\vec{OA} + t\vec{d}$ é un vector con orixe en O e o extremo é un dos puntos de r . Así, para cada valor de t obtemos un punto que pertence á recta.



Chámase **ecuación vectorial** da recta r a expresión:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d} \rightarrow \begin{cases} P(x, y) & \text{Un punto calquera da recta} \\ \vec{OA} = (a, b) & \text{Vector de posición A pertencente á recta} \\ \vec{d} = (d_1, d_2) & \text{Vector director da recta} \\ t & \text{Calquera número real} \end{cases}$$

En coordenadas: $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d} \rightarrow (x, y) = (a, b) + t \cdot (d_1, d_2)$

8.2. Ecuacións paramétricas da recta

Partindo da ecuación vectorial $(x, y) = (a, b) + t \cdot (d_1, d_2)$, e igualando coordenada a coordenada, obtemos:

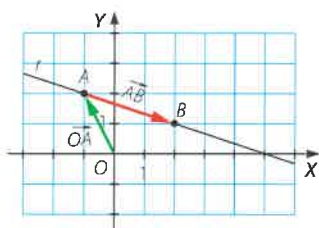
$$\begin{cases} x = a + t d_1 \\ y = b + t d_2 \end{cases}, \text{ sendo } t \text{ un número real}$$

Esta expresión da recta chámase **ecuacións paramétricas** da recta.

Non esquezas



Aínda que o valor de t pode ser calquera, ao substituír nas ecuacións paramétricas debe ser o mesmo en ambas as ecuacións.



Exemplo

10 Calcula as ecuacións vectorial e paramétricas da recta que pasa por $A(-1, 2)$ e $B(2, 1)$.

Vector de posición: $\vec{OA} = (-1, 2)$

Vector director: $\vec{d} = \vec{AB} = (2 - (-1), 1 - 2) = (3, -1)$

$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{d} \rightarrow (x, y) = (-1, 2) + t \cdot (3, -1)$ ← Ecuación vectorial

$\begin{cases} x = a + t d_1 \\ y = b + t d_2 \end{cases} \xrightarrow{A(-1, 2), \vec{d} = (3, -1)} \begin{cases} x = -1 + t \cdot 3 \\ y = 2 + t \cdot (-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$ ← Ecuacións paramétricas

ACTIVIDADES

18 Escribe as ecuacións vectorial e paramétricas da recta que pasa polos puntos $A(7, 3)$ e $B(2, 2)$.

19 Calcula as ecuacións paramétricas da recta se o seu vector director é $\vec{v} = (-1, 0)$ e pasa polo punto $A(3, 2)$.

20 Calcula as ecuacións vectorial e paramétricas das rectas bisectrices dos cuadrantes.

21 Dúas rectas, r e s , poden ter o mesmo vector director? Que relación haberá entre elas?

8.3. Ecuación continua da recta

Despexando t nas ecuacións paramétricas e igualando, temos:

$$\left. \begin{array}{l} x = a + t d_1 \\ y = b + t d_2 \end{array} \right\} \rightarrow t = \frac{x-a}{d_1} \rightarrow \frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2}$$

Esta expresión é a **ecuación continua** da recta.

Non esquezas



Non se pode dividir entre cero. Por tanto, a ecuación continua da recta só se pode utilizar cando o vector director ten as súas dúas coordenadas non nulas:

$$d_1 \neq 0 \text{ e } d_2 \neq 0$$

Exemplo

- 11 Calcula a ecuación continua da recta que pasa por $A(1, -3)$ e ten a dirección do vector $\vec{d} = (4, 6)$. Calcula se $P(1, -1)$ pertence á recta.

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} \xrightarrow{A(1, -3), \vec{d}=(4, 6)} \frac{x-1}{4} = \frac{y-(-3)}{6} \rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{6} \leftarrow \text{Ecuación continua}$$

$P(1, -1)$ pertence á recta se se cumpre a ecuación.

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{6} \xrightarrow{P(1, -1)} \frac{1-1}{4} \neq \frac{-1+3}{6} \rightarrow P \text{ non pertence á recta.}$$

8.4. Ecuación xeral da recta

Agrupamos todos os termos da ecuación continua nun membro:

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} \rightarrow d_2(x-a) = d_1(y-b) \rightarrow d_2x - d_1y - d_2a + d_1b = 0$$

Se facemos $A = d_2$, $B = -d_1$, $C = -d_2a + d_1b$, temos que:

$$Ax + By + C = 0$$

Esta expresión coñécese como **ecuación xeral** da recta.

Polo tanto, se unha recta ten como ecuación xeral $Ax + By + C = 0$, o seu vector director é $(-B, A)$.

Exemplo

- 12 Calcula a ecuación xeral da recta que pasa por $A(1, -1)$ e $B(0, 2)$.

Un vector director desta recta é:

$$\vec{AB} = (0-1, 2-(-1)) = (-1, 3)$$

Obtemos a súa ecuación continua tomando $A(1, -1)$ como punto da recta e pasando todos os termos ao primeiro membro.

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{3} \rightarrow 3x-3 = -y+1 \rightarrow 3x+y-4=0 \leftarrow \text{Ecuación xeral}$$

ACTIVIDADES

- 22 Calcula a ecuación continua da recta que pasa por $A(2, -1)$ e ten a dirección do vector $\vec{d} = (2, -1)$. Calcula se o punto $P(3, 1)$ está na recta.

- 23 Obtén a ecuación xeral da recta que pasa por $A(1, -1)$ e $B(0, 2)$. Calcula tamén un vector perpendicular ao seu vector director.

Decátate



- Se o vector director dunha recta é $\vec{d} = (d_1, d_2)$ a súa pendente é $m = \frac{d_2}{d_1}$.
- Se $r: Ax + By + C = 0$ entón $m = \frac{-A}{B}$.

8.5. Ecuación explícita da recta

Na ecuación xeral dunha recta con $B \neq 0$, despxando e temos que:

$$Ax + By + C = 0 \rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Se tomamos $m = -\frac{A}{B}$ e $n = -\frac{C}{B}$, obtemos a ecuación $y = mx + n$.

Esta ecuación denomínase **ecuación explícita** da recta.

A m chámase **pendente** da recta, e n é a **ordenada na orixe**, o valor que toma y cando x vale cero.

8.6. Ecuación punto-pendente da recta

Na ecuación explícita $y = mx + n$, con $m = \frac{d_2}{d_1}$ e $n = -\frac{d_2}{d_1}a + b$:

$$y = mx + n \rightarrow y = \frac{d_2}{d_1}x - \frac{d_2}{d_1}a + b \rightarrow y - b = \frac{d_2}{d_1}(x - a)$$

$$y - b = m(x - a)$$

Esta ecuación denomínase **ecuación punto-pendente** da recta.

Exemplo

- 13** Calcula as ecuacións explícita e punto-pendente da recta que pasa por $A(1, 4)$ e $B(2, 7)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{A(1, 4)} 4 = m \cdot 1 + n \\ y = mx + n \xrightarrow{B(2, 7)} 7 = m \cdot 2 + n \end{array} \right\} \text{Obtemos un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas.}$$

Resolvendo o sistema, tense que $m = 3$ e $n = 1$.

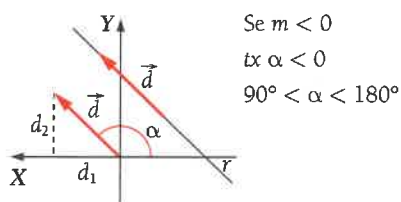
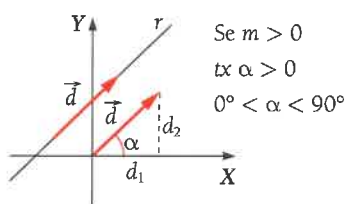
$$y = mx + n \xrightarrow{m=3, n=1} y = 3x + 1 \leftarrow \text{Ecuación explícita}$$

Para calcular a ecuación punto-pendente achamos un vector director.

$$\vec{AB} = (2 - 1, 7 - 4) = (1, 3) \quad m = \frac{d_2}{d_1} \xrightarrow{\vec{AB} = (1, 3)} m = \frac{3}{1} = 3$$

Tomando o punto $A(1, 4)$:

$$y - b = m(x - a) \xrightarrow{m=3, a=1, b=4} y - 4 = 3(x - 1) \leftarrow \text{Ecuación punto-pendente}$$

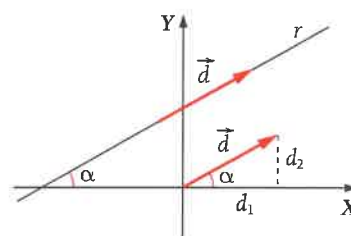


8.7. Significado da pendente dunha recta

A pendente dunha recta coincide coa tangente do ángulo que forma a recta co eixe de abscisas.

$$\text{tx } \alpha = \frac{d_2}{d_1} = m$$

A pendente dunha recta determina a súa inclinación.



