

4

Números complexos

LITERATURA E MATEMÁTICAS

As tribulacións do estudante Törless

—Dime, entendiches ben todo isto?

—O que?

—Ese asunto dos números imaxinarios.

—Si, non é tan difícil. O único que hai que ter presente é que a raíz cadrada de menos un é a unidade de cálculo.

—Diso precisamente se trata. Tal cousa non existe. Todo número, xa sexa positivo, xa sexa negativo, dá como resultado, se se eleva ao cadrado, algo positivo. Por iso non pode haber ningún número real que sexa a raíz cadrada de algo negativo.

—Completamente certo. Pero, por que, de todos os xeitos, non habería de intentarse aplicar tamén a un número negativo a operación da raíz cadrada? Desde logo que o resultado non pode ter ningún valor real; por iso o resultado se chama imaxinario. E como cando un di: aquí, antes, sempre sentaba alguén; poñámoslle hoxe entón tamén unha cadeira. E aínda cando a persoa estea morta, obramos coma se aínda puidese acudir a nós.

—Pero, como pode facerse tal cousa, cando se sabe, con toda precisión matemática, que é imposible?

—A pesar diso faise precisamente coma se fose posible. Quizais poida obterse algún resultado. E que outra cousa ocorre, a fin de contas, cos números irracionais? Unha división que nunca termina, unha fracción cun valor que nunca podes esgotar, aínda cando pases a vida facendo a operación. E, que pensas das paralelas, que se cortan no infinito? Creo que non habería matemáticas se pretendésemos sabelo todo a conciencia e exactamente.

—Niso tes razón. Cando un considera as cousas así, todo parece bastante correcto; pero o curioso está precisamente en que se poidan facer cálculos reais e se poida chegar por fin a un resultado comprensible con semellantes valores imaxinarios, que dalgunha maneira son imposibles. [...]

—Considero moi posible que aquí os inventores das matemáticas desen un traspés. Porque, en efecto, por que aquilo que está máis alá do noso entendemento non podería permitirse gastarlle precisamente semellante broma ao entendemento? Pero a cuestión non me preocupa moito, pois sei que todas estas cousas non conducen a nada.

ROBERT MUSIL

Números complexos en formas binómica, polar e trigonométrica

Representación de números complexos

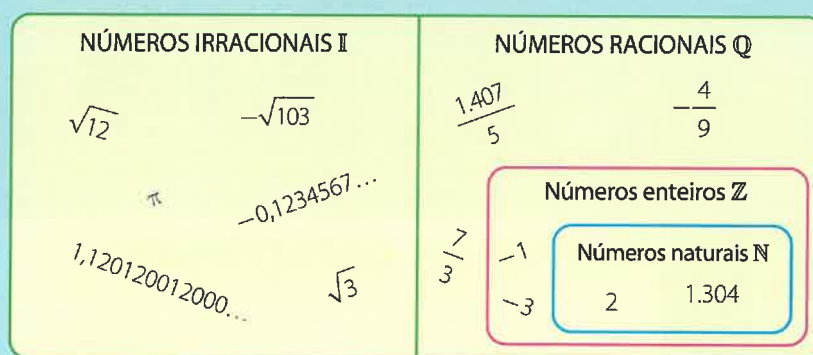
Operacións con números complexos en formas binómica e polar

Törless é un idealista e o seu amigo é un pragmático. É verdade que $\sqrt{-1}$ non é un número real? Explica a referencia que fai o amigo aos números irracionais cando os compara con $\sqrt{-1}$. É correcto o que di?

Números reais

O conxunto dos números reais está formado polos números racionais e irracionais, e represéntase por $\mathbb{R}$.

NÚMEROS REAIS $\mathbb{R}$



Repasa

- 1 Pon tres exemplos de números reais que non sexan racionais, e outros tres exemplos de números reais que non sexan irracionais.

Número de raíces dun número real

	Radicando	Índice	N.º de raíces reais
$\sqrt[n]{a}$	$a > 0$	n impar	1 raíz positiva
		n par	2 raíces: unha positiva e a súa oposta
	$a = 0$	n par ou impar	1 raíz: $\sqrt[n]{0} = 0$
	$a < 0$	n impar	1 raíz negativa
		n par	Ningunha raíz

Repasa

- 2 Calcula as raíces reais dos seguintes radicais.

a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) $\sqrt[3]{-1}$ d) $\sqrt[5]{32}$ e) $\sqrt[5]{0}$

Operacións con radicais

- $b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} = (b + c)\sqrt[n]{a}$
- $b\sqrt[n]{a} - c\sqrt[n]{a} = (b - c)\sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Simplificamos o radical

$$3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5^2} = 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$$

Cociente de potencias da mesma base

$$(\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{5^2} = \left(2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$$

$$(\sqrt[4]{6})^3 = \left(6^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^3}$$

Repasa

- 3 Resolve: $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$

Paso de graos a radiáns, e viceversa

Paso de graos a radiáns

Expresamos 45° en radiáns.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } 360^\circ \xrightarrow{\text{son}} 2\pi \text{ rad} \\ 45^\circ \xrightarrow{\text{serán}} x \text{ rad} \end{array} \right\} x = \frac{2\pi \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Paso de radiáns a graos

Expresamos $\frac{\pi}{6}$ rad en graos.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } 2\pi \text{ rad} \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \frac{\pi}{6} \text{ rad} \xrightarrow{\text{serán}} x \text{ graos} \end{array} \right\} x = \frac{360 \cdot \frac{\pi}{6}}{2\pi} = \frac{360\pi}{6 \cdot 2\pi} = 30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

Repasa

4 Expresa en radiáns estes ángulos.

- a) 45° b) 60° c) 120° d) 240° e) 300°

5 Expresa en graos os ángulos.

- a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) $\frac{\pi}{2}$ rad c) π rad d) $\frac{5\pi}{4}$ rad e) $\frac{3\pi}{5}$ rad

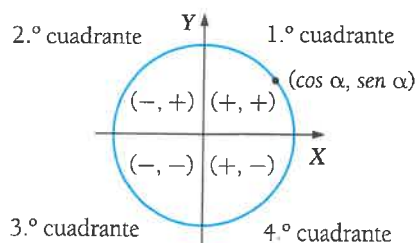
Razóns trigonométricas dos ángulos máis usuais

Ángulo α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\text{sen } \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\text{cos } \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\text{tg } \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non existe	0	Non existe	0

Repasa

6 Calcula: $\left(\text{sen } 45^\circ - \frac{\text{cos } 180^\circ - \text{tg } 30^\circ}{\text{sen } 60^\circ} \right) (\text{cos } 30^\circ - \text{sen } 90^\circ)$

Signos das razóns trigonométricas



	1.º cuadrante	2.º cuadrante	3.º cuadrante	4.º cuadrante
Ángulo α	De 0° a 90°	De 90° a 180°	De 180° a 270°	De 270° a 360°
$\text{sen } \alpha$	+	+	-	-
$\text{cos } \alpha$	+	-	-	+
$\text{tg } \alpha$	+	-	+	-

Repasa

7 Determina o signo do seno, o coseno e a tanxente destes ángulos.

- a) 150° b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 240° d) -60° e) $\frac{2\pi}{3}$

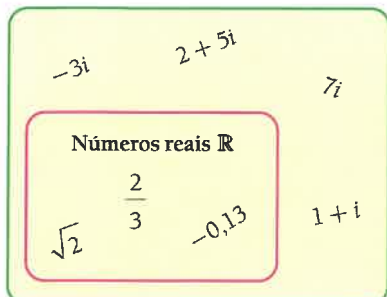
1 Números complexos

Existen ecuacións que non teñen solución en $\mathbb{R}$.

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$$

Para expresar estas situacións utilizamos os **números complexos**.

Números complexos $\mathbb{C}$



- **Unidade imaxinaria.** É o número $\sqrt{-1}$ e désígnase por i .
- **Números complexos.** Son aqueles que se poden escribir da forma $a + bi$, onde a e b son números reais e i é a unidade imaxinaria.

Nun número complexo $a + bi$ pódese distinguir unha **parte real**, a , e unha **parte imaxinaria**, b .

O conxunto de todos os números complexos désígnase por $\mathbb{C}$ e defínese como: $\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}\}$

Decátate

Os números reais son números complexos en que a súa parte imaxinaria é cero.

$$7 = 7 + 0i$$

$$-\frac{5}{3} = -\frac{5}{3} + 0i$$

Exemplos

- 1 Resolve esta ecuación e expresa as súas solucións mediante números complexos.

$$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i \\ x_2 = -\sqrt{-4} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = -2i \end{cases}$$

As solucións da ecuación $x^2 + 4 = 0$ son: $x_1 = 2i$ e $x_2 = -2i$.

