

3

Trigonometría

LITERATURA E MATEMÁTICAS

A medición do mundo

O ceo estaba encapotado, a terra, embarrada. Rubiu por enriba dunha sebe e encontrouse, sen folgos, suado e cuberto de agullas de piñeiro, diante de dúas rapazas. Ao preguntarlle que facía alí, explicou, nervioso, a técnica da triangulación: coñecendo un lado e dous ángulos dun triángulo, podíanse determinar os outros lados e o ángulo descoñecido. Así que se escollíu un triángulo en calquera lugar de aquela terra de Deus, medíase o lado de máis fácil acceso, e determinábanse os ángulos para o terceiro punto con ese aparato. Levantou o teodólito e xirouno, así así, e fixéxense vostedes, así, con dedos torpes, dun lado a outro, como se fose a primeira vez. Logo engádase unha serie de tales triángulos un xunto a outro. [...]

Pero unha paisaxe, repuxo a maior das dúas, non era un plano.

El mirouna fixamente. Faltara a pausa. Como se ela non precisase reflexionar. Desde logo que non, contestou el sorrindo.

Os ángulos dun triángulo, dixo ela, sumaban nun plano cento oitenta graos, pero non sobre unha esfera. Con iso quedaba dito todo.

El observou como se a vise entón por primeira vez. Ela devolveulle a mirada arqueando as cellas. Si, dixo el. Ben. Para compensalo, había que encoller en certo modo os triángulos despois da medición ata un tamaño infinitamente pequeno. En principio unha sinxela operación diferencial. Aínda que desa forma... Sentou no chan e sacou o seu bloc. Desesa forma, murmurou mentres trazaba as súas anotacións, aínda non o realizara ninguén. Cando levantou a vista, quedara só. [...]

Pediu por carta a man de Johanna e foi rexeitado. Non tiña nada contra el, escribiu ela, só que dubidaba que a existencia ao seu lado fose saudable. Sospeitaba que el extraía a vida e a enerxía das persoas do seu contorno, igual ca a terra do sol e o mar dos ríos, de que cerca del unha estaría condenada á palidez e á semi-realidade dunha existencia de espectro.

[Pasado un tempo, volveuno intentar e, esta vez, foi aceptado. «El», un dos dous protagonistas desta novela, chamábase Gauss e foi un dos astrónomos, físicos e matemáticos máis importantes do século XIX.]

DANIEL KEHLMANN

Medida de ángulos**Razóns trigonométricas de ángulos****Relacións entre as razóns trigonométricas****Fórmulas e ecuacións trigonométricas****Teoremas do seno e do coseno****Resolución de triángulos**

Nunha superficie de terra plana, hai tres árbores, A , B e C , e non podemos acceder á árbore C . A distancia entre A e B é de 26 m, e cun teodólito, como o de Gauss, medimos os ángulos $\widehat{CAB}$ e $\widehat{CBA}$ e obtemos 48° e 60° , respectivamente. Con estes datos, que outras distancias ou áreas podemos calcular? Baseándote nisto, explica a técnica da triangulación.

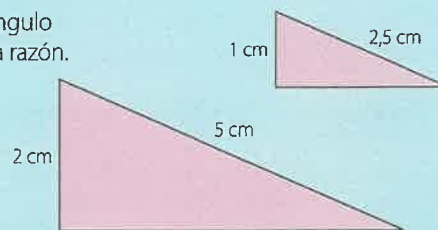
Razón e proporción

Unha **razón** é o cociente entre dous números ou cantidades comparables: $\frac{a}{b}$.

Chamamos **proporción** á igualdade entre dúas razóns: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

O cociente do cateto menor dun triángulo rectángulo e a súa hipotenusa é unha razón.

$$\begin{array}{c} \text{Razón} \\ \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5} = 0,4 \\ \text{Proporción} \end{array}$$



Repasa

1 Calcula o termo que falta para que estes pares de razóns formen unha proporción.

a) $\frac{4}{7}$ e $\frac{10}{x}$

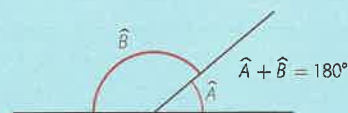
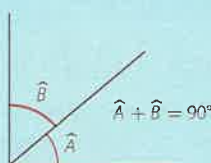
b) $\frac{3}{10}$ e $\frac{x}{2}$

c) $\frac{x}{3}$ e 2

Ángulos complementarios e suplementarios

Dous **ángulos** son **complementarios** se a suma das súas amplitudes é 90° .