ACTIVIDADES

- 24** Calcula as ecuacións explícita e punto-pendente da recta que pasa por $A(3, -3)$ e pola orixe de coordenadas.

- 25** Calcula a recta que pasa polo punto $A(2, 7)$ e forma co eixe de abscisas un ángulo de 60° . Explica como o fas.

9 Posicións relativas de dúas rectas

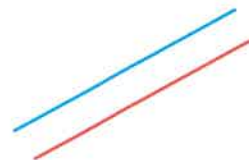
No plano, dúas rectas poden ser:

- **Paralelas** cando teñen a mesma dirección e non posúen puntos comúns.
- **Coincidentes** se teñen a mesma dirección e todos os puntos comúns.
- **Secantes** cando as súas direccións son distintas e só teñen un punto en común, que é o punto de corte das rectas.

Consideramos a recta r , con vector director $\vec{d} = (d_1, d_2)$, pendente m e ecuación xeral $Ax + By + C = 0$. E consideramos a recta r' , con vector director $\vec{c} = (c_1, c_2)$, pendente m' e ecuación xeral $A'x + B'y + C' = 0$.

Posicións	Vectores directores	Pendientes	Ecuación xeral
Paralelas	Proporcionais $\frac{d_2}{d_1} = \frac{c_2}{c_1}$	Iguais $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coincidentes	Proporcionais $\frac{d_2}{d_1} = \frac{c_2}{c_1}$	Iguais $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Secantes	Non proporcionais $\frac{d_2}{d_1} \neq \frac{c_2}{c_1}$	Distintas $m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

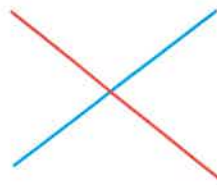
Rectas paralelas



Rectas coincidentes



Rectas secantes



Exemplo

- 4 Estuda cal é a posición relativa das rectas $r: 6x - 8y - 15 = 0$

e $r': \frac{x-2}{4} = \frac{y}{3}$.

Calculamos os vectores directores das rectas.

$$r: 6x - 8y - 15 = 0 \longrightarrow \vec{d} = (-B, A) \xrightarrow{A=6, B=-8} \vec{d} = (8, 6)$$

$$r': \frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} \longrightarrow \vec{c} = (4, 3)$$

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{c_2}{c_1} \rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \rightarrow \text{Rectas paralelas ou coincidentes}$$

Un punto de r' é $A(2, 0)$. Vexamos se pertence a r :

$$6x - 8y - 15 = 0 \xrightarrow{A(2,0)} 6 \cdot 2 - 8 \cdot 0 - 15 \neq 0 \rightarrow A(2, 0) \notin r$$

Existe un punto de r' que non pertence a r . As rectas r e r' son paralelas.

ACTIVIDADES

- 26 Calcula os valores de B e C para que as rectas r e s sexan paralelas.

$$r: 3x + By + 5 = 0$$

$$s: x + 2y + C = 0$$

- 27 Estuda a posición relativa de dúas rectas que teñen vectores directores non proporcionais. Que condición han de verificar para que as rectas sexan perpendiculares?

10 Distancias e ángulos entre rectas

Non esquezas

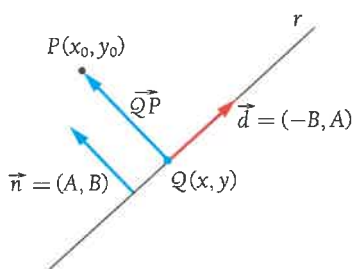


Unha distancia é sempre positiva, e por iso engadimos o valor absoluto ao numerador no cálculo da distancia dun punto a unha recta.

10.1. Distancia entre un punto e unha recta

A distancia do punto $P(x_0, y_0)$ á recta $r: Ax + By + C = 0$ exprésase:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Se $r: Ax + By + C = 0$, sabemos que o seu vector director é $\vec{d} = (-B, A)$. Vexamos se o vector $\vec{n} = (A, B)$ é perpendicular a $\vec{d}$:

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = -B \cdot A + A \cdot B = 0$$

Tomamos o punto $X(x, y)$ da recta, de maneira que $\vec{QP} = (x_0 - x, y_0 - y)$ sexa perpendicular á recta e paralelo ao vector $\vec{n} = (A, B)$, temos que:

$$\begin{aligned} \vec{QP} \cdot \vec{n} &= |\vec{QP}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0^\circ = d(P, r) \cdot \sqrt{A^2 + B^2} \cdot 1 = d(P, r) \cdot \sqrt{A^2 + B^2} \\ \vec{QP} \cdot \vec{n} &= (x_0 - x) \cdot A + (y_0 - y) \cdot B = Ax_0 - Ax + By_0 - By \end{aligned}$$

Igualamos os dous resultados:

$$\begin{aligned} d(P, r) \cdot \sqrt{A^2 + B^2} &= Ax_0 - Ax + By_0 - By \\ d(P, r) &= \frac{Ax_0 - Ax + By_0 - By}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Como $Ax + By + C = 0 \rightarrow Ax + By = -C$, resulta que:

$$d(P, r) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Non esquezas



Dada a recta:

$$r: Ax + By + C = 0$$

o seu vector director é $\vec{d} = (-B, A)$ e un vector perpendicular á recta é $\vec{n} = (A, B)$.

Exemplo

15 Calcula a distancia entre o punto $P(1, 7)$ e a recta $r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{6}$.

Escribimos a ecuación xeral da recta.

$$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{6} \rightarrow 6x = 4y - 4 \rightarrow 6x - 4y + 4 = 0$$

Así, a distancia de P a r é:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 \cdot 1 - 4 \cdot 7 + 4|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} = \frac{|-18|}{\sqrt{52}} = \frac{18\sqrt{52}}{52} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$$

ACTIVIDADES

28 Calcula a distancia entre o punto $P(2, -1)$ e a recta r , se a súa ecuación é:

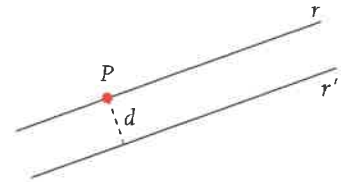
$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

29 Calcula a distancia que separa esta recta da orixe de coordenadas.

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

10.2. Distancia entre dúas rectas

- Se as rectas son secantes ou coincidentes, a distancia entre elas é cero.
- Se as rectas son paralelas, tómasse un punto dunha delas e calcúlase a súa distancia á outra recta.



Exemplo

16 Calcula a distancia entre a recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1}$ e a recta $s: -x + 2y - 2 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} \longrightarrow \vec{d} = (2, 1) \\ s: -x + 2y - 2 = 0 \longrightarrow \vec{d} = (-2, -1) \end{array} \right\} \longrightarrow \frac{2}{-2} = \frac{1}{-1}$$

Tomamos un punto da recta r e vemos se pertence a s .

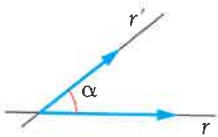
$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} \xrightarrow{x=0} 0 = \frac{y+1}{1} \rightarrow y = -1 \rightarrow A(0, -1) \in r$$

$$-x + 2y - 2 = 0 \xrightarrow{A(0, -1)} 0 + 2 \cdot (-1) - 2 \neq 0 \rightarrow A(0, -1) \notin s$$

Logo $A(0, -1)$ é un punto de r , e as rectas r e s son paralelas.

$$d(r, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|0 + 2 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

10.3. Ángulo entre dúas rectas



Chámase ángulo entre dúas rectas o menor ángulo que forman as rectas ao cortarse. Este ángulo coincide co ángulo dos seus vectores directores.