- 2 Determina a parte real e a parte imaxinaria destes números complexos.

Número complexo	$3 + 5i$	$3 - 5i$	$-3 - 5i$	-3	$5i$
Parte real	3	3	-3	-3	0
Parte imaxinaria	5	-5	-5	0	5

Dous **números complexos** son **iguais** cando teñen a mesma parte real e a mesma parte imaxinaria.

$$a + bi = a' + b'i, \text{ cando } a = a' \text{ e } b = b'$$

Exemplo

- 3 Calcula x e y para que $4(x + 1) - 6i$ e $8 + (2y + 3)i$ sexan iguais.

$$4(x + 1) - 6i = 8 + (2y + 3)i \rightarrow \begin{cases} 4(x + 1) = 8 \rightarrow x = 1 \\ -6 = 2y + 3 \rightarrow y = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

ACTIVIDADES

- 1 Escribe estes números como números complexos.

a) $\sqrt{-3}$ b) $\sqrt[3]{-16}$ c) 3 d) -3

- 2 Resolve as seguintes ecuacións e expresa as súas solucións como números complexos.

a) $3x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - x + 1 = 0$

- 3 Escribe dous números complexos en que a parte real sexa -1, e outros dous en que a parte imaxinaria sexa -1.

- 4 Determina x e y para que estes números complexos sexan iguais.

a) $-2x + 3i$ e $\frac{3}{2} - 2yi$ b) $-x + yi$ e $7 - 6i$

1.1. Forma binómica dun número complexo

A expresión $z = a + bi$ dun número complexo chámase **forma binómica**. Nun número complexo $z = a + bi$:

- Se $b = 0$, é dicir, é da forma $z = a$, é un número real.
- Se $b \neq 0$ e $a = 0$, é dicir, é da forma $z = bi$, é un **número imaxinario puro**.

Esríbese así

Para designar un número complexo adóitase usar a letra z .

$$z = a + bi$$

Exemplo

4 Clasifica os seguintes números en reais, imaxinarios puros e complexos.

$$-3 + 2i \quad -\frac{44}{5} \quad -\frac{1}{2} + i \quad -3 \quad 1 + i \quad -\frac{17}{3}i \quad 27 \quad -3i$$

Números reais	$-\frac{44}{5}$	-3	27
Números imaxinarios puros	$-\frac{17}{3}i$	$-3i$	
Números complexos	$-3 + 2i$	$-\frac{44}{5}$	$-\frac{1}{2} + i$
	$1 + i$	$-\frac{17}{3}i$	27

1.2. Conxugado e oposto dun número complexo

Dado un número complexo $z = a + bi$:

- O **oposto** do número z é o número $-z = -a - bi$.
- O **conxugado** do número z é o número $\bar{z} = a - bi$.

Exemplo

5 Calcula o oposto e o conxugado destes números complexos.

	$1 + 3i$	$-1 + 3i$	$2 - i$	$-2 - i$	$5i$	$-2i$	-3
Oposto	$-1 - 3i$	$1 - 3i$	$-2 + i$	$2 + i$	$-5i$	$2i$	3
Conxugado	$1 - 3i$	$-1 - 3i$	$2 + i$	$-2 + i$	$-5i$	$2i$	-3

ACTIVIDADES

5 Dado o número complexo $z = -2x + \frac{y}{2}i$, determina o valor de x e y para que sexa:

- Un número real.
- Un número imaxinario puro.
- Un número complexo que non sexa real nin imaxinario puro.

6 Calcula o oposto e o conxugado dos seguintes números complexos.

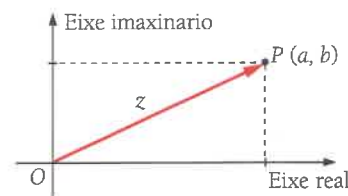
- $\frac{1}{2} + i$
- $-\frac{1}{2} + i$
- $\frac{1}{2} - i$
- $-\frac{1}{2} - i$
- i
- -5
- $\frac{5}{2}$
- 0

2 Representación de números complejos



Os números complexos representáanse no **plano complexo**. O plano complexo consta duns eixes cartesianos nos que no eixe X se representa a parte real dun número complexo e no eixe Y, a parte imaxinaria.

No plano complexo, a cada número complexo $z = a + bi$ fáiselle corresponder o punto P de coordenadas (a, b) , que se chama **afixo** do número complexo z .



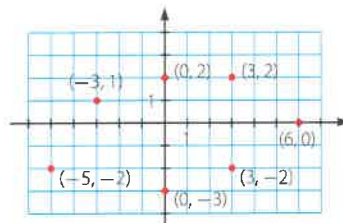
Un número complexo pódese representar como un vector $\vec{OP}$, con extremos na orixe de coordenadas e no afixo do número complexo.

Polo tanto, a cada número complexo correspóndelle un punto do plano complexo, e reciprocamente, dado un punto calquera do plano existe un único número complexo do cal ese punto é o afixo.

Exemplos

6 Representa graficamente estes números complexos.

- a) $z = 3 + 2i$
- b) $z = -3 + i$
- c) $z = 3 - 2i$
- d) $z = -5 - 2i$
- e) $z = 2i$
- f) $z = -3i$
- g) $z = 6$



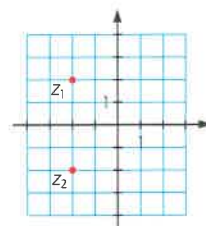
7 Representa graficamente as solucións desta ecuación.

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = -2 + 2i \\ x_2 = -2 - \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = -2 - 2i \end{cases}$$

As solucións son dous números complexos conxugados:

$$z_1 = -2 + 2i \quad z_2 = -2 - 2i$$



Non esquezas

Se un número complexo z é solución dunha ecuación, tamén é solución o seu conxugado, $\bar{z}$.

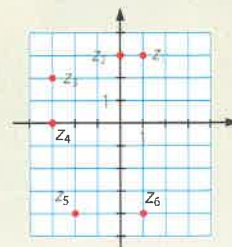
ACTIVIDADES

7 Representa graficamente os seguintes números complexos.

- a) $\frac{1}{2} + i$
- c) $\frac{1}{2} - i$
- e) i
- g) $\frac{5}{2}$
- b) $-\frac{1}{2} + i$
- d) $-\frac{1}{2} - i$
- f) -5
- h) 0

Agora contesta, onde estará situado un número real?
E se o número é imaxinario puro?

8 Escribe en forma binómica os números complexos correspondentes aos afixos representados.



3 Operacións con números complexos

3.1. Potencias de i

Como $i = \sqrt{-1}$, resulta que:

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1 & i^2 = -1 & i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 & i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1 \\ i^1 = i & i^3 = i^2 \cdot i = -i & i^5 = i^4 \cdot i = i & i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i \end{array}$$

As potencias de i só toman os valores 1, i , -1 e $-i$. Para calcular o valor dunha potencia de i calculamos o resto da división do expoñente entre 4. O valor da potencia inicial é igual ao valor de i elevado ao resto desa división.

Exemplo

8 Calcula o valor destas potencias de i .

$$\text{a) } i^{26} \xrightarrow{26 = 6 \cdot 4 + 2} i^{26} = i^2 = -1 \quad \text{b) } i^{44} \xrightarrow{44 = 11 \cdot 4} i^{44} = i^0 = 1$$

3.2. Operacións con números complexos

Dados dous números complexos $(a + bi)$ e $(c + di)$, expresados en forma binómica, definimos as seguintes operacións.