Dous **ángulos** son **suplementarios** se a suma das súas amplitudes é 180° .



Repasa

2 Calcula o ángulo complementario e o suplementario de:

a) 15°

b) 47°

c) 78°

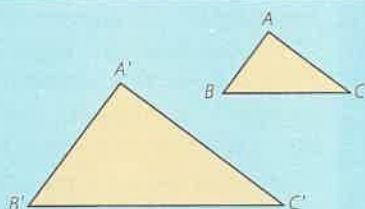
d) 89°

Semellanza de triángulos

Dous **triángulos** son **semellantes** cando se cumpre que:

- Os seus ángulos son iguais.
 $\hat{A} = \hat{A}'$ $\hat{B} = \hat{B}'$ $\hat{C} = \hat{C}'$
- Os seus lados son proporcionais.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

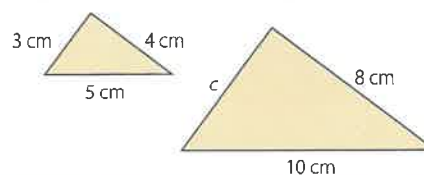


Os triángulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'B'C'}$ son semellantes.

- $\hat{A} = \hat{A}'$ $\hat{B} = \hat{B}'$ $\hat{C} = \hat{C}'$
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

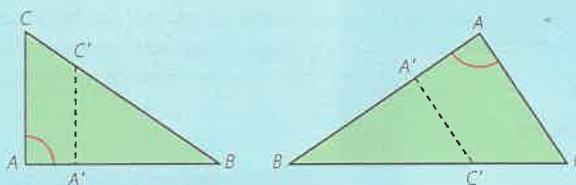
Repasa

3 Estes triángulos son semellantes. Canto ten que medir c ?



Criterios de semellanza de triángulos rectángulos

Dous **triángulos** rectángulos son **semellantes** cando teñen igual un dos seus ángulos agudos.



Os triángulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'BC'}$ son semellantes.

Repasa

4 Razoa por que son semellantes os tres triángulos rectángulos que aparecen ao trazar a altura sobre a hipotenusa nun triángulo rectángulo.

Relacións métricas no triángulo

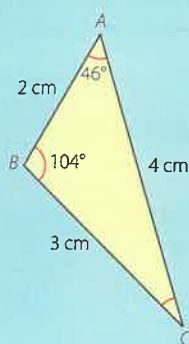
Relacións entre os seus lados

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sempre se cumpre que:

- O lado maior é menor ca a suma dos outros lados.
- O lado menor é maior ca a diferenza dos outros lados.

Relacións entre os seus ángulos

A suma dos tres ángulos dun triángulo é igual a 180° .



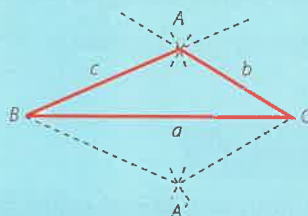
- O lado maior é menor ca a suma dos outros lados:
 $4 \text{ cm} < 2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} \rightarrow a < b + c$
- O lado menor é maior ca a diferenza dos outros lados:
 $2 \text{ cm} > 4 \text{ cm} - 3 \text{ cm} \rightarrow c > a - b$
- O ángulo $\widehat{C}$ mide:
 $\widehat{C} = 180^\circ - 104^\circ - 46^\circ = 30^\circ$
 $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

Repasa

- 5 Indica cales destes tríos de lonxitudes corresponden aos lados dun triángulo.
- | | |
|----------------------|------------------------|
| a) 3 cm, 4 cm e 5 cm | c) 5 cm, 15 cm e 30 cm |
| b) 1 cm, 2 cm e 3 cm | d) 15 cm, 8 cm e 20 cm |
- 6 Nun triángulo $\widehat{ABC}$, o ángulo $\widehat{A} = 105^\circ$. Canto suman $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$?

Construción de triángulos

CASO 1. Coñecidos os tres lados, a , b e c .