Se $r: Ax + By + C = 0$ e $r': A'x + B'y + C' = 0$, como sabemos que $\vec{d} = (-B, A)$ e $\vec{d}' = (-B', A')$, temos que:

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|A \cdot A' + B \cdot B'|}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$

Exemplo

17 Calcula o ángulo que forman as rectas $r: y = 2x - 3$ e $s: 4x + 3y = 0$.

$$r: y = 2x - 3 \rightarrow 2x - y - 3 = 0 \rightarrow \vec{d} = (-B, A) \rightarrow \vec{d} = (1, 2)$$

$$s: 4x + 3y = 0 \longrightarrow \vec{d}' = (-B', A') \rightarrow \vec{d}' = (-3, 4)$$

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \alpha = 63^\circ 26' 6''$$

Decátate



O ángulo entre dúas rectas secantes é sempre agudo ou as rectas son perpendiculares. Así, $\cos \alpha$ será sempre positivo, por iso poñemos o valor absoluto no numerador da fórmula.

ACTIVIDADES

30 Calcula a distancia entre estas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} \\ s: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \end{array} \right\}$$

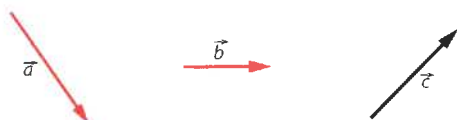
31 Calcula o ángulo que forman as rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} \\ s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{cases} \end{array} \right\}$$

Operacións con vectores

1. COMO SE RESOLVEN OPERACIÓN COMBINADAS DE VECTORES

18 Dados os vectores:



calcula graficamente.

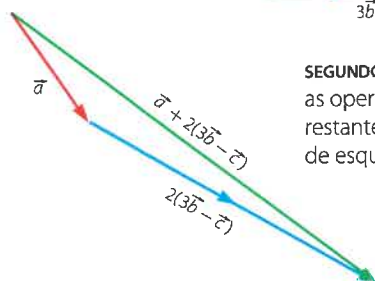
$$\vec{a} + 2(3\vec{b} - \vec{c})$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Resólvense as operacións que hai entre parénteses.



SEGUNDO. Resólvense as operacións restantes, de esquerda a dereita.



Bases

1. COMO SE DETERMINAN AS COORDENADAS DUN VECTOR RESPECTO DUNHA BASE

19 Determina se os vectores $\vec{u} = (-1, 0)$ e $\vec{v} = (2, -3)$ forman unha base, e se é así, calcula as coordenadas do vector $\vec{w} = (3, -3)$ respecto desa base.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Para que dous vectores formen unha base no plano teñen que ser linealmente independentes.

$$\frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-3} \rightarrow \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ son linealmente independentes.}$$

SEGUNDO. Exprésase $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$(3, -3) = a \cdot (-1, 0) + b \cdot (2, -3)$$

$$\begin{cases} 3 = -a + 2b \\ -3 = -3b \end{cases} \rightarrow a = -1, b = 1$$

TERCEIRO. As coordenadas do vector son os coeficientes que se calcularon.

As coordenadas de $\vec{w}$ respecto de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son $(-1, 1)$.

2. COMO SE EXPRESA UN VECTOR COMO COMBINACIÓN LINEAL DOUTROS DÓS VECTORES

20 Exprésase o vector $\vec{w} = (5, -2)$ como combinación lineal dos vectores $\vec{u} = (3, -3)$ e $\vec{v} = (1, -4)$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Exprésase a combinación lineal.

Hai que buscar dous números, a e b , tales que:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

$$(5, -2) = a \cdot (3, -3) + b \cdot (1, -4)$$

SEGUNDO. Igúálense as coordenadas e obtense un sistema de ecuacións.

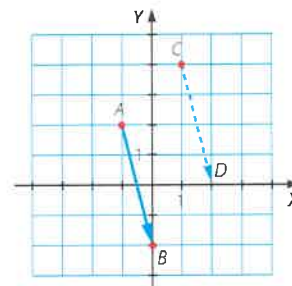
$$\begin{cases} 5 = 3a + b \\ -2 = -3a - 4b \end{cases} \rightarrow a = 2, b = -1$$

Logo resulta que: $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$

Coordenadas dun vector

1. COMO SE CALCULAN AS COORDENADAS DUN DOS EXTREMOS DUN VECTOR, COÑECENDO O OUTRO E UN VECTOR EQUIVALENTE

21 Calcula as coordenadas do punto D para que os vectores $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sexan equivalentes, sabendo que $A(-1, 2)$, $B(0, -2)$ e $C(1, 4)$.



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculanse as coordenadas do vector dos que se coñecen os extremos, $\vec{AB}$.

$$\vec{AB} = (0 - (-1), -2 - 2) = (1, -4)$$

SEGUNDO. Cálculanse as coordenadas do outro vector tomando $D(a, b)$.

$$\vec{CD} = (a - 1, b - 4)$$

TERCEIRO. Como os dous vectores son equivalentes, igúálense as súas coordenadas.

$$(1, -4) = (a - 1, b - 4) \rightarrow \begin{cases} 1 = a - 1 \rightarrow a = 2 \\ -4 = b - 4 \rightarrow b = 0 \end{cases}$$

O punto D ten como coordenadas $(2, 0)$.

Operacións con coordenadas

1. COMO SE CALCULAN AS COORDENADAS DE DOUS VECTORES DOS QUE COÑECEMOS O RESULTADO DALGUNHAS DAS SÚAS OPERACIÓNS

22 Se a suma e a resta de dous vectores é:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (-1, 4)$$

calcula as coordenadas dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Considérase cada vector como a incógnita dun sistema de ecuacións lineares.

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = (2, 3) \\ \vec{u} - \vec{v} = (-1, 4) \end{cases}$$

SEGUNDO. Búscase o método máis adecuado e resólvese o sistema.

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = (2, 3) \\ \vec{u} - \vec{v} = (-1, 4) \end{cases}$$

$$2\vec{u} = (1, 7) \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) \rightarrow \vec{v} = (2, 3) - \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Aplicacións dos vectores

1. COMO SE CALCULA O PERÍMETRO DE POLÍGONOS, COÑECENDO AS COORDENADAS DOS SEUS VÉRTICES

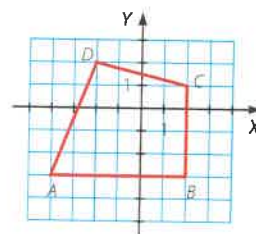
24 Calcula o perímetro deste cuadrilátero.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculanse as coordenadas dos puntos que forman os vértices do polígono.

$$A(-4, -3) \quad C(2, 1)$$

$$B(2, -3) \quad D(-2, 2)$$



SEGUNDO. Cálculase a distancia entre os puntos que forman os seus vértices e súmase o resultado.

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-3 - (-3))^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$d(B, C) = \sqrt{(2 - 2)^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$d(C, D) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{16 + 1} = 4,12$$

$$d(D, A) = \sqrt{(-4 - (-2))^2 + (-3 - 2)^2} = 5,38$$

$$\text{O perímetro é: } P = 6 + 4 + 4,12 + 5,38 = 19,5$$

Produto escalar

1. COMO SE CALCULAN VECTORES PERPENDICULARES A UN DADO CON DETERMINADAS CARACTERÍSTICAS

23 Encontra un vector perpendicular a $\vec{u} = (4, 5)$ con módulo 1.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. O vector $\vec{v} = (-u_2, u_1)$ e todos os vectores paralelos a este son perpendiculares ao vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

$$\vec{v} = (-u_2, u_1) \xrightarrow{\vec{u} = (4, 5)} \vec{v} = (-5, 4)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

SEGUNDO. Se o módulo de $\vec{v}$ non é o indicado, divídese cada coordenada de $\vec{v}$ entre o seu módulo.

$$\vec{v}' = \left(\frac{-5}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}}\right)$$

$$|\vec{v}'| = \sqrt{\left(\frac{-5}{\sqrt{41}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)^2} = 1$$

2. COMO SE CALCULAN VARIOS PUNTOS QUE DIVIDAN UN SEGMENTO EN PARTES IGUAIS

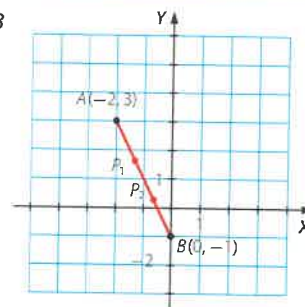
25 Divide o segmento AB en tres partes iguais.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculase o vector $\vec{AB}$.

$$\vec{AB} = (2, -4)$$

$$(0 - (-2), -1 - 3)$$



SEGUNDO. Para que o segmento quede dividido en tres partes iguais, o primeiro punto estará situado a $\frac{1}{3}$ de distancia dun dos extremos do segmento, e o segundo, a $\frac{2}{3}$ de distancia.

$$P_1 = A + \frac{1}{3} \vec{AB} = (-2, 3) + \frac{1}{3} (2, -4) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3} \vec{AB} = (-2, 3) + \frac{2}{3} (2, -4) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

3. COMO SE SABE SE TRES PUNTOS ESTÁN ALIÑADOS

- 26 Estuda se $A(-2, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(-5, -1)$ pertencen á mesma liña recta, é dicir, se están aliñados.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlanse os dous vectores que teñen orixe nun dos puntos e extremo en cada un dos outros puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (1 - (-2), 1 - 0) = (3, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-5 - (-2), -1 - 0) = (-3, -1)$$

SEGUNDO. Se os tres puntos están aliñados, estes vectores teñen que ser proporcionais.

$$\frac{3}{1} = \frac{-3}{-1} \rightarrow \text{Os vectores son proporcionais.}$$

Por tanto, os tres puntos están na mesma recta.