Suma $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Resta $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Multipliación $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

División $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

↑
Multiplicamos e dividimos polo conxugado do denominador

Exemplo

9 Realiza as seguintes operacións entre números complexos.

a) $(5 - 4i) + (-2 + i) = (5 - 2) + (-4 + 1)i = 3 - 3i$

b) $(5 - 4i) - (-2 + i) = (5 + 2) + (-4 - 1)i = 7 - 5i$

c) $(5 - 4i)(-2 + i) = 5(-2 + i) + (-4i)(-2 + i) = -10 + 5i + 8i - 4i^2 = -10 + 5i + 8i - 4(-1) = -10 + 5i + 8i + 4 = -6 + 13i$

d) $\frac{5 - 4i}{-2 + i} = \frac{(5 - 4i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{-10 - 5i + 8i + 4i^2}{(-2)^2 - i^2} = \frac{-10 - 5i + 8i - 4}{4 + 1} = \frac{-14 + 3i}{5} = -\frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$

↑
Conxugado: $-2 - i$

Non esquezas



- O produto dun número complexo, z , polo seu conxugado, $\bar{z}$, é un número real.

$$\begin{aligned} (a + bi)(a - bi) &= \\ &= a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - bi^2 = \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

- O inverso dun número complexo, z , é $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

9 Resolve as seguintes operacións.

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i)$

c) $(-1 - i)(-4 + 5i)$

b) $\frac{-1 - i}{-4 + 5i}$

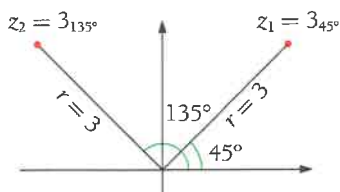
d) $\frac{(-2 + i)(1 + 3i)}{-1 + 2i} - 2i$

10 Calcula x para que o resultado sexa un número real.

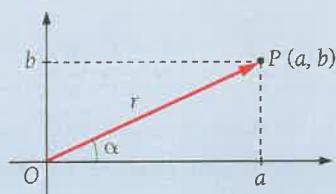
a) $(2x - i)(-2 + 7xi)$

b) $\frac{2x - i}{-2 + 7i}$

4 Números complexos en forma polar

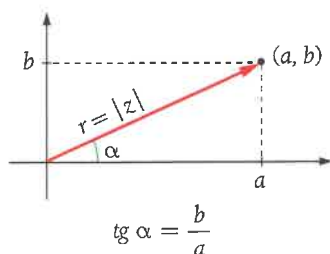


Dado un número complexo $z = a + bi$, definimos:



- **Módulo** dun número complexo z . É o módulo do vector $\overline{OP}$ mediante o que ese número se representa graficamente. Designase por $|z|$.
- **Argumento** dun número z . É o ángulo que forma o vector co eixe real. Designase por $\arg(z)$.

Se $|z| = r$ e $\arg(z) = \alpha$, o número complexo z pódese expresar como $z = r_\alpha$. Esta expresión de z chámase **forma polar**.



4.1. Paso de forma binómica a forma polar

Dado un número complexo $z = a + bi$ en forma binómica, a súa expresión en forma polar é $z = r_\alpha$, onde:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Faino así

COMO PASAMOS UN NÚMERO COMPLEXO DE FORMA BINÓMICA A FORMA POLAR

Expresa en forma polar os seguintes números complexos.

a) $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$

b) $z_2 = -1 + i$

PRIMEIRO. Calculamos o módulo.

a) $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

b) $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

SEGUNDO. Calculamos o argumento e expresamos o número en forma polar.

- Se as partes real e imaxinaria son positivas, α está entre 0° e 90° .
- Se a parte real é negativa e a imaxinaria é positiva, α está entre 90° e 180° .
- Se as partes real e imaxinaria son negativas, α está entre 180° e 270° .
- Se a parte real é positiva e a imaxinaria é negativa, α está entre 270° e 360° .

a) $\tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \xrightarrow{\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)} \alpha = 240^\circ \rightarrow z_1 = 2_{240^\circ}$

b) $\tan \alpha = \frac{1}{-1} = -1 \xrightarrow{\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)} \alpha = 135^\circ \rightarrow z_2 = \sqrt{2}_{135^\circ}$

Non esquezas

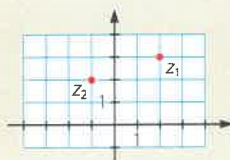
Un número complexo admite infinitos argumentos:

$$r_\alpha = r_{\alpha+2\pi} = r_{\alpha+4\pi} = r_{\alpha+6\pi} = \dots = r_{\alpha+2k\pi}$$

Tomaremos sempre como argumento dun número complexo o ángulo comprendido no intervalo $[0, 2\pi)$.

ACTIVIDADES

11 Determina a expresión polar dos números complexos representados.



12 Expresa en forma polar.

a) $2 + i$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

e) $-4i$

b) $-2 - i$

d) $2 - \sqrt{3}i$

f) 12

Forma polar de números reais e imaxinarios puros

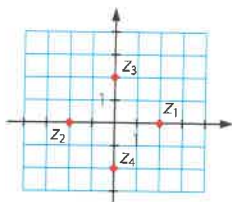
Un número real ten como módulo o valor absoluto do número e como argumento 0° , se é positivo, ou 180° , se é negativo.

Un número imaxinario puro ten como módulo o valor absoluto da súa parte imaxinaria e como argumento 90° , se é positivo, ou 270° , se é negativo.

Exemplo

10 Expresa estes números en forma polar.

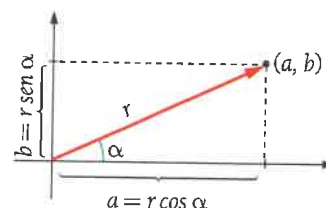
- a) $z_1 = 2 \rightarrow z_1 = 2_{0^\circ}$
- b) $z_2 = -2 \rightarrow z_2 = 2_{180^\circ}$
- c) $z_3 = 2i \rightarrow z_3 = 2_{90^\circ}$
- d) $z_4 = -2i \rightarrow z_4 = 2_{270^\circ}$



4.2. Paso de forma polar a forma binómica

Dado un número complexo $z = r_\alpha$ en forma polar, a súa expresión en forma binómica é $z = a + bi$, onde:

$$a = r \cos \alpha \quad b = r \sin \alpha$$



Faino así

COMO PASAMOS UN NÚMERO COMPLEJO DE FORMA POLAR A FORMA BINÓMICA

Expresa en forma binómica os seguintes números complexos.

- a) $z_1 = 3_{330^\circ}$
- b) $z_2 = 5_{270^\circ}$

PRIMEIRO. Calculamos a e b .

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= r \cos \alpha \xrightarrow{r=3, \alpha=330^\circ} a = 3 \cos 330^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} & b &= 3 \sin 330^\circ = -\frac{3}{2} \\ b &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a &= r \cos \alpha \xrightarrow{r=5, \alpha=270^\circ} a = 5 \cos 270^\circ = 0 & b &= 5 \sin 270^\circ = -5 \\ b &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

SEGUNDO. Expresamos o número en forma binómica.

$$\begin{aligned} \text{a) } z_1 &= 3_{330^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i & \text{b) } z_2 &= 5_{270^\circ} = -5i \end{aligned}$$

Se substituímos a e b en $z = a + bi$ por $r \cos \alpha$ e $r \sin \alpha$, obtemos:

$$z = a + bi = r \cos \alpha + (r \sin \alpha)i = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

A expresión $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ chámase **forma trigonométrica** do número complexo z .

Decátate

Dous números complexos escritos en forma polar son iguais se os seus módulos coinciden e os seus argumentos son iguais ou se diferencian nun múltiplo de 360° .

$$r_\alpha = s_\beta \rightarrow \begin{cases} r = s \\ \alpha = \beta + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

ACTIVIDADES

13 Expresa estes números en formas binómica e trigonométrica.

- a) 1_{120°
- b) 3_{240°
- c) $2_{\frac{\pi}{3}}$
- d) $3_{\frac{3\pi}{2}}$

14 Expresa os seguintes números complexos en forma polar.

- a) $3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
- b) $3(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

5 Multiplicación e división en forma polar

As operacións de suma e resta con números complexos en forma polar é aconsellable realizalas calculando previamente a súa forma binómica. Polo contrario, a multiplicación, a división, a potenciación e a radicación resultan máis sinxelas en forma polar.

5.1. Produto de números complexos en forma polar

O **produto** de dous números complexos **en forma polar** é outro número complexo en forma polar tal que:

- O seu módulo é o produto dos módulos dos factores.
- O seu argumento é a suma dos argumentos dos factores.

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

Para demostrar este resultado escribimos os números en forma trigonométrica.

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot s_\beta &= r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = \\ &= r \cdot s(\cos \alpha \cos \beta + i \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\ &= r \cdot s(\underbrace{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}_{\cos(\alpha + \beta)} + i(\underbrace{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}_{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}) = \\ &= r \cdot s(\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)) = (r \cdot s)_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

5.2. Cociente de números complexos en forma polar

O **cociente** de dous números complexos **en forma polar** é outro número complexo en forma polar tal que:

- O seu módulo é o cociente dos módulos dos factores.
- O seu argumento é a resta dos argumentos dos factores.