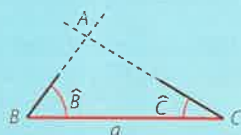


PRIMEIRO. Trazamos un segmento igual a un lado, a . Os extremos do segmento son os vértices B e C .

SEGUNDO. Construimos dous arcos, un con centro C e raio b , e outro con centro B e raio c .

TERCEIRO. Unimos B e C cos dous puntos de intersección dos arcos. Obtemos dous triángulos, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'BC}$.

CASO 2. Coñecidos un lado e os seus dous ángulos contiguos.

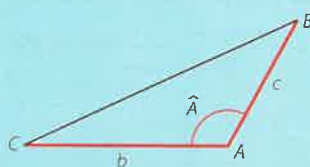


PRIMEIRO. Debuxamos un segmento igual ao lado coñecido, a . Os seus extremos son os vértices B e C .

SEGUNDO. Construimos os ángulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ sobre o segmento a .

TERCEIRO. O punto de intersección dos lados que limitan $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ é o vértice A .

CASO 3. Coñecidos dous lados e o ángulo comprendido.



PRIMEIRO. Trazamos un segmento igual a un dos lados coñecidos, b . Os seus extremos serán os vértices A e C .

SEGUNDO. Debuxamos sobre o segmento o ángulo coñecido, $\widehat{A}$, e sobre este ángulo, o outro lado coñecido, c . O extremo deste lado é B .

TERCEIRO. Unimos B con C .

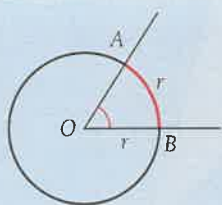
Repasa

- 7 Constrúe triángulos cos seguintes datos.
- | | |
|---|---|
| a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ e $c = 3 \text{ cm}$ | c) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ e $\widehat{C} = 20^\circ$ |
| b) $a = 5 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$ e $\widehat{C} = 45^\circ$ | d) $a = 5 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 50^\circ$ e $\widehat{A} = 85^\circ$ |

1 Medida de ángulos

Esríbese así

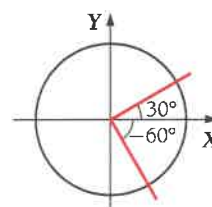
A abreviatura de radián é *rad*.
2 radiáns = 2 rad



Chámase **radián** á amplitude do ángulo central dunha circunferencia que presenta un arco que mide o mesmo ca o seu radio.

O radián, ao igual ca o grao, é unha unidade de medida de ángulos.

Cando medimos ángulos sobre unha circunferencia, consideramos como sentido positivo o sentido contrario ás agullas do reloxo. Se o medimos en sentido inverso, diremos que é un ángulo negativo.

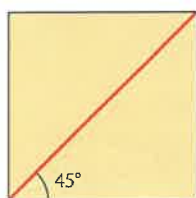


Como a lonxitude dunha circunferencia de raio r é $2\pi r$, unha circunferencia completa mide $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad.

Equivalencia entre graos e radiáns

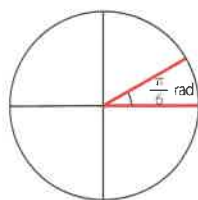
Posto que a amplitude da circunferencia completa mide 2π rad, que equivale a 360° , temos que: $1 \text{ radián} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 45''$

Paso de graos a radiáns



$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Paso de radiáns a graos



$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

Faino así

COMO TRANSFORMAMOS GRAOS EN RADIÁNS, E VICEVERSA

Expresa 45° en radiáns e $\frac{\pi}{6}$ rad en graos.

PRIMEIRO. Formulamos a relación entre graos e radiáns, e viceversa.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } 360^\circ \xrightarrow{\text{son}} 2\pi \text{ rad} \\ 45^\circ \xrightarrow{\text{serán}} x \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } 2\pi \text{ rad} \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \frac{\pi}{6} \text{ rad} \xrightarrow{\text{serán}} y \end{array} \right\}$$

SEGUNDO. Operamos e simplificamos.

$$x = \frac{2\pi \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$y = \frac{360 \cdot \frac{\pi}{6}}{2\pi} = \frac{360 \cdot \pi}{6 \cdot 2\pi} = 30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