Ecuacións da recta

1. COMO SE DETERMINA SE UN PUNTO PERTENCE A UNHA RECTA

- 27 Determina se a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2}$ pasa polos puntos $P(4, -5)$ e $Q(5, -3)$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Substitúense as coordenadas x e y da ecuación da recta polas coordenadas do punto.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \xrightarrow{P(4, -5)} \frac{4-2}{1} = \frac{-5+1}{-2} \rightarrow 2 = 2$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \xrightarrow{Q(5, -3)} \frac{5-2}{1} = \frac{-3+1}{-2} \rightarrow 3 \neq 2$$

SEGUNDO. Se a igualdade se mantén, o punto pertence á recta. En caso contrario, non pertence.

Neste caso, $P \in r$ e $Q \notin r$.

2. COMO SE CALCULA UN PUNTO DUNHA RECTA

- 28 Determina un punto da recta $r: 2x - y + 1 = 0$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Dáse calquera valor a x e calcúlase y .

$$r: 2x - y + 1 = 0 \xrightarrow{x=0} -y + 1 = 0 \rightarrow y = 1$$

SEGUNDO. O punto buscado ten como coordenadas x e y .

$$P(0, 1) \in r$$

3. COMO SE DETERMINA A ECUACIÓN DUNHA RECTA DA QUE SE COÑECEN ALGÚNS DOS SEUS ELEMENTOS

- 29 Determina todas as ecuacións da recta que pasa polo punto $P(2, -1)$ e, ademais:

a) Ten como vector director $\vec{d} = (1, -2)$.

b) Ten como pendente $m = -2$.

c) Outro dos seus puntos é $Q(3, -3)$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Para calcular as ecuacións dunha recta necesítanse un dos seus puntos e o seu vector director.

a) Punto: $P(2, -1)$ Vector director: $\vec{d} = (1, -2)$

b) Punto: $P(2, -1)$ $m = \frac{d_2}{d_1} = -2 \rightarrow d_2 = -2d_1$

Se $d_1 = 1 \rightarrow d_2 = -2 \rightarrow$ Vector director: $\vec{d} = (1, -2)$

c) Punto: $P(2, -1)$

$$\text{Vector director: } \vec{d} = \overrightarrow{PQ} = (3 - 2, -3 - (-1)) = (1, -2)$$

Nos tres casos aparece o mesmo punto e igual vector director, polo que é a mesma recta.

SEGUNDO. Substitúense as coordenadas do punto e do vector nas fórmulas das ecuacións vectorial, paramétricas e continua.

ECUACIÓN VECTORIAL

$$(x, y) = (a, b) + t \cdot (d_1, d_2)$$

$$(x, y) = (2, -1) + t \cdot (1, -2)$$

ECUACIÓN PARAMÉTRICAS

$$\left. \begin{aligned} x &= a + td_1 \\ y &= b + td_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -1 - 2t \end{aligned} \right\}$$

ECUACIÓN CONTINUA

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} \rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2}$$

TERCEIRO. Calcúlase a ecuación xeral, sabendo que o vector director é $(-B, A)$, e despéxase C .

$$\vec{d} = (1, -2) = (-B, A) \rightarrow A = -2, B = -1$$

Calcúlase o valor de C .

$$Ax + By + C = 0 \xrightarrow{A=-2, B=-1} -2x - y + C = 0$$

Como $P(2, -1) \in r \rightarrow -2 \cdot 2 - (-1) + C = 0 \rightarrow C = 3$

$$\text{ECUACIÓN XERAL } -2x - y + 3 = 0$$

CUARTO. Para calcular a ecuación punto-pendente calcúlase a pendente e aplícase a fórmula.

$$\vec{d} = (1, -2) \rightarrow m = \frac{d_2}{d_1} = \frac{-2}{1} = -2$$

ECUACIÓN PUNTO-PENDENTE

$$\begin{aligned} y - b &= m(x - a) \rightarrow y - (-1) = -2(x - 2) \\ y + 1 &= -2(x - 2) \end{aligned}$$

Posicións relativas de rectas

1. COMO SE DETERMINA O PUNTO DE INTERSECCIÓN ENTRE DÚAS RECTAS SECANTES

- 30 Determina o punto de intersección destas rectas.

$$r: \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{-1} \quad s: -x + 2y + 4 = 0$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Preséntase un sistema coas dúas ecuacións das rectas en que as incógnitas son x e y .

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{-1} &= \frac{y+3}{-1} \\ -x + 2y + 4 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow x = 2, y = -1$$

SEGUNDO. A solución é as coordenadas buscadas. O punto de intersección é $P(2, -1)$.

2. COMO SE DETERMINA A ECUACIÓN DUNHA RECTA PARALELA A OUTRA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO

- 31 Determina a ecuación da recta paralela a $r: -2x - y + 2 = 0$ que pasa polo punto $P(-1, 2)$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase o vector director da recta.

$$r: -2x - y + 2 = 0 \xrightarrow{\vec{d} = (-B, A)} \vec{d} = (1, -2)$$

SEGUNDO. Se a recta buscada é paralela a r , ten o mesmo vector director. Con este vector director e co punto defínese a nova recta.

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} \xrightarrow{P(-1, 2), \vec{d} = (1, -2)} \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2}$$

3. COMO SE DETERMINA A ECUACIÓN DUNHA RECTA PERPENDICULAR A OUTRA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO

- 32 Calcula a ecuación da recta que é perpendicular a $r: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-1}$ e que pasa por $P(-1, 2)$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase un vector perpendicular ao vector director da recta.

Un vector perpendicular a $\vec{d} = (2, -1)$ é $\vec{d}^\perp = (1, 2)$.

SEGUNDO. Este é o vector director da nova recta.

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} \xrightarrow{P(-1, 2), \vec{d}^\perp = (1, 2)} \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2}$$

Distancia entre dúas rectas

1. COMO SE DETERMINA UNHA RECTA PARALELA A OUTRA RECTA QUE ESTÁ A UNHA CERTA DISTANCIA

- 33 Calcula a ecuación dunha recta s paralela a $r: 3x - 4y + 4 = 0$ que está a 3 unidades de distancia.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Como as rectas son paralelas diferéncianse no termo independente da ecuación xeral.

$$s: 3x - 4y + C = 0$$

SEGUNDO. Tómase un punto de r e aplícaselle a fórmula da distancia a s .

$$r: 3x - 4y + 4 = 0 \xrightarrow{x=0} -4y + 4 = 0 \rightarrow y = 1 \quad P(0, 1) \in r$$

$$d(P, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-4 + C|}{5}$$

$$\frac{|-4 + C|}{5} = 3 \rightarrow \begin{cases} -4 + C = 15 \rightarrow C = 19 \\ -4 + C = -15 \rightarrow C = -11 \end{cases}$$

Hai dúas rectas que cumpren esa condición:

$$s_1: 3x - 4y + 19 = 0 \quad s_2: 3x - 4y - 11 = 0$$

Ángulo entre dúas rectas

1. COMO SE CALCULA A ECUACIÓN DUNHA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO E FORMA UN DETERMINADO ÁNGULO CON OUTRA RECTA

- 34 Calcula a ecuación da recta s que pasa por $P(1, -3)$ e forma un ángulo de 45° con $r: 2x - y + 1 = 0$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Escríbese a ecuación punto-pendente da recta s , tomando m como pendente desta recta.

$$y + 3 = m(x - 1) \rightarrow mx - y - m - 3 = 0$$

SEGUNDO. Aplícase a fórmula do ángulo entre as dúas rectas.

$$\cos 45^\circ = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 + 2m|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + m^2}}$$

TERCEIRO. Resólvese a ecuación resultante, elevando ao cadrado os dous membros.