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} \quad \text{con } s \neq 0$$

Decátate



$$\frac{a}{b} = c \rightarrow b \cdot c = a$$

Esta definición é certa porque: $s_\beta \cdot \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} = \left(\cancel{s} \cdot \frac{r}{\cancel{s}}\right)_{\alpha-\beta+\beta} = r_\alpha$

Exemplo

11 Multiplica e divide estes números: $z_1 = 6_{130^\circ}$ e $z_2 = 2_{40^\circ}$.

$$z_1 \cdot z_2 = 6_{130^\circ} \cdot 2_{40^\circ} = (6 \cdot 2)_{130^\circ+40^\circ} = 12_{170^\circ} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{6_{130^\circ}}{2_{40^\circ}} = \left(\frac{6}{2}\right)_{130^\circ-40^\circ} = 3_{90^\circ}$$

ACTIVIDADES

15 Dados os números complexos:

$$z_1 = 2_{30^\circ}$$

$$z_2 = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$z_3 = 2_{\frac{5\pi}{4}}$$

calcula.

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_1 \cdot \bar{z}_3$

c) $z_3 \cdot z_3$

d) $(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2$

16 Dados os números complexos:

$$z_1 = 1_{210^\circ}$$

$$z_2 = 3[\cos(-30^\circ) + i \operatorname{sen}(-30^\circ)]$$

calcula.

a) $\frac{z_1}{z_2}$

b) $\frac{(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2}{z_2}$

6 Potencias de números complexos

A **potencia dun número complexo en forma polar** é outro número complexo en forma polar tal que:

- O seu módulo é a potencia n -ésima do módulo do número dado.
- O seu argumento é n veces o argumento do número dado.

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

Para demostrar este resultado utilizamos a definición de potencia.

$$(r_\alpha)^n = \underbrace{r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot r_\alpha \cdots r_\alpha}_{n \text{ veces}} = (r \cdot r \cdot r \cdots r)_{\alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha} = (r^n)_{n\alpha}$$

A partir deste resultado podemos calcular a potencia dun número complexo escrito en forma trigonométrica.

Dados un número complexo $z = r_\alpha$ e un número enteiro n , sempre se cumpre que:

$$z^n = (r_\alpha)^n = r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

Este resultado coñécese como a **fórmula de Moivre**.

Comprobamos este resultado: $z^n = (r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha} \stackrel{\text{Forma trigonométrica}}{=} r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$

Forma trigonométrica

Se $r = 1$, esta fórmula resulta moi útil en trigonometría.

$$(1_\alpha)^n = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Pódese calcular $\operatorname{sen} n\alpha$ e $\cos n\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$.

Exemplos

12 Calcula a seguinte potencia.

$$(2_{120^\circ})^5 = (2^5)_{5 \cdot 120^\circ} = 32_{600^\circ} = 32_{360^\circ + 240^\circ} = 32_{240^\circ}$$

13 Calcula $\operatorname{sen} 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$ utilizando a fórmula de Moivre.

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha$$

Desenvolvemos a primeira parte da igualdade:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^2 &= \cos^2 \alpha + 2i \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \\ &= (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + i(2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha) \end{aligned}$$

Igualamos este resultado coa segunda parte da igualdade:

$$\cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + i(2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha)$$

E, igualando a parte real e a parte imaxinaria, resulta:
$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

ACTIVIDADES

17 Dados os números complexos:

$$z_1 = 4_{330^\circ} \quad z_2 = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ \quad z_3 = 1 - i$$

calcula.

a) $(z_1)^2$ b) $(z_2)^3$ c) $(z_3)^4 \cdot \bar{z}_3$ d) $(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2$

18 Resolve esta operación.

$$[16 (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)] \cdot (2_{210^\circ})^4$$

19 Utilizando a fórmula de Moivre, expresa $\cos 3\alpha$ e $\operatorname{sen} 3\alpha$ en función de $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$.

7 Raíces de números complexos

Non esquezas



O número de raíces n -ésimas dun número complexo é exactamente n .

Cada raíz n -ésima dun número complexo en forma polar, $\sqrt[n]{r_\alpha}$ é outro número complexo en forma polar tal que:

- O seu módulo é a raíz n -ésima do módulo do número dado.
- O seu argumento é $\beta = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$, sendo $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = (\sqrt[n]{r}) \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$$

Para demostrar este resultado calculamos as raíces dun número complexo e aplicamos a fórmula da potencia.

Sexa r_α un número complexo. A súa raíz n -ésima s_α verificará:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = s_\beta \rightarrow (\sqrt[n]{r_\alpha})^n = (s_\beta)^n \rightarrow r_\alpha = (s_\beta)^n = (s^n)_{\beta}$$

↑
Potencia
en forma polar

Para que dous números complexos coincidan deben ter o mesmo módulo e a diferenza dos seus argumentos debe ser un múltiplo enteiro de 360° :

$$r = s^n \rightarrow s = \sqrt[n]{r} \quad n\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ \rightarrow \beta = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$$

Faino así

COMO CALCULAMOS AS RAÍCES DUN NÚMERO COMPLEXO

Calcula as raíces cúbicas do número $8i$.

PRIMEIRO. Escribimos o número en forma polar, se é necesario.

$$8i = 8_{90^\circ}$$

SEGUNDO. O módulo das solucións será a raíz n -ésima do módulo do radicando.

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

TERCEIRO. Existirán tantos argumentos como indique o índice do radical.

$$\beta = \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \text{ con } k = 0, 1 \text{ e } 2$$

$$k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{90^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ$$

$$k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{90^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 150^\circ$$

$$k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{90^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 270^\circ$$

Polo tanto, as raíces cúbicas de $8i$ son 2_{30° , 2_{150° e 2_{270° .

ACTIVIDADES

20 Calcula as seguintes raíces.

a) $\sqrt{3_{150^\circ}}$

c) $\sqrt[4]{-i}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[3]{-1+i}$

21 Resolve estas ecuacións.

a) $z^4 - 1 = 0$

c) $z^3 + 8 = 0$

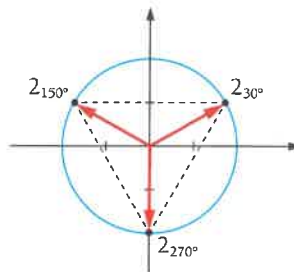
b) $z^2 + 16 = 0$

d) $z^3 - 8 = 19$

Representación das raíces dun número complexo

Ao representar as raíces n -ésimas dun número complexo, como todas teñen o mesmo módulo, cúmprese que:

- Os seus respectivos afijos están nunha circunferencia de raio igual ao módulo do radicando.
- Os afijos das raíces n -ésimas son os vértices dun polígono regular de n lados inscrito nesa circunferencia.



Exemplo

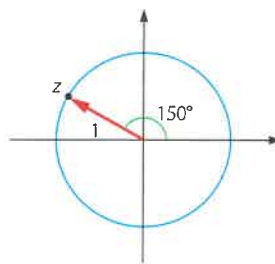
- 14** Calcula as raíces cuartas de $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e represéntaa.

Transformamos o número en forma polar.

$$r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 150^\circ$$

$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$



Polo tanto, resulta que: $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1_{150^\circ}$

As raíces cuartas de 1_{150° terán:

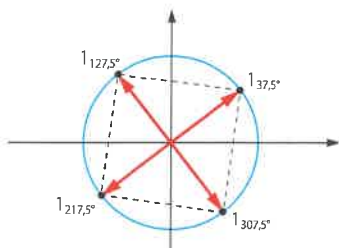
Módulo: $\sqrt[4]{1} = 1$ Argumento: $\beta = \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}$ con $k = 0, 1, 2$ e 3

$$k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{150^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 37,5^\circ$$

$$k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{150^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 127,5^\circ$$

$$k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{150^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 217,5^\circ$$

$$k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{150^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 307,5^\circ$$



Os afijos das catro raíces:
 $1_{37,5^\circ}$, $1_{127,5^\circ}$, $1_{217,5^\circ}$ e $1_{307,5^\circ}$
son os vértices dun cadrado centrado na orixe.

ACTIVIDADES

- 22** Calcula e representa as raíces cúbicas deste número.

$$\frac{1+i}{-1-i}$$

- 23** Un cadrado, con centro na orixe de coordenadas, ten un dos seus vértices no punto $A(3, 2)$. Determina os demais vértices.

Números complejos

1. COMO SE CALCULAN AS SOLUCIÓNS COMPLEXAS DUNHA ECUACIÓN

- 15 Resolve a ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$, e expresa as súas solucións mediante números complexos.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Resólvese a ecuación para obter as súas solucións.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + \sqrt{-4}}{2} \\ x_2 = \frac{-2 - \sqrt{-4}}{2} \end{cases}$$

SEGUNDO. Simplifícanse as solucións, tendo en conta que se nelas aparecen raíces de números negativos, exprésanse como o produto da raíz do valor absoluto do radicando pola raíz de -1 .

$$x_1 = -1 + \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = -1 + \frac{2 \cdot \sqrt{-1}}{2} = -1 + \sqrt{-1}$$

$$x_2 = -1 - \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = -1 - \frac{2 \cdot \sqrt{-1}}{2} = -1 - \sqrt{-1}$$

TERCEIRO. Substitúese $\sqrt{-1}$ por i .

$$x_1 = -1 + \sqrt{-1} = -1 + i \quad x_2 = -1 - \sqrt{-1} = -1 - i$$

As solucións son $x_1 = -1 + i$ e $x_2 = -1 - i$.