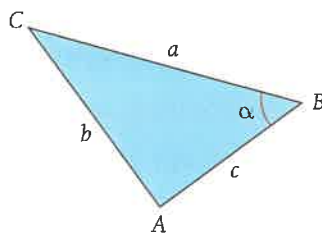
ACTIVIDADES

1 Expresa en graos os ángulos que teñan unha amplitude de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 radiáns.

2 Expresa en radiáns a medida dos ángulos dos catro primeiros polígonos regulares.

2 Razóns trigonométricas

As **razóns trigonométricas** dun ángulo α son as distintas razóns que hai entre os lados dun triángulo rectángulo no que un dos seus ángulos agudos é α .



$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{cosecante de } \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{secante de } \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{tanxente de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto de } \alpha}{\text{cateto contiguo de } \alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cotanxente de } \alpha = \frac{a}{b}$$

Escríbese así

Para abreviar utilizamos as seguintes expresións.

seno de $\alpha \longrightarrow \text{sen } \alpha$

coseno de $\alpha \longrightarrow \text{cos } \alpha$

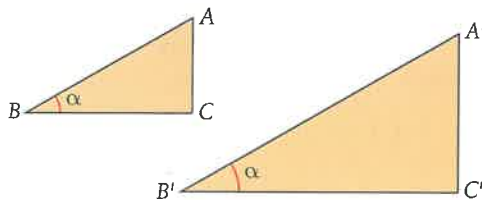
tanxente de $\alpha \longrightarrow \text{tx } \alpha$

cosecante de $\alpha \longrightarrow \text{cosec } \alpha$

secante de $\alpha \longrightarrow \text{sec } \alpha$

cotanxente de $\alpha \longrightarrow \text{cotx } \alpha$

Dous triángulos rectángulos cun ángulo agudo igual, α , son semellantes.



Polo tanto, cúmprese que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$

É dicir, as razóns trigonométricas dun ángulo non dependen do triángulo elixido.

Exemplo

- 1 Calcula as razóns trigonométricas do ángulo $\hat{C}$ neste triángulo.

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{8}{17}$$

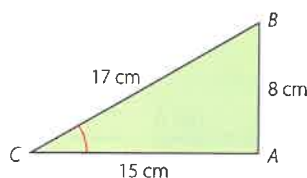
$$\text{sec } \hat{C} = \frac{17}{8}$$

$$\text{cos } \hat{C} = \frac{15}{17}$$

$$\text{cosec } \hat{C} = \frac{17}{15}$$

$$\text{tx } \hat{C} = \frac{8}{15}$$

$$\text{cotx } \hat{C} = \frac{15}{8}$$

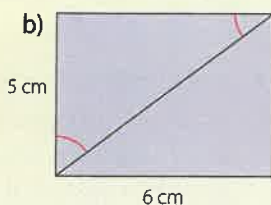
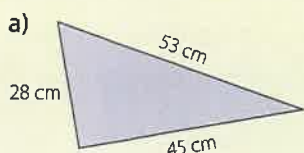


Decátate

O seno e o coseno dun ángulo agudo son sempre menores ca 1, porque a hipotenusa é maior ca calquera dos dous catetos.

ACTIVIDADES

- 3 Calcula as razóns trigonométricas dos ángulos agudos.



- 4 Demostra que se cumpren as seguintes igualdades.

a) $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$

b) $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$

c) $\text{cotx } \alpha = \frac{1}{\text{tx } \alpha} = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$

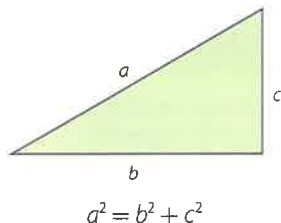
3 Relacións entre razóns trigonométricas

As razóns trigonométricas dun ángulo cumpren algunhas relacións que se poden deducir das propiedades dos triángulos rectángulos.