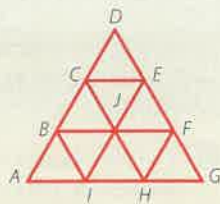
$$(\sqrt{10} \cdot \sqrt{1 + m^2})^2 = (2 + 4m)^2 \rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = -3 \end{cases}$$

Por tanto, hai dúas solucións:

$$s_1: 3x + y = 0 \quad s_2: x - 3y - 10 = 0$$

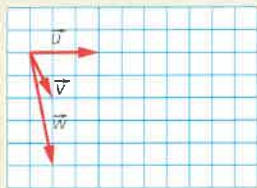
Vectores

- 32** Á vista da seguinte figura, realiza as operacións indicadas.



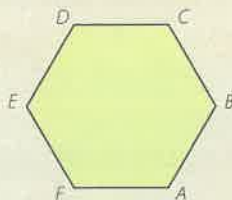
- a) $\vec{AB} + \vec{BI}$
 b) $\vec{BC} - \vec{EF}$
 c) $\vec{IH} + 2\vec{BC}$
 d) $\vec{AB} + \vec{JF} + \vec{DC}$
 e) $\vec{HG} + 2\vec{CI} + 2\vec{CB}$
 f) $\vec{AB} + 2\vec{DC}$
 g) $\vec{BF} - \vec{IE}$
 h) $2\vec{HI} + 2\vec{CD}$
 i) $\vec{AE} - \vec{AC}$
 l) $2\vec{IE} + \vec{IB} - \vec{BC}$

- 33** Fai as seguintes operacións.

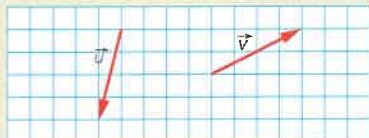


- a) $u + v$
 b) $2v + u - w$
 c) $2w - u + 3v$
 d) $v - 2u - w$
 e) $2u + w$

- 34** Exprésa os vectores $\vec{AC}$, $\vec{AF}$, $\vec{EB}$, $\vec{AE}$ e $\vec{FC}$ da figura como combinación lineal dos vectores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$.



- 35** Comproba que os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura forman unha base.



Debuxa os vectores con coordenadas nesa base.

- a) (2, 1) b) (3, -1) c) (-2, 3)

- 36** Razoa que pares de vectores forman unha base.

- a) $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (5, 4)$
 b) $\vec{u} = (0, -2)$ e $\vec{v} = (4, 1)$

- 37** Se, respecto dunha base, os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (5, 4)$, calcula as coordenadas dos seguintes vectores

- a) $2\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$ e) $-3\vec{u} - \vec{v}$
 b) $5\vec{u} + 2\vec{v}$ d) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ f) $-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

- 38** Calcula λ e μ para que os vectores $\vec{u} = (5, 1)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ e $\vec{w} = (13, 11)$ verifiquen que: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{w}$.

- 39** Calcula o módulo dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ e $2\vec{b} - \vec{c}$, dados $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (-5, -12)$ e $\vec{c} = (3, -1)$.

- 40** Se $\vec{u} = (3, 1)$ e $\vec{v} = (2, -1)$, calcula.

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
 b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v}$
 c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v}$
 d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

- 41** Dados os puntos A(3, 7), B(4, 9), C(-4, 3) e D(4, 9), son paralelos os vectores $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$?

Produto escalar

- 42** Calcula o valor de t para que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$, se $\vec{u} = (-1, 2)$ e $\vec{v} = (3, t)$. Calcula o módulo dos dous vectores.

- 43** Se $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ e $\vec{w} = (e, f)$, proba que se verifican as igualdades.

- a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
 b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
 c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$
 d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}$

- 44** Decide se os seguintes vectores son perpendiculares ou paralelos.

- a) $\vec{a} = (-2, 4)$ e $\vec{b} = (3, 2)$
 b) $\vec{c} = (4, -3)$ e $\vec{d} = (6, 8)$

- 45** Encontra un vector $\vec{u} = (a, b)$ que é perpendicular a $\vec{v} = (3, 5)$ e do que o módulo sexa $|\vec{u}| = 2\sqrt{34}$.

- 46** Dado o vector $\vec{p} = (6, 2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ e tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.

- 47** Calcula m e n para que os vectores $\vec{u} = (3, m)$ e $\vec{v} = (n, -1)$ sexan perpendiculares e se verifique que $|\vec{u}| = 5$.

- 48** Calcula m para que $\vec{v} = (7, -2)$ e $\vec{w} = (m, 6)$:

- a) Sexan perpendiculares.
 b) Sexan paralelos.
 c) Teñan o mesmo módulo.

- 49** Dados $\vec{a} = (6, -2)$ e $\vec{b} = (16, 12)$, calcula o valor de m para que os vectores $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ sexan perpendiculares. Hai unha solución única?

- 50** Poderías conseguir un vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, sendo $\vec{b} = (2, 1)$, e que sexa perpendicular a $\vec{c} = (2, 6)$?

- 51** Considera que A, B, C e D son os vértices dun cadrado de lado 1 cm. Calcula os seguintes produtos escalares.

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ c) $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$
 b) $\vec{AC} \cdot \vec{DB}$ d) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$

- 52** Por unha translación, o punto (1, -3) transfórmase en (3, 7). Cal é a imaxe do punto (-2, 5) pola mesma translación? E a imaxe de (4, -6)?

Aplicacións dos vectores

53 Calcula o ángulo que forman os vectores.

- ooo a) $\vec{a} = (-1, 5)$ e $\vec{b} = (3, 2)$
 b) $\vec{c} = (1, \sqrt{3})$ e $\vec{d} = (-1, \sqrt{3})$
 c) $\vec{e} = (-6, 4)$ e $\vec{f} = (-9, 6)$
 d) $\vec{g} = (2, -5)$ e $\vec{h} = (4, 6)$

54 Calcula m para que os vectores $\vec{a} = (8, -6)$ e $\vec{b} = (m, 3)$ formen un ángulo de 60° .

55 Encontra un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ e tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{b}|$.

56 Calcula a e b , se os vectores $\vec{u} = (a, 4)$ e $\vec{v} = (b, 14)$ forman un ángulo de 45° e $|\vec{u}| = 5$.

57 Calcula o punto medio dos segmentos de extremos:

- ooo a) $A(3, 5)$ e $B(9, 11)$ c) $A(4, 5)$ e $B(7, 1)$
 b) $A(-3, 1)$ e $B(7, -4)$ d) $A(-6, -1)$ e $B(-9, -3)$

58 Se o punto medio do segmento AB é $M(3, 5)$, dado $A(9, 7)$, calcula o punto B . Logo obtén A con $M(-1, 5)$ e $B(4, -9)$.

59 Calcula as coordenadas do punto simétrico de $P(-4, 2)$ respecto do punto $Q(5, -1)$. Determina tamén o punto simétrico de $A(3, -2)$ respecto de $B(-3, 4)$.

60 Se $A(3, 1)$, $B(5, 7)$ e $C(6, 4)$ son tres vértices consecutivos dun paralelogramo, cal é o cuarto vértice?

61 Dous vértices consecutivos dun hexágono regular centrado na orixe de coordenadas son $(4, 0)$ e $(2, 2\sqrt{3})$. Calcula as coordenadas dos demais vértices.

62 Tres vértices consecutivos dun hexágono regular son $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(3, \sqrt{3})$. Calcula os outros vértices.

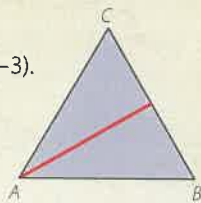
63 Calcula as coordenadas dos puntos que dividen o segmento de extremos $A(5, -1)$ e $B(17, 8)$ en tres partes iguais.