Operacións con números complexos

1. COMO SE REALIZAN OPERACIÓNS COMBINADAS

- 16 Resolve esta operación: $\frac{(1-2i)(-2+i)}{3i(1-i)} + \frac{2}{i}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Resólvense as operacións indicadas nos numeradores e nos denominadores.

$$\frac{(1-2i)(-2+i)}{3i(1-i)} + \frac{2}{i} = \frac{-2+i+4i-2i^2}{3i-3i^2} + \frac{2}{i} = \frac{5i}{3+3i} + \frac{2}{i}$$

SEGUNDO. Cálculanse as sumas e as restas de fraccións.

$$\frac{5i}{3+3i} + \frac{2}{i} = \frac{5i \cdot i + 2(3+3i)}{(3+3i)i} = \frac{1+6i}{-3+3i}$$

TERCEIRO. Resólvese a división resultante, multiplicando polo conxugado do denominador.

$$\frac{1+6i}{-3+3i} = \frac{(1+6i)(-3-3i)}{(-3+3i)(-3-3i)} = \frac{15-21i}{18} = \frac{5-7i}{6}$$

2. COMO SE CALCULA UN NÚMERO QUE CUMPRE UNHA DETERMINADA CONDICIÓN

- 17 Calcula x para que o resultado de $\frac{(-2+xi)(1-i)}{-2i}$ sexa un número real.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Resólvese a operación.

$$\begin{aligned} \frac{(-2+xi)(1-i)}{-2i} &= \frac{(-2+x)+(2+x)i}{-2i} = \\ &= \frac{2i((-2+x)+(2+x)i)}{-2i \cdot 2i} = \\ &= \frac{-4-2x}{4} + \frac{-4+2x}{4}i = \\ &= \frac{-2-x}{2} + \frac{-2+x}{2}i \end{aligned}$$

SEGUNDO. Aplícaselle ao resultado a condición imposta.

Se $\frac{-2-x}{2} + \frac{-2+x}{2}i$ ten que ser un número enteiro, a súa parte imaxinaria será 0.

$$\frac{-2+x}{2} = 0 \rightarrow x = 2$$

3. COMO SE RESOLVEN OPERACIÓNS CON POTENCIAS DE i

- 18 Resolve esta operación: $\frac{i^{241}}{1-i} - \frac{2i^{42}}{1+i^8} + i^{83}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Resólvense as potencias de i , calculando o resto da división do seu expoñente entre 4.

$$\begin{aligned} i^{241} &\xrightarrow{241=60 \cdot 4 + 1} i^{241} = i \\ i^{42} &\xrightarrow{42=10 \cdot 4 + 2} i^{42} = i^2 = -1 \\ i^8 &\xrightarrow{8=2 \cdot 4} i^8 = i^0 = 1 \\ i^{83} &\xrightarrow{83=20 \cdot 4 + 3} i^{83} = i^3 = -i \end{aligned}$$

SEGUNDO. Substitúense as potencias polo seu valor, e resólvese e simplifícase a operación resultante.

$$\begin{aligned} \frac{i^{241}}{1-i} - \frac{2i^{42}}{1+i^8} + i^{83} &= \frac{i}{1-i} - \frac{2(-1)}{1+1} + (-i) = \\ &= \frac{i}{1-i} + 1 - i = \\ &= \frac{i+1-i-i(1-i)}{1-i} = \\ &= \frac{1-i+i^2}{1-i} = \frac{-i}{1-i} = \\ &= \frac{-i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-i-i^2}{1-i^2} = \\ &= \frac{1-i}{2} \end{aligned}$$

4. COMO SE CALCULA O INVERSO DUN NÚMERO COMPLEXO

19 Calcula o inverso de $z = 2 - i$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase $\frac{1}{z}$: $\frac{1}{z} = \frac{1}{2-i}$

SEGUNDO. Multiplícanse o numerador e o denominador polo conxugado do denominador.

$$\frac{1}{2-i} = \frac{(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

5. COMO SE RESOLVEN ECUACIONES CON NÚMEROS COMPLEXOS

20 Resolve a ecuación $\frac{3-z+2i}{2} = z+i$, sabendo que z é un número complexo.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Agrúpanse nun membro os termos con z , e no outro, os termos sen z .

$$\frac{3-z+2i}{2} = z+i \rightarrow 3-z+2i = 2z+2i$$

$$3+2i-2i = 2z+2i-2i \rightarrow 3 = 2z \rightarrow z = \frac{3}{2}$$

SEGUNDO. Sácase factor común a z e despéxase.

$$3 = 2z + zi \rightarrow 3 = z(2+i) \rightarrow z = \frac{3}{2+i}$$

TERCEIRO. Exprésase z en forma binómica.

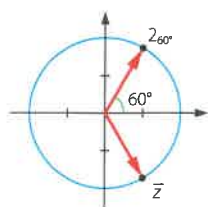
$$z = \frac{3(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i}{4-i^2} = \frac{6-3i}{4+1} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$$

Números complexos en forma polar

1. COMO SE CALCULA O CONXUGADO DUN NÚMERO COMPLEXO EN FORMA POLAR

21 Calcula o conxugado de $z = 2_{60^\circ}$.

SOLUCIÓN



PRIMEIRO. Representáanse o número e o seu conxugado. Dous números complexos conxugados teñen a mesma parte real e a parte imaxinaria cambiada de signo e, polo tanto, son simétricos respecto do eixe real.

SEGUNDO. O conxugado de $z = r_\alpha$ é $\bar{z} = r_{-\alpha}$.

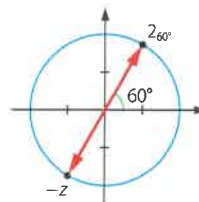
$$z = 2_{60^\circ} \xrightarrow{\text{Conxugado}} \bar{z} = 2_{-60^\circ} = 2_{360^\circ-60^\circ} = 2_{300^\circ}$$

2. COMO SE CALCULA O OPOSTO DUN NÚMERO COMPLEXO EN FORMA POLAR

22 Calcula o oposto de $z = 2_{60^\circ}$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Representáanse o número e o seu oposto.



Dous números complexos opostos teñen a parte real e a parte imaxinaria cambiadas de signo e, polo tanto, son simétricos respecto da orixe.

SEGUNDO. O oposto de $z = r_\alpha$ é $-z = r_{180^\circ+\alpha}$.

$$z = 2_{60^\circ} \xrightarrow{\text{Oposto}} -z = 2_{180^\circ+60^\circ} = 2_{240^\circ}$$

Operacións con números complexos en forma polar

1. COMO SE SUMAN E SE RESTAN NÚMEROS COMPLEXOS EXPRESADOS EN FORMA POLAR

23 Calcula o resultado desta operación.

$$(2_{30^\circ} + 2_{135^\circ}) - 3_{270^\circ}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Exprésanse os números en forma binómica.

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3} \\ b &= 2 \sin 30^\circ = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 \cos 135^\circ = -\sqrt{2} \\ b &= 2 \sin 135^\circ = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 3 \cos 270^\circ = 0 \\ b &= 3 \sin 270^\circ = -3 \end{aligned} \right\} \rightarrow 3_{270^\circ} = -3i$$

SEGUNDO. Resólvese a operación en forma binómica.

$$\begin{aligned} &((\sqrt{3} + i) + (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)) - (-3i) = \\ &= ((\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})i) + 3i = \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2})i \end{aligned}$$

TERCEIRO. Vólvese escribir o número complexo en forma polar.