As relacións trigonométricas máis importantes son:

Lembra

Teorema de Pitágoras



$$\bullet \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2} \underset{a^2 = b^2 + c^2}{=} \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$\bullet \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b \cdot a}{c \cdot a} = \frac{b}{c} = \tan \alpha$$

$$\bullet \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \overset{1}{=} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Exemplo

2 Calcula as razóns trigonométricas de α , se $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\cos \alpha = \frac{1}{3}} \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \alpha = \frac{1}{3}} \tan \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \sec \alpha = \frac{3}{1} = 3$$

ACTIVIDADES

5 Calcula as razóns trigonométricas do ángulo se:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$

c) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

b) $\tan \alpha = 0,49$

d) $\sin \alpha = 0,2$

6 Razona se existe algún ángulo para o que se verifique:

a) $\sin \alpha = 0,3$ e $\cos \alpha = 0,8$

b) $\sin \alpha = 0,72$ e $\tan \alpha = 1,04$

c) $\cos \alpha = 0,1$ e $\sin \alpha = 0,99$

4 Razóns trigonométricas de 30°, 45° e 60°

4.1. Razóns trigonométricas de 45°

Nun triángulo rectángulo isóscele, os seus ángulos agudos miden 45° cada un e a medida dos seus catetos é a mesma, l . Polo teorema de Pitágoras temos que:

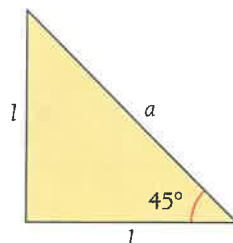
$$a = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$$

Por tanto, as razóns trigonométricas de 45° son:

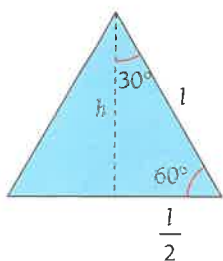
$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{a} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{l}{a} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tx } 45^\circ = \frac{l}{l} = 1$$



4.2. Razóns trigonométricas de 30° e 60°



Consideramos agora un triángulo equilátero, os seus ángulos miden 60° cada un. Ao trazar a altura sobre un dos seus lados, o triángulo queda dividido en dous triángulos rectángulos iguais, de ángulos agudos 30° e 60°.

A altura, h , do triángulo equilátero coincide cun dos catetos e mide:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

As razóns trigonométricas de 30° e 60° son:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{h}{l} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tx } 30^\circ = \frac{l/2}{h} = \frac{l/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tx } 60^\circ = \frac{h}{l/2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l/2} = \sqrt{3}$$

Calculadora



A calculadora científica permite coñecer as razóns trigonométricas de calquera ángulo coas teclas:

sin **cos** **tan**

que calculan o seno, o coseno e a tanxente, respectivamente.

54 **sin** = 0.8090169943

54 **cos** = 0.5877852522

54 **tan** = 1.3763819204

Lembra que se o ángulo vén dado en graos debes traballar en Modo DEG, e se son radiáns, en Modo RAD.

ACTIVIDADES

7 Calcula a altura dun triángulo equilátero de lado 5 cm, sen utilizar o teorema de Pitágoras.

8 Se a altura dun triángulo equilátero mide 5,196 cm; calcula canto mide o lado do triángulo, sen utilizar o teorema de Pitágoras.

9 Calcula o valor das seguintes expresións.

a) $\cos 30^\circ - \text{sen } 60^\circ + \text{tx } 45^\circ$

b) $\cos^2 60^\circ - \text{sen}^2 45^\circ$

c) $\text{tx } 60^\circ + \text{sen } 45^\circ - \cos^2 30^\circ$

d) $\text{tx } 30^\circ + \text{tx } 60^\circ - \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$

5 Razóns dun ángulo calquera

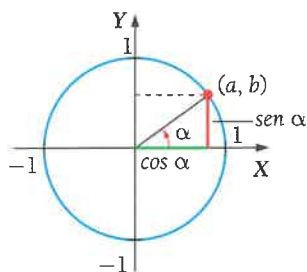
Esríbese así

Se un ángulo vén medido en radiáns ao escribir as súas razóns trigonométricas os ángulos exprésanse sen unidades.

$\text{sen } 2^\circ \rightarrow$ Seno de 2 graos

$\text{sen } 2 \rightarrow$ Seno de 2 radiáns

Imos ver outra maneira de determinar as razóns trigonométricas dun ángulo.



- Sobre uns eixes de coordenadas trazamos unha circunferencia de raio 1, con centro na orixe de coordenadas. Esta circunferencia chámase **circunferencia goniométrica**.
- Para representar un ángulo α situamos o seu vértice sobre a orixe de coordenadas e un dos seus lados sobre o eixe X.