64 Determina o valor de a , sabendo que a distancia entre $Q(-6, 2)$ e $P(a, 7)$ é 13. Escribe tamén as coordenadas e o módulo do vector $\vec{PQ}$.

65 Demostra que o triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ e $C(5, -5)$ é isóscele. É equilátero? Cales son os seus lados iguais? Calcula a súa área.

66 Determina se o triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ e $C(8, 32)$ é rectángulo.

67 Calcula a lonxitude da mediana que parte de A no triángulo de vértices $A(-1, 4)$, $B(6, 5)$ e $C(10, -3)$. Coincide a mediana coa altura neste caso? Xustifícao.



Problemas con vectores

68 Calcula os vértices dun cadrado se dous deses vértices non consecutivos son $(3, 1)$ e $(9, -7)$.

69 Os vértices dun triángulo son $(-7, 3)$, $(1, 1)$ e $(-1, -5)$. Calcula os puntos medios dos seus lados. Comproba que o triángulo que determinan ten os lados paralelos ao primeiro e que a medida dos seus lados é a metade.

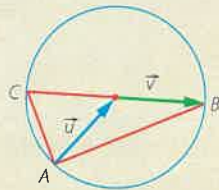
70 Dados os puntos $A(3, 0)$ e $B(-3, 0)$, obtén un punto C sobre o eixe de ordenadas, de modo que o triángulo que describan sexa equilátero. Hai unha solución única? Calcula a área dos triángulos que resultan.

71 Que condicións teñen que cumprir os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ para que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$?

Con este resultado demostra que se un paralelogramo ten as diagonais perpendiculares, só pode ser un cadrado ou un rombo.

72 O lado maior deste triángulo é un diámetro da circunferencia.

Expresa o vector $\vec{AC}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$. Realiza o produto escalar $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ e simplifica todo o posible. Que resultado obtés?



Ecuacións da recta

73 Escribe as ecuacións vectorial e paramétricas das rectas que cumpren estas condicións.

- a) Pasa polos puntos $(-3, 1)$ e $(5, 3)$.
 b) Pasa polo punto $P(3, -4)$ e o seu vector director é $\vec{v} = (-2, 7)$.
 c) A súa ecuación explícita é $y = -3x + 4$.

74 Expresa a ecuación continua da recta que:

- ooo a) Pasa polos puntos $(8, 3)$ e $(1, 5)$.
 b) Pasa polo punto $P(-2, 5)$ e ten como vector director $\vec{v} = (3, -4)$.
 c) A súa ecuación xeral é $-2x + y + 7 = 0$.

75 Escribe a ecuación explícita da recta que:

- ooo a) Pasa polos puntos $(-3, 5)$ e $(3, -1)$.
 b) Pasa polo punto $P(-1, 0)$ e ten como vector director $\vec{v} = (-3, -2)$.
 c) A súa ecuación continua é $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5}$.

76 Comproba se os puntos $A(-3, 2)$ e $B(5, -1)$ están nas rectas.

- a) $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$ c) $5x - 2y + 19 = 0$
 b) $y = \frac{5x-3}{3}$ d) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+7}{2}$

77 Expresa en forma vectorial, paramétrica e continua a ecuación da recta que:

a) Pasa polo punto (1, 3) e é paralela á recta

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4}$$

b) É paralela á recta $5x - 2y + 12 = 0$ e pasa polo punto $(-2, 5)$.

78 Expresa en forma explícita a recta que:

a) Pasa polo punto $(0, -1)$ e é paralela á recta

$$\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -4 \end{cases}$$

b) É paralela á recta $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-1}$ e pasa polo punto $(5, -2)$.

79 Escribe a ecuación xeral da recta que:

a) Pasa polo punto $(10, -2)$ e é paralela á recta

$$\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

b) É paralela á recta $y = \frac{8x-3}{2}$ e pasa polo punto $(4, 0)$.

80 Escribe as ecuacións vectorial e paramétricas da recta.

a) Pasa polo punto $(0, -3)$ e é perpendicular

$$\text{á recta } \frac{x+2}{-3} = \frac{y+1}{4}$$

b) Pasa polo punto $(-5, 0)$ e é perpendicular á recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

81 Determina a ecuación continua da recta que cumpre estas condicións.

a) Pasa polo punto $(7, -1)$ e é perpendicular

$$\text{á recta } y = \frac{-x+6}{3}$$

b) Pasa polo punto $(-4, 4)$ e é perpendicular á recta $-2x + y + 7 = 0$.

82 Calcula a ecuación explícita da recta que:

a) Pasa polo punto $(2, -5)$ e é perpendicular

$$\text{á recta } \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-3}$$

b) Pasa polo punto $(-4, 8)$ e é perpendicular á recta $-2x + 3y - 16 = 0$.

83 Determina a ecuación dunha recta que pasa polos puntos $(-1, -10)$ e $(2, c)$, sabendo que a súa pendente é 7. Expresa a recta en forma continua e xeral.

84 Determina o punto da recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$, que dista 2 unidades do punto $P(-2, 2)$.

Posicións relativas de dúas rectas

85 Estuda a posición relativa que teñen estas rectas.

a) $r: \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 7 - 2\mu \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = -\mu \end{cases}$

86 Decide que posición relativa teñen as rectas.

a) $r: \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-2} \quad s: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{1}$

b) $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} \quad s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-3}$

87 Investiga que posición relativa teñen os seguintes pares de rectas.

a) $r: 3x - 5y + 9 = 0 \quad s: x + 4y - 3 = 0$

b) $r: 6x - 4y + 11 = 0 \quad s: -9x + 6y - 1 = 0$

c) $r: 4x - y + 1 = 0 \quad s: 2x - 3y + 13 = 0$

88 Discute a posición relativa destas rectas.

a) $r: y = \frac{6x-1}{4} \quad s: y = \frac{-3x+5}{-2}$

b) $r: y = \frac{6x+18}{9} \quad s: y = \frac{4x+12}{6}$

89 En que posición relativa están estas parellas de rectas?

a) $r: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \quad s: x + 2y - 7 = 0$

b) $r: y = \frac{5x+1}{-2} \quad s: \frac{x+3}{2} = \frac{y-7}{-5}$

90 Que posición relativa manteñen os seguintes pares de rectas?

a) r pasa por $(-3, 4)$ e por $(8, -1)$.

$$s: x - 2y + 15 = 0$$

b) r pasa por $(-1, 4)$ e por $(2, -5)$.

$$s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-7}{3}$$

91 En que posición relativa están estas parellas de rectas?

a) r é perpendicular a $3x - 4y + 11 = 0$.

$$s: \begin{cases} x = -6\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \end{cases}$$

b) r é unha recta perpendicular a $y = \frac{2x+3}{-5}$.

$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5}$$

92 Determina a ecuación da recta r , que é perpendicular a $s: 3x - 2y + 1 = 0$ e que corta esta recta en $P(0, 2)$.

93 Calcula os puntos de corte, se é posible, das parellas de rectas.

a) $r: 2x - y + 8 = 0$ $s: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{cases}$

b) $r: y = \frac{-2x + 7}{3}$ $s: \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{-2}$

c) $r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-6}$ $s: 3x + y + 2 = 0$

d) $r: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 5 + 8\lambda \end{cases}$ $s: \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 7}{-4}$

e) $r: y = \frac{6x + 3}{2}$ $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \frac{3}{2} + 3\lambda \end{cases}$

94 Calcula o valor que debe tomar k para que a recta $\frac{x+1}{k} = \frac{y-2}{3}$ sexa paralela a $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 5\lambda \end{cases}$.

95 Encontra o valor de a para que a recta $ax + 3y - 7 = 0$ sexa paralela a $\frac{x-1}{5} = y + 2$.

96 Para que valores de m son estas rectas perpendiculares?
 $r: y = mx + 6$ $s: 8x - 5y + 1 = 0$

97 Proba que todas as rectas cunha ecuación do tipo $y = ax + a$ pasan polo mesmo punto. Calcula o punto e a recta dese tipo que é paralela a: $\begin{cases} x = 21 - 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$.