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2})i = 5,42_{86^\circ 38' 25''}$$

PROBLEMAS RESOLTOS

2. COMO SE RESOLVEN OPERACIÓNS EXPRESANDO OS NÚMEROS COMPLEXOS EN FORMA POLAR

24 Considera os seguintes números complexos.

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = -\sqrt{7} - \sqrt{7}i$$

$$z_3 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

Realiza esta operación: $\frac{(z_1)^4 \cdot (z_2)^2}{(z_3)^3}$

SOLUCIÓN:

PRIMEIRO. Exprésanse os números en forma polar.

$$\left. \begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha_1 = 120^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{120^\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{(-\sqrt{7})^2 + (-\sqrt{7})^2} = \sqrt{14} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{-\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} = 1 \rightarrow \alpha_2 = 225^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$z_2 = -\sqrt{7} - \sqrt{7}i = \sqrt{14}_{225^\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} |z_3| &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha_3 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} \rightarrow \alpha_3 = 60^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$z_3 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \left(\frac{1}{2}\right)_{60^\circ}$$

SEGUNDO. Opérase cos números en forma polar.

$$\begin{aligned} \frac{(z_1)^4 \cdot (z_2)^2}{(z_3)^3} &= \frac{(1_{120^\circ})^4 \cdot (\sqrt{14}_{225^\circ})^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)_{60^\circ}\right)^3} = \frac{1_{480^\circ} \cdot 14_{450^\circ}}{\left(\frac{1}{8}\right)_{180^\circ}} = \\ &= \frac{1_{120^\circ} \cdot 14_{90^\circ}}{\left(\frac{1}{8}\right)_{180^\circ}} = \left(\frac{14}{\frac{1}{8}}\right)_{120^\circ + 90^\circ - 180^\circ} = 112_{30^\circ} \end{aligned}$$

3. COMO SE CALCULAN AS RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO, UTILIZANDO NÚMEROS COMPLEXOS

25 Determina $\operatorname{sen} 75^\circ$ e $\cos 75^\circ$, utilizando as razóns trigonométricas de 30° e 45° .

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Búscase a operación que dá o ángulo pedido en función dos ángulos dados.

$$30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

SEGUNDO. Relaciónase esta operación entre ángulos cunha operación entre números complexos onde os seus argumentos actúen da mesma maneira.

$$1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 1_{75^\circ}$$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

Observa que na operación se elixen números complexos con módulo 1, porque as coordenadas dos seus afijos son $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$.

TERCEIRO. Exprésanse eses números complexos e a operación en forma trigonométrica.

$$1_{30^\circ} = \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$1_{45^\circ} = \cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ$$

$$1_{75^\circ} = \cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ$$

$$\begin{aligned} (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) &= \\ = \cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ \end{aligned}$$

CUARTO. Desenvólvese a operación que aparece na primeira parte da igualdade que resulta.

$$\begin{aligned} (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) &= \\ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ + i \cos 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ + \\ + i \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ &= \\ = (\cos 30^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ) + \\ + i(\cos 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ) \end{aligned}$$

QUINTO. Igualáanse as partes reais e imaxinarias co segundo membro da igualdade, e o resultado da operación son as razóns trigonométricas buscadas.

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 75^\circ &= \cos 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Polo tanto, as razóns son:

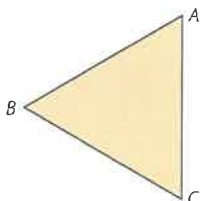
$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,2588$$

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0,9659$$

Raíces de números complejos

1. COMO SE DETERMINAN AS COORDENADAS DOS PUNTOS QUE SON RAÍCES DUN NÚMERO

- 26 Determina as coordenadas dos vértices do triángulo $\widehat{ABC}$, sabendo que son os afijos das raíces cúbicas de -27 .



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculanse as raíces do número.

$$-27 = 27_{180^\circ}$$

$$\text{Módulo: } \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\text{Argumento: } \beta = \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \text{ con } k = 0, 1 \text{ e } 2$$

$$k = 0 \longrightarrow \beta_1 = \frac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$k = 1 \longrightarrow \beta_2 = \frac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 180^\circ$$

$$k = 2 \longrightarrow \beta_3 = \frac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 300^\circ$$

As raíces son 3_{60° , 3_{180° e 3_{300° .

SEGUNDO. Para determinar as coordenadas das raíces no plano, escríbense en forma binómica.

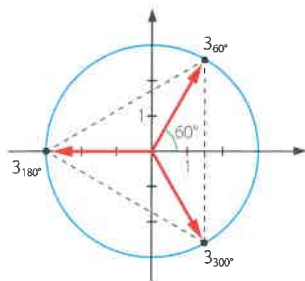
$$3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$3_{180^\circ} = 3(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -3$$

$$3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

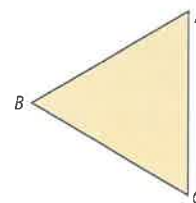
As coordenadas dos vértices do triángulo son:

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad B(-3, 0) \quad C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$



2. COMO SE RESOLVEN ALGÚNS PROBLEMAS XEOMÉTRICOS ASOCIADOS COAS RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEXOS

- 27 Calcula a área do triángulo que determinan os afijos das raíces cúbicas de -27 .



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculanse as coordenadas dos afijos das raíces.

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad B(-3, 0) \quad C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

SEGUNDO. Cálculase a lonxitude da base.

$$d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = 3\sqrt{3}$$

TERCEIRO. Determinase a lonxitude da altura.

Como é un triángulo equilátero, todos os seus lados miden $3\sqrt{3}$. Aplícase o teorema de Pitágoras.

$$h^2 = (3\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \rightarrow h = \frac{9}{2}$$

CUARTO. Cálculase a área.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

3. COMO SE DETERMINAN AS SOLUCIÓNS DAS ECUACIÓNS DO TIPO $z^n - k = 0$

- 28 Resolve a ecuación $z^4 - 16 = 0$ en $\mathbb{C}$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Despéxase z .

$$z^4 - 16 = 0 \rightarrow z^4 = 16 \rightarrow z = \sqrt[4]{16}$$

SEGUNDO. Cálculanse as solucións.

$$z = \sqrt[4]{16} \rightarrow z = \sqrt[4]{16}_{\sigma} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^{\frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{n}} = 2_{k \cdot 90^\circ}$$

$$k = 0 \longrightarrow \beta_1 = 0^\circ$$

$$k = 1 \longrightarrow \beta_2 = 90^\circ$$

$$k = 2 \longrightarrow \beta_3 = 180^\circ$$

$$k = 3 \longrightarrow \beta_4 = 270^\circ$$

Números complexos

24 Expressa os números complexos en forma binómica.

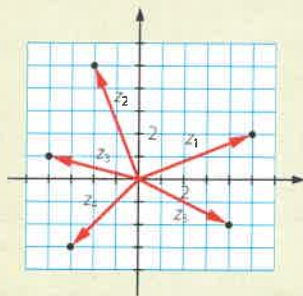
••• a) $\sqrt{-16} + 3$ b) $-2 - \sqrt{-4}$ c) $\sqrt{-8} + \sqrt{2}$

25 Resolve estas ecuacións e expresa as súas solucións en forma complexa.

a) $x^2 + 4 = 0$
 b) $2x^2 - 2x + 1 = 0$
 c) $2x^2 - x + 5 = 0$

26 Expressa en forma binómica estes números complexos.

•••



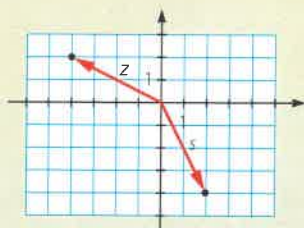
27 Representa os números no plano complexo.

•••

a) $5 + i$ d) $6i$ g) $\frac{3}{2} - \frac{5}{3}i$
 b) $\sqrt{2} - 3i$ e) -4 h) $\sqrt{3} - 2i$
 c) $-3 - i$ f) $-2i$ i) $\sqrt{3}i$

28 Debuxa o conxugado e o oposto dos números complexos z e s .

•••



- a) Como será a representación do conxugado dun número?
 b) E do seu oposto?

29 Representa no plano complexo os seguintes números: $-3 + 2i$ e $4 - i$.

•••

Obtén os seus conxugados e os seus opostos, e represéntaos.