Ten en conta que o ángulo se mide sempre desde o eixe X e en sentido directo (sentido contrario ás agullas do reloxo).

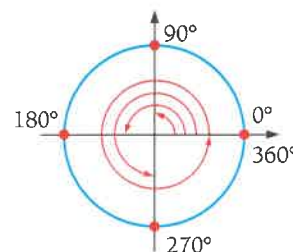
Desta maneira, cada ángulo α queda determinado polas súas coordenadas, (a, b) , que indican un punto sobre a circunferencia. E cúmprese que:

$$(a, b) = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$$

Esta forma de definir as razóns trigonométricas dun ángulo permítenos coñecer as razóns de calquera ángulo.

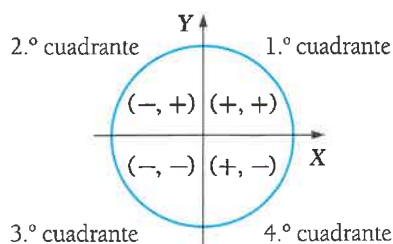
As razóns dos ángulos que coinciden nos eixes de coordenadas: 0° , 90° , 180° , 270° e 360° , veñen dadas na seguinte táboa.

Ángulo α	0°	90°	180°	270°	360°
$\text{sen } \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\text{tg } \alpha$	0	Non existe	0	Non existe	0



Dependendo do cuadrante onde se encontre o punto, os **signos das razóns trigonométricas** varían.

Signos do coseno e do seno



Punto (a, b)	1.º cuadrante	2.º cuadrante	3.º cuadrante	4.º cuadrante
Ángulo α	De 0° a 90°	De 90° a 180°	De 180° a 270°	De 270° a 360°
$\text{sen } \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\text{tg } \alpha$	+	-	+	-

ACTIVIDADES

10 Indica o signo que teñen as razóns trigonométricas dos ángulos, identificando o cuadrante no que se encontran.

- a) 66° d) 135°
 b) 18° e) 342°
 c) 175° f) 120°

11 Razoa a resposta.

- a) Por que non existe $\text{tg } 90^\circ$?
 b) Ocorre o mesmo con todos os ángulos que son múltiplos de 90° ?

12 Indica o signo das razóns trigonométricas dos ángulos que presentan unha amplitude que é múltiplo de 90° .

5.1. Redución de ángulos ao 1.º cuadrante

- Se β é un ángulo do 2.º cuadrante, existe un ángulo α do 1.º cuadrante tal que β se pode expresar como $180^\circ - \alpha$.

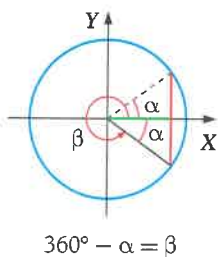
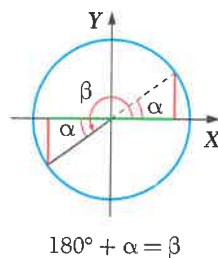
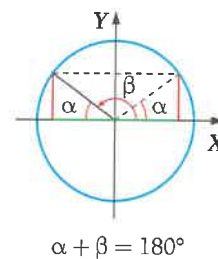
$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \alpha \quad \cos \beta = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$$

- Se β é un ángulo do 3.º cuadrante, existe un ángulo α do 1.º cuadrante tal que β se pode expresar como $180^\circ + \alpha$.

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha \quad \cos \beta = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

- Se β é un ángulo do 4.º cuadrante, existe un ángulo α do 1.º cuadrante tal que β se pode expresar como $360^\circ - \alpha$.

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha \quad \cos \beta = \cos \alpha \quad \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$$



Faíno así

COMO CALCULAMOS AS RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO REDUCÍNDOO AO 1.º CUADRANTE

Calcula as razóns trigonométricas destes ángulos.

- a) $\beta = 150^\circ$ b) $\beta = 225^\circ$ c) $\beta = 300^\circ$

PRIMEIRO. Identificamos a que cuadrante pertence cada ángulo.

- a) $90^\circ < \beta < 180^\circ$ b) $180^\circ < \beta < 270^\circ$ c) $270^\circ < \beta < 360^\circ$

SEGUNDO. Relacionamos cada ángulo en función doutro ángulo do 1.º cuadrante.