98 Calcula a perpendicular trazada desde o punto P á recta r .

a) $r: 2x - 5y + 9 = 0$ $P(4, -14)$

b) $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \end{cases}$ $P(4, -5)$

c) $r: y = \frac{3x - 2}{5}$ $P(2, -4)$

99 Determina a recta paralela a r que pasa polo punto simétrico de P respecto da recta r .

a) $r: 2x - 3y + 10 = 0$ $P(4, -7)$

b) $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ $P(4, 4)$

c) $r: y = \frac{3x - 1}{4}$ $P(5, -9)$

100 Encontra a ecuación da recta simétrica de r respecto da recta s .

a) $r: y = \frac{x - 4}{2}$ $s: -x + 2y + 4 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$ $s: 2x + y - 7 = 0$

Ángulos e distancias entre rectas

101 Determina o ángulo que forman as rectas.

a) $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{cases}$

b) $r: y = 3x + 2$ $s: y = \frac{4x + 1}{-2}$

c) $r: \frac{x}{2} = \frac{y - 4}{6}$ $s: \frac{2x + 3}{-1} = \frac{y}{2}$

d) $r: 20x - 4y + 1 = 0$ $s: -15x + 3y + 7 = 0$

102 Que ángulo forman as rectas?

a) $r: y = \frac{-6x - 4}{3}$ $s: -4x + 2y - 1 = 0$

b) $r: x + 1 = \frac{y - 5}{2}$ $s: y = \frac{9x - 8}{3}$

c) $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$ $s: 2x + 2y - 1 = 0$

d) $r: y = \frac{6x + 1}{-3}$ $s: \frac{x}{2} = \frac{y + 1}{3}$

e) $r: 3x - y - 3 = 0$ $s: \frac{x + 2}{2} = \frac{y}{-4}$

f) $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 \end{cases}$ $s: \frac{x - 4}{3} = \frac{y + 6}{6}$

103 Encontra o ángulo que forman a recta que pasa polos puntos $P(-1, 4)$ e $Q(3, 8)$ e a recta $\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 2}{8}$.

104 Obtén a medida dos ángulos que forman as parellas de rectas.

a) $r: y = \frac{4x - 3}{2}$ e s é a recta que pasa por $(-1, 6)$ e é paralela a $4x + 2y + 7 = 0$.

b) $r: x + 3 = \frac{y}{2}$ e s é a recta que pasa por $(3, 8)$ e é paralela a $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 9}{4}$.

c) $r: 8x - 2y - 3 = 0$ e s é perpendicular á recta $\begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$ e pasa por $(3, -2)$.

105 Encontra o valor de m para que $y = mx - 1$ forme un ángulo de 45° con $\frac{x + 2}{-3} = \frac{y - 3}{6}$.

106 Obtén o valor que debe ter b para que a recta $3x + by + 6 = 0$ forme un ángulo de 60° coa recta $y = \frac{x + 4}{-3}$.

ACTIVIDADES

107 Calcula a distancia do punto $P(4, -2)$ ás rectas.

•••

a) $-6x + 8y - 5 = 0$

c) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6}$

b) $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$

d) $y = \frac{4x-5}{3}$

108 Calcula a distancia da orixe de coordenadas á recta

•••

que pasa por $(-3, 6)$ e é paralela a $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{8}$.

109 Que distancia hai entre os pares de rectas?

•••

a) $r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$ $s: -x + 2y + 5 = 0$

b) $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{6}$ $s: y = \frac{8x-3}{4}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{cases}$ $s: y = \frac{-x-1}{3}$

110 Calcula o valor de a para que a distancia do punto

•••

á recta sexa de 4 unidades.
 $r: 12x + 5y - 19 = 0$ $P(3, a)$

111 Calcula o valor de b para que a recta e o punto

•••

se encontren a 5 unidades de distancia.
 $r: \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3}$ $P(-4, 1)$

112 Determina a para que as dúas rectas sexan paralelas

•••

e calcula, nese caso, a distancia que as separa.
 $r: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = -1 + a\lambda \end{cases}$ $s: 4x - 3ay + 6 = 0$

113 Encontra a ecuación dunha recta paralela a

•••

$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-5}{4}$ e que se atopa a 8 unidades de distancia dela.

Problemas con rectas

114 Encontra as ecuacións, nas formas que se piden,

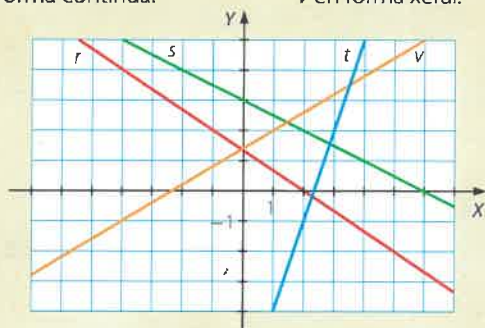
•••

r en forma paramétrica.

t en forma explícita.

s en forma continua.

v en forma xeral.



115 Comproba se están aliñados os puntos $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$

•••

e $R(11, -5)$. En caso afirmativo, escribe a ecuación da recta que os contén.

116 Verifica se os puntos $(-4, -3)$, $(1, 4)$ e $(16, 23)$ están aliñados. En caso afirmativo, escribe a ecuación da recta.

117 Calcula a área do triángulo se os seus vértices son $(2, 1)$, $(4, 3)$ e $(6, -1)$.

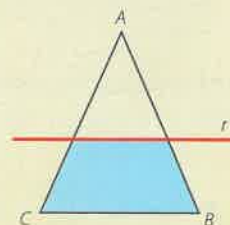
•••

118 As rectas que conteñen os lados dun triángulo son $x + y - 5 = 0$, $6x + 5y - 24 = 0$ e $2x + y - 8 = 0$. Calcula os seus vértices e a súa área.

119 A recta que pasa polo punto $(2, 3)$ e é paralela á recta $\frac{x-6}{4} = \frac{y+3}{-6}$ forma un triángulo cos eixes cartesianos. Calcula a súa área.

120 Temos un triángulo de vértices $A(4, 9)$, $B(11, 10)$ e $C(9, 4)$. Comproba que é un triángulo isóscele. Trazamos unha recta paralela ao lado desigual, pasando por $(7, 6)$, e fórmase un trapezio isóscele. Determina a súa área.

•••



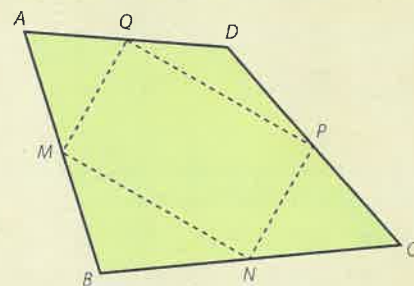
121 Os puntos $A(2, 2)$ e $B(-10, -2)$ son os vértices correspondentes ao lado desigual dun triángulo

•••

isóscele. O outro lado está sobre a recta $\begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$. Determina e calcula a área do triángulo.

122 Nun cuadrilátero ABCD debuxamos os puntos medios dos seus lados, M , N , P e Q , e unímoslos formando outro cuadrilátero. Determina as coordenadas dos demais puntos se $A(7, 9)$, $M(5, 6)$, $P(9, 6)$ e $Q(12, 0)$.

•••



Comproba que se verifica a propiedade de que os puntos medios dos lados de calquera cuadrilátero son os vértices dun paralelogramo.

123 Os puntos $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(5, 2)$ e $(4, -1)$ son os vértices dun cuadrilátero. Obtén as ecuacións das súas diagonais e da súa lonxitude. Indica de que tipo de cuadrilátero se trata.

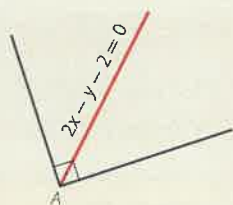
124 Calcula o centro dun paralelogramo do que coñecemos tres vértices: $(5, -1)$, $(9, 5)$ e $(-1, -5)$. Cantas solucións ten este problema? Por que?

•••

Fai un debuxo en que se mostren todas as solucións.

- 125** Obtén a ecuación da mediatriz do segmento se os seus extremos son $(1, 5)$ e $(-3, -7)$.

- 126** Un ángulo recto contén o seu vértice no punto $A(3, 4)$ e a súa bisectriz ten por ecuación $2x - y - 2 = 0$. Calcula as ecuacións dos seus lados.



- 127** Encontra unha recta que forme un ángulo de 60° coa recta $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$ e que pase polo punto $(-4, 2)$.

- 128** Calcula o valor de k para que as tres rectas: $2x + 5y - 1 = 0$, $-x + 2y + k = 0$ e $4x + 7y - 5 = 0$ se corten no mesmo punto. Determina as coordenadas dese punto.