30 Encontra as solucións das ecuacións.

•••

a) $x^2 - 2x + 5 = 0$ c) $x^2 - 4x + 7 = 0$
 b) $x^2 - 6x + 10 = 0$ d) $\frac{x+1}{3} + \frac{5}{x+1} + 2 = 0$

31 Calcula e representa no plano complexo os números:

•••

$i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, \dots$

Investiga tamén o que ocorre con: $i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5}, i^{-6}, \dots$

Operacións con números complexos

32 Realiza as seguintes operacións.

•••

a) $(3 - 5i) + (2 - 7i) + (-4 + 8i)$
 b) $(-1 + 2i) - (3 + 6i) - (-4 - i)$
 c) $-(1 - 2i) - (-7i) - (-4 - 3i)$
 d) $2(1 - 4i) - 2(1 + 4i) - 3(4 - 4i)$
 e) $2(\sqrt{3} + i) - 3(2\sqrt{3} + 4i)$
 f) $(\sqrt{2} - 3i) + 2(2 - \sqrt{3}i)$
 g) $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}i\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)$
 h) $(1 - 3i) + i(2 - 6i) - 2i(-1 + 6i)$

33 Fai estes produtos e potencias.

•••

a) $(1 - 3i)(2 - 6i)$ d) $(5 - 4i)(5 + 4i)$
 b) $(-3 - 4i)(7 - i)$ e) $(-3 - 2\sqrt{2}i)(-3 + 2\sqrt{2}i)$
 c) $(-2 + 5i)^2$ f) $(\sqrt{2} - i)^3$

34 Efectúa as divisións.

•••

a) $\frac{-1 + 5i}{3 - 2i}$ b) $\frac{20 + 40i}{8 + 6i}$ c) $\frac{-1 + 5i}{2 - i}$

35 Obtén, en forma binómica, o resultado das operacións.

•••

a) $\frac{30(1 - i)}{-4 - 2i} + (2 - 3i)i$
 b) $2i - \frac{(2 + 3i)3}{-3 + i}$
 c) $\frac{4(10 - i) + 8}{2 - 6i} - (3 - i)(2 + 6i)$
 d) $(-2 - 5i) - \frac{10 - 10i - 5(1 + i)}{(8 + 2i) - (5 + 3i)}$
 e) $\frac{(1 + 3i)^2 - (2i)^2}{-3 + 4i}$

36 Representa no plano complexo os números complexos e os resultados das operacións.

•••

Explica o que sucede en cada caso.

a) $(3 + 2i) + (-1 + 4i)$ c) $(-5 + 2i) - (4 + 3i)$
 b) $(3 + 2i)(-1 + 3i)$ d) $\frac{-2 + 6i}{4 - 2i}$

37 Representa $(5 + 2i)$. Multiplícao por i e representa

•••

o resultado. Multiplícao dúas veces por i e explica o que se obtén.

38 Encontra o número complexo que é inverso de $-1 + 2i$.

•••

39 Calcula z na seguinte ecuación.

•••

$(2 - 3i)z = (6 + 5i)$

- 40** Calcula $a, b, c, \dots$, para que se verifiquen as condicións indicadas en cada apartado.

- a) $(3 - 5i) + (-1 + ai)$ é un número real.
 b) $(b + 3i) + (5 + 2i)$ é un número imaxinario puro.
 c) $(c + 6i)(3 - 2i)$ é un número real.
 d) $(d + 6i)(3 - 2i)$ é un número imaxinario puro.
 e) $\frac{7 + 11i}{e - 2i}$ é un número real.
 f) $\frac{7 + 11i}{f - 2i}$ é un número imaxinario puro.

- 41** Encontra p e q para que se cumpra:

$$(p + 3i)(4 + qi) = 15 + 9i$$

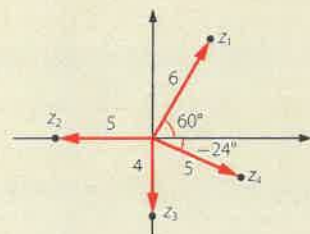
- 42** Demuestra que o número complexo $z = 1 - 3i$ verifica a igualdade $\frac{z^2}{2} = z - 5$.

Números complexos en forma polar

- 43** Representa os seguintes números complexos expresados en forma polar.

- a) 4_{60° c) 3_{220° e) 5_{180°
 b) 2_{135° d) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$ f) $5_{\frac{3\pi}{2}}$

- 44** Expresa estes números complexos en forma polar.



- 45** Escribe estes números en forma polar e represéntaos.

- a) $3 - 4i$ d) $-3i$
 b) $\sqrt{3} + i$ e) -3
 c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ f) $\frac{1}{2}i$

- 46** Escribe en forma binómica os seguintes números complexos.

- a) 4_{60° c) $3_{\frac{\pi}{2}}$ e) 3_{150° g) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$
 b) 2_{215° d) 2_π f) $1_{\frac{3\pi}{2}}$ h) $\sqrt{3}_{300^\circ}$

- 47** Dados os números complexos:

$$z_1 = 5_{240^\circ} \quad z_2 = 3_{135^\circ} \quad z_3 = \sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$$

escribe, en forma polar e binómica, o conxugado e o oposto de cada un deles.

- 48** Efectúa as seguintes operacións.

- a) $4_{120^\circ} \cdot 3_{60^\circ}$ f) $2_{260^\circ} \cdot 5_{130^\circ}$
 b) $\frac{6_\pi}{2_{\frac{\pi}{4}}}$ g) $\frac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}}$
 c) $4_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{270^\circ}$ h) $(2_{120^\circ})^5$
 d) $\frac{8_{170^\circ}}{2_{50^\circ}}$ i) $\frac{10_{120^\circ}}{5_{240^\circ}}$
 e) $\left(\frac{5_\pi}{3}\right)^2$ l) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6$

- 49** Realiza estas operacións, expresando primeiro os números en forma polar.

- a) $(1 - i)^4$ c) $(-1 + \sqrt{3}i)^4$
 b) $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6$ d) $(\sqrt{2} - i)^7$

- 50** Calcula, usando a fórmula do binomio de Newton, esta potencia: $(2 - 2\sqrt{3}i)^5$. Faíno en forma binómica. Comproba, expresando o número en forma polar, que se obtén o mesmo resultado.

- 51** Representa no plano complexo estes números e os resultados das súas operacións. Explica o que sucede en cada caso.

- a) $2_{150^\circ} \cdot 3_{120^\circ}$ b) $\frac{6_{150^\circ}}{2_{60^\circ}}$ c) $\left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)^4$

- 52** Realiza as seguintes potencias, empregando a fórmula de Moivre.

- a) $(3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ))^4$
 b) $(2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ))^9$
 c) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^3$
 d) $\left(3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)\right)^4$

- 53** Coa fórmula de Moivre, expresa $\sin 5\alpha$ e $\cos 5\alpha$ en función de $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

- 54** Debuxa os números 2_{30° e 6_{150° . Por que número complexo hai que multiplicar o primeiro para obter o segundo?

- 55** Debuxa os números 12_{300° e 4_{120° . Por que número complexo hai que dividir o primeiro para obter o segundo?

Raíces de números complexos

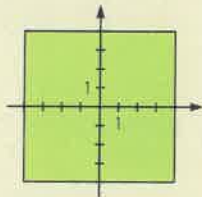
56 Calcula as solucións das seguintes raíces.

- a) $\sqrt[3]{64_{120^\circ}}$ b) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}}$ c) $\sqrt[4]{9_{220^\circ}}$

57 Realiza as raíces e representa os resultados no plano complexo.

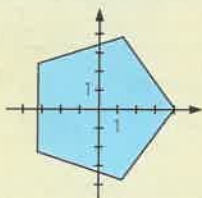
- a) $\sqrt[5]{-16}$ b) $\sqrt[3]{16i}$ c) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$

58 Os vértices do polígono representado son as raíces cuartas dun número complexo.



Determina o número e as súas raíces.

59 No gráfico represéntanse as raíces dun número. Determinaas e descubre de que número se trata.



60 Encontra n e z de maneira que dúas das solucións de $\sqrt[n]{z}$ sexan 6_{30° e 6_{120° . Hai unha única solución? Cal é o menor número n que podes encontrar?

61 Resolve as ecuacións.

- a) $x^2 + 1 = 0$ d) $x^5 - 1 = 0$
 b) $x^3 + 12 = 0$ e) $x^4 + 16 = 0$
 c) $x^5 - 32 = 0$ f) $x^3 - 8 = 0$

62 Realiza a seguinte operación.

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}}$$

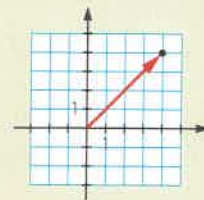
63 Expresa en forma polar o inverso destes números.

- a) 2_{150° c) $4_{\frac{\pi}{3}}$
 b) $3_{\frac{\pi}{2}}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)_\pi$

64 Calcula as seguintes raíces de números complexos.

- a) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{i}$
 b) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt[3]{i}$
 c) $\sqrt[4]{1}$ f) $\sqrt[4]{i}$

65 Observa o número complexo representado.



- a) A que expoñente hai que elevalo para obter un número real?
 b) É un número imaxinario puro?
 c) Hai unha única solución en cada caso?

Problemas con números complexos

66 Que número complexo hai que sumarlle a $-3 + 2i$ para que resulte 5_{270° ? E para que resulte $6_{\frac{5\pi}{3}}$?

67 Calcula z sabendo que o seu módulo é $\sqrt{5}$ e que $z(3 - 6i)$ é un número imaxinario puro.

68 Escribe que condicións deben cumprir a , b , c e d para que:

- a) $(a + bi)(c + di)$ sexa un número real.
 b) $(a + bi)(c + di)$ sexa un número imaxinario puro.
 c) $\frac{a + bi}{c + di}$ sexa un número imaxinario puro.
 d) $\frac{a + bi}{c + di}$ sexa un número real.