- a) $\alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \alpha + 150^\circ = 180^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$
 b) $\beta = 180^\circ + \alpha \rightarrow 225^\circ = 180^\circ + \alpha \rightarrow \alpha = 45^\circ$
 c) $\beta = 360^\circ - \alpha \rightarrow 300^\circ = 360^\circ - \alpha \rightarrow \alpha = 60^\circ$

TERCEIRO. Calculamos as razóns trigonométricas de β a partir das de α .

- a) $\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ$ $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$ $\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ$
 b) $\operatorname{sen} 225^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ$ $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ$ $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ$
 c) $\operatorname{sen} 300^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ$ $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ$ $\operatorname{tg} 300^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ$

5.2. Ángulos maiores ca 360°

Se o ángulo é maior ca 360° , dividimos entre 360° e analizamos o resto.

Faíno así

COMO CALCULAMOS AS RAZÓNS DE ÁNGULOS MAIORES CA 360°

Calcula o seno e o coseno de $\beta = 870^\circ$.

PRIMEIRO. Facemos a división de β entre 360° . $\begin{array}{r} 870 \\ 360 \\ \hline 150 \end{array} \rightarrow 870^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 150^\circ$

SEGUNDO. Calculamos as razóns trigonométricas do resto da división.

$$\operatorname{sen} 870^\circ = \operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ \quad \cos 870^\circ = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$$

ACTIVIDADES

- 13** Sabendo que $\cos 50^\circ = 0,6428$; calcula as razóns trigonométricas de:

- a) 130° c) -50°
 b) 230° d) 310°

- 14** Calcula as razóns trigonométricas en función das razóns doutros ángulos do 1.º cuadrante.

- a) 475° c) 1.130° e) 1.215°
 b) 885° d) 695° f) 985°

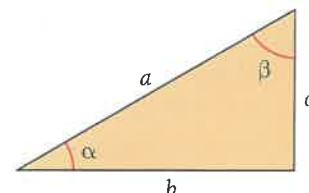
6 Fórmulas trigonométricas

6.1. Razóns de ángulos complementarios, suplementarios e opostos

- Se consideramos un triángulo rectángulo:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$$

Os ángulos agudos dun triángulo rectángulo son **complementarios**. Calculamos as súas razóns trigonométricas:



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a} \rightarrow \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} \rightarrow \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \cos (90^\circ - \alpha) = \frac{c}{a} \rightarrow \cos (90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

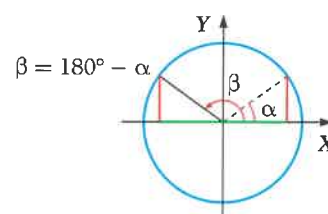
$$\operatorname{tx} \alpha = \frac{c}{b} \rightarrow \operatorname{tx} (90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} \rightarrow \operatorname{tx} (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tx} \alpha}$$

- O **suplementario** dun ángulo agudo é un ángulo situado no 2.º cuadrante.

$$\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tx} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tx} \alpha$$

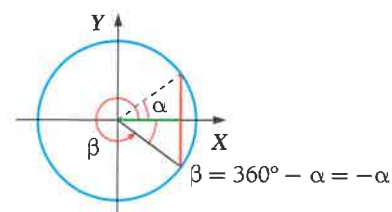


- Ao representar na circunferencia o ángulo $-\alpha$, que é o **oposto** de α , dámonos de conta de que coincide co ángulo $360^\circ - \alpha$.

$$\operatorname{sen} (-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

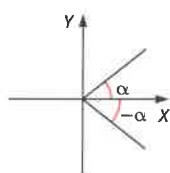
$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tx} (-\alpha) = -\operatorname{tx} \alpha$$



Lembra

Dado o ángulo α , o seu oposto é $-\alpha$.



Exemplo

- 3 Dados $\operatorname{sen} 73^\circ = 0,956$; $\cos 73^\circ = 0,292$ e $\operatorname{tx} 73^\circ = 3,274$; calcula as razóns trigonométricas de 17° , 107° e -73° .