- 129** Obtén os ángulos do triángulo se os seus vértices son $(3, -5)$, $(1, 6)$ e $(-3, 2)$.

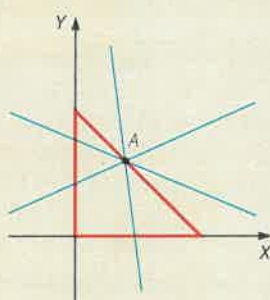
- 130** Calcula un punto da recta $2x - y + 18 = 0$ que equidiste dous puntos $(3, -1)$ e $(7, 3)$.

- 131** Calcula a ecuación dunha recta r que pase polos puntos $(5, -4)$ e $(3, 6)$ e, despois, a ecuación dunha recta s paralela a r e que estea a 8 unidades de distancia.

- 132** Encontra un punto no eixe de abscisas que estea á mesma distancia do punto $A(5, 4)$ que da recta $r: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{3}$.

- 133** Dados os puntos $P(-3, 2)$ e $Q(5, 6)$, determina a ecuación da recta que pasa por P e que dista 5 unidades de Q . Esa recta forma un ángulo coa recta que une P e Q . Calcula a súa medida.

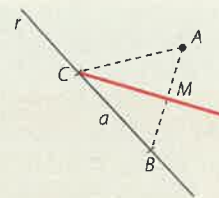
- 134** De todas as rectas que pasan polo punto $A(2, 3)$, calcula a recta que determina segmentos iguais ao cortar os dous eixes cartesianos.



- 135** Calcula a ecuación da recta que corta aos eixes de coordenadas nos puntos $(3, 0)$ e $(0, 5)$. Comproba que esa ecuación pode escribirse na forma: $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$. Comproba que se unha recta corta os eixes nos puntos $(a, 0)$ e $(0, b)$, a súa ecuación pode escribirse na forma: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Esta maneira de escribir unha recta chámase *forma canónica ou segmentaria*.

- 136** O punto $(-4, 2)$ é o vértice A dun triángulo do que o lado a se localiza sobre a recta $3x + 2y + 18 = 0$. A ecuación da mediana que parte do vértice C é $x + y + 5 = 0$. Determina os vértices B e C .



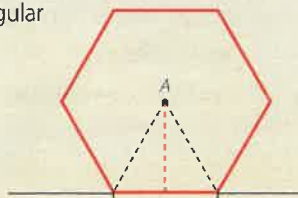
- 137** Comproba que as rectas son paralelas.

$$r: \frac{x-1}{6} = \frac{y+4}{8} \quad s: -4x + 3y + 6 = 0$$

Demostra que todos os puntos M que se obteñen polo seguinte procedemento se sitúan sobre unha recta, e calcula a súa ecuación: «Toma un punto A da recta r e un punto B de s , e calcula o punto medio M do segmento de extremos A e B ».

- 138** Tres dos vértices dun rombo son os puntos $(2, -1)$, $(5, 3)$ e $(10, 3)$. Calcula o cuarto vértice e calcula a súa área.

- 139** O centro dun hexágono regular é o punto $(6, -2)$ e un lado calcúlase sobre a recta de ecuación $-4x + 3y + 5 = 0$. Determina as coordenadas dos vértices e a súa área.



- 140** Dous vértices non consecutivos dun rombo están nos puntos $(3, 1)$ e $(9, 9)$ e un dos seus lados é paralelo á recta $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases}$. Calcula as coordenadas dos outros vértices, a lonxitude do seu lado e a área.

- 141** Xoán e Belén estanse mirando, un ao outro, a través dun espello situado segundo a recta de ecuación $y = -x + 2$. Belén encóntrase no punto $(-9, -1)$ e Xoán en $(-4, 3)$. Que coordenadas ten o punto M ao que miran?



- 142** Calcula as mediatrices do triángulo se os seus vértices son $(-1, 1)$, $(7, -1)$ e $(5, -3)$. Proba que se cortan no circuncentro, que é o centro da circunferencia circunscrita ao triángulo. Comproba que pode trazarse unha circunferencia que pasa polos tres vértices, con centro nese punto. Canto medirá o raio?

- 143** Calcula as medianas do triángulo cuxos vértices son $(-4, 6)$, $(3, 0)$ e $(-2, -3)$. Proba que se cortan no baricentro. Comproba que os vértices dun triángulo teñen coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , e (x_3, y_3) , e as coordenadas do baricentro son:

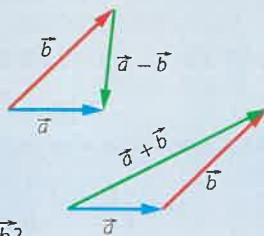
$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

PARA FINALIZAR...

Reflexiona sobre a teoría

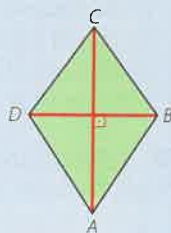
- 144** Calcula o ángulo que deben formar dous vectores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, para que os seus módulos coincidan co módulo da súa diferenza, $\vec{a} - \vec{b}$: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

E para que coincidan co módulo da súa suma, $\vec{a} + \vec{b}$?



- 145** Demuestra que se dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ teñen o mesmo módulo, entón $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ forman un ángulo recto.

Deduce deste resultado que as diagonais dun rombo son perpendiculares.



IDEA CLAVE

Considera os resultados da actividade anterior.

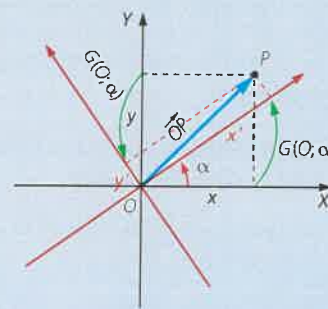
- 146** Se $\vec{u}$ é un vector do plano de módulo 1:

- Cantos vectores $\vec{v}$ hai de módulo 2, tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$?
- E tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$?
- E tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$?

IDEA CLAVE

Estuda o valor do coseno do ángulo que forman.

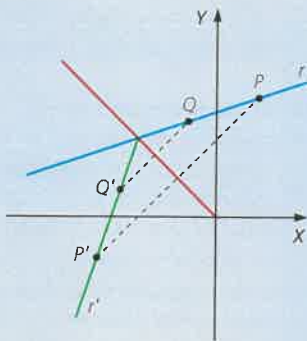
- 147** As coordenadas dun punto P nun sistema cartesiano son (x, y) . Calcula as coordenadas (x', y') do mesmo punto despois de xirar os eixes, arredor da orixe de coordenadas, un ángulo α .



Pensa un pouco máis

- 148** Cal das seguintes ecuacións corresponde á recta simétrica, respecto da bisectriz do segundo cuadrante, á recta r , de ecuación $y = 3x + 4$?

- $3y = x + 4$
- $3y = x - 4$
- $y = 3x - 4$
- $y = 4x + 3$



Análise do enunciado

Para trazar unha recta simétrica a outra hai que calcular o simétrico de dous dos seus puntos e trazar a recta que os une.

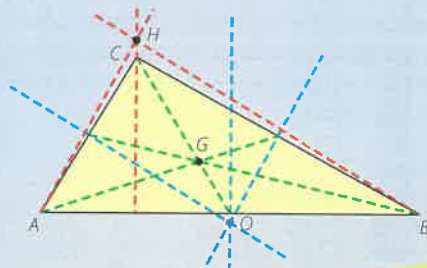
Deseño da resolución

Se a recta da que queremos calcular a súa simétrica corta a bisectriz, a súa simétrica tamén cortará a bisectriz.

Clave para resolver o problema

Se a recta e a bisectriz non son paralelas, as tres rectas deben pasar polo mesmo punto.

- 149** Dado o triángulo de vértices $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$ e $C(3, -2)$, comproba que o baricentro G , o ortocentro H e o circuncentro O están en liña recta (recta de Euler) e que verifican a relación $GH = 2GO$.



Análise do enunciado

Baricentro: punto de corte das medianas dun triángulo.

Ortocentro: punto de corte das alturas dun triángulo.

Circuncentro: punto de corte das mediatrices dun triángulo.

Deseño da resolución

Hai que comprobar que os tres puntos están aliñados.

Clave para resolver o problema

A distancia entre dous puntos coincide co módulo do vector que definen.