69 Calcula dous números reais a e b , de modo que:

$$a + 5i = \frac{13 + bi}{4 - i}$$

70 Calcula o valor de a para que este número complexo cumpra que o seu cadrado sexa igual ao seu conxugado.

$$a + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

71 Calcula o valor de m para que $3 - 2i$ sexa raíz do polinomio $x^2 - 6i + m$.

72 Calcula o valor de b para que o cociente de $-9 + bi$ entre $1 - 2i$ teña módulo $5\sqrt{2}$.

73 Calcula c sabendo que a representación gráfica de $\frac{12 + ci}{-5 + 2i}$ está sobre a bisectriz do primeiro cuadrante.

74 É certo que, sempre que multiplicas un número real por un número complexo z , o resultado ten o mesmo argumento que z ? Se non é certo, enuncia unha propiedade correcta.

75 É certo que o conxugado do produto de dous números complexos é o produto dos seus conxugados?

- 76** Demuestra que, se multiplicas un número complexo polo seu conxugado, se obtén o cadrado do seu módulo.
- 77** Que diferenza existe entre as solucións da raíz cadrada real de 16 e a raíz cadrada do número complexo $16 + 0i$?
- 78** Calcula as tres raíces cúbicas de -27 e comproba que a súa suma é cero. Comproba se sucede o mesmo coas tres raíces cúbicas de $16 - 88i$. Sucederá iso con todos os números complexos? Xustifica a túa resposta.
- 79** Un dos vértices dun triángulo é a orixe de coordenadas e os outros dous son os afixos dos números complexos $-2 + 5i$ e $3 + i$. Calcula a lonxitude dos seus lados.
- 80** Dous vértices consecutivos dun cadrado son os afixos dos números $6 + 5i$ e $3 + i$. Determina o resto dos seus vértices, sabendo que ten un no cuarto cuadrante.
- 81** Un dos vértices dun cadrado con centro na orixe ten coordenadas $(-1, 3)$. Utiliza os números complexos para determinar os outros vértices e a súa área.
- 82** Un pentágono regular, con centro na orixe de coordenadas, ten en $(-3, -2)$ un dos seus vértices. Calcula os demais vértices usando números complexos.
- 83** Que número complexo forma un triángulo equilátero co seu conxugado e con -5 ?
- 84** As catro raíces cuartas de -4.096 describen un cadrado. Calcula a súa área. Ademais, as súas raíces cúbicas describen un triángulo equilátero. Determina a súa área.
- 85** O número complexo $3 + 5i$ é unha das raíces cúbicas de z . Calcula as outras dúas raíces.
- 86** Escribe unha ecuación de segundo grao da que as solucións sexan $3 + i$ e $3 - i$. Fai o mesmo con $-2 - 5i$ e $-2 + 5i$.
- 87** Demuestra que se unha ecuación de segundo grao con coeficientes que son números reais ten dúas raíces complexas, estas deben ser números conxugados.
- 88** Que condición deben cumprir os números reais a , b e c para que a ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ teña solucións complexas?
- 89** Resolve a ecuación $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$.
- 90** Resolve as seguintes ecuacións.
- a) $\frac{z}{5-i} + (2-i)6i = -3 + 2i$
- b) $z(-2 + 6i) + \frac{-41 + 37i}{4 - 3i} + 10 - 8i = z(1 + 7i)$
- 91** Resolve estas ecuacións.
- a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0$
- b) $\left. \begin{aligned} x - iy &= 0 \\ y - ix &= 4 - 6i \end{aligned} \right\}$
- 92** Representa o número complexo $1 + 2\sqrt{3}i$ e realiza neste punto un xiro de 60° centrado na orixe. Calcula as expresións binómica e polar do número complexo resultante.
- 93** A suma de dous números complexos conxugados é 16 e a suma dos seus módulos é 20. Determina os.
- 94** Encontra todos os números complexos tales que o seu cubo é igual á súa raíz cadrada.
- 95** Investiga que números complexos cumpren que o seu cadrado é igual ao seu conxugado. Para realizalo supón que o número está expresado en forma polar.
- 96** Sexa $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Comproba que se $z = -2 + 5i$, entón z , $u \cdot z$ e $u^2 \cdot z$ son as tres raíces cúbicas dun número complexo. Demuestra que iso sucede para calquera número z . Que ten de particular o número u ?
- 97** Determina se é certa esta afirmación. Se dous números complexos z e w cumpren que $z^3 = w^3$, entón $z = w$.
- 98** Do número complexo z_1 sábese que o seu argumento é 150° , e o módulo de z_2 é 2. Calcula z_1 e z_2 sabendo que o seu produto é $-8i$.
- 99** Representa o número $1 + i$. Pásao a forma polar e calcula as súas 10 primeiras potencias. Representaas no plano complexo. Observa que os afixos deses números describen unha curva espiral.
- 100** Calcula a suma dos 10 primeiros termos dunha progresión aritmética de diferenza $1 + 2i$ se o primeiro termo é $-6 - 2i$.
- 101** Se o número complexo $a + bi$ ten módulo m e argumento α , como expresarías en forma binómica un número complexo con módulo $6m$ e argumento $2\pi - \alpha$? E se o módulo é $3m$ e o argumento é $\alpha + \frac{3\pi}{2}$?
- 102** Sexa $z = r_\alpha$ un número complexo en forma polar e $\bar{z}$ o seu conxugado. Calcula o valor do cociente.
- $$\frac{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos n\alpha}{(z + \bar{z}) \cdot [z^2 + (\bar{z})^2] \cdot \dots \cdot [z^n + (\bar{z})^n]}$$
- 103** Dada a ecuación $z^2 + (a + bi)z + c + di = 0$, con a, b, c e d números reais, encontra a relación entre eles para que as súas raíces teñan o mesmo argumento.

Reflexiona sobre a teoría

- 104** Calcula a suma $\sum_{k=0}^n i^k$, expresando o resultado o máis simplificado posible.

- 105** Demostra que se o número complexo z é unha raíz do polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\bar{z}$ é tamén unha raíz.

IDEA CLAVE

Comproba que $P(\bar{z}) = 0$.

- 106** Calcula un polinomio de cuarto grao con coeficientes reais, se as súas raíces son $2i$ e $1 + i$.

IDEA CLAVE

Recorda que se z é raíz dun polinomio, $\bar{z}$ tamén o é. Escribe o polinomio como produto das súas catro raíces e opera.

- 107** Obtén a suma e o produto das raíces n -ésimas da unidade.

IDEA CLAVE

Recorda que a suma dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica de razón r é:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

É nunha progresión aritmética:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

- 108** Calcula as 5 solucións complexas desta ecuación.

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

IDEA CLAVE

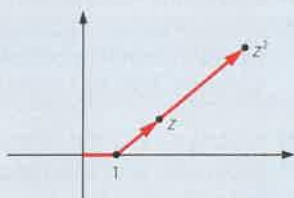
O primeiro membro é a suma dos termos dunha progresión xeométrica.

- 109** Resolve o sistema de ecuacións con incógnitas z e w .

$$\begin{cases} iz - (1+i)w = 3 \\ (2+i)z + iw = 4 \end{cases}$$

Pensa un pouco máis

- 110** Calcula a expresión de z sabendo que os afixos dos números complexos $1, z$ e z^2 están aliñados.



Análise do enunciado

Se $z = a + bi$, entón $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$. Polo tanto, os puntos $(1, 0)$, (a, b) e $(a^2 - b^2, 2ab)$ están aliñados.

Deseño da resolución

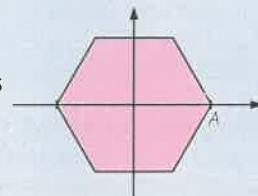
Se os tres puntos están aliñados, os vectores que definen son proporcionais.

Clave para resolver o problema

Dous vectores son proporcionais se as súas coordenadas son proporcionais.

- 111** Un hexágono regular está centrado na orixe de coordenadas e un dos seus vértices é o punto $A(1, 0)$.

Calcula os vértices doutro hexágono regular co mesmo centro, lados paralelos ao anterior e unha área que é 5 veces maior.



Análise do enunciado

Temos un hexágono regular con centro na orixe e cun vértice en $(1, 0)$. Hai que construír un hexágono cunha área que sexa 5 veces maior.

Deseño da resolución

As raíces sextas dun número complexo representan un hexágono regular.

Clave para resolver o problema

A relación entre as áreas de dous polígonos semellantes é k^2 .