	$17^\circ = 90^\circ - 73^\circ$	$107^\circ = 180^\circ - 73^\circ$	-73°
$\operatorname{sen} \alpha$	0,292	0,956	-0,956
$\cos \alpha$	0,956	-0,292	0,292
$\operatorname{tx} \alpha$	0,305	-3,274	-3,274

ACTIVIDADES

- 15 Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{5}$, calcula:

a) $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)$ b) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$ c) $\operatorname{sen} (-\alpha)$

- 16 Se $\operatorname{sen} 18^\circ = 0,309$ e $\cos 18^\circ = 0,951$; calcula:

a) $\operatorname{sen} 72^\circ$ b) $\cos 162^\circ$ c) $\operatorname{tx} (-72^\circ)$

- 17 Indica como son os ángulos α e β se cumpren as seguintes igualdades.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$

b) $\cos \alpha = \cos \beta$

c) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$

6.2. Razóns da suma e a diferenza de dous ángulos

Suma de ángulos	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta \\ \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \\ \text{tx } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tx } \alpha + \text{tx } \beta}{1 - \text{tx } \alpha \text{tx } \beta} \end{array} \right.$	
	Diferenza de ángulos	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } (\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta \\ \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \\ \text{tx } (\alpha - \beta) = \frac{\text{tx } \alpha - \text{tx } \beta}{1 + \text{tx } \alpha \text{tx } \beta} \end{array} \right.$

Exemplo

- 4 Calcula $\text{sen } 105^\circ$ e $\cos 15^\circ$.

$$\text{sen } 105^\circ = \text{sen } (60^\circ + 45^\circ) = \text{sen } 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \text{sen } 45^\circ = 0,97$$

$$\cos 15^\circ = \cos (60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \text{sen } 60^\circ \text{sen } 45^\circ = 0,97$$

6.3. Razóns do ángulo dobre e do ángulo metade

Ángulo dobre

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

$$\text{tx } 2\alpha = \frac{2 \text{tx } \alpha}{1 - \text{tx}^2 \alpha}$$

Ángulo metade

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{tx } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Non esquezas



No caso do ángulo metade, o signo será + ou -, dependendo do cuadrante no que se sitúe $\frac{\alpha}{2}$.

Exemplo

- 5 Determina $\cos 120^\circ$ e $\text{tx } 15^\circ$.

$$\cos 120^\circ = \cos (2 \cdot 60^\circ) = \cos^2 60^\circ - \text{sen}^2 60^\circ = -0,5$$

$$\text{tx } 15^\circ = \text{tx } \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = 0,27$$

Neste caso, tomamos o signo + porque o ángulo de 15° está no 1.º cuadrante e, por tanto, a súa tanxente é positiva.

ACTIVIDADES

- 18 A partir das razóns de 30° e 45° , calcula as razóns trigonométricas de 75° e $22,5^\circ$.

- 19 Expresa en función de $\text{tx } \alpha$, as razóns trigonométricas $\text{sen } 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$.

7 Ecuacións trigonométricas

Non esquezas



As ecuacións trigonométricas non adoitan ter unha solución única.

As ecuacións trigonométricas son ecuacións nas que a incógnita é un ángulo que aparece asociado a unha razón trigonométrica.

A súa solución exprésase como a medida dun ángulo e todos os ángulos que se obteñen engadíndolle un número enteiro de voltas. Ademais, é necesario comprobar as solucións porque algunhas delas poden non ser válidas.

Exemplo

6 Resolve estas ecuacións trigonométricas.

a) $2 \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$

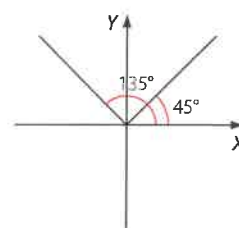
Pasamos o 2 ao segundo membro: $2 \operatorname{sen} x = \sqrt{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Os ángulos que teñen un seno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

son 45° e 135° , e todos os ángulos que se obteñen engadindo un número enteiro de voltas aos anteriores.

Isto exprésase da seguinte maneira.

$$\begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 135^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$



b) $2 \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = 3$

Aplicamos as fórmulas trigonométricas.

$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = 3 \xrightarrow{\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} 2 \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 3 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x = 3 \cos x$$

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, e aplicámolo na ecuación.

$$2 \operatorname{sen}^2 x = 3 \cos x \xrightarrow{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x} 2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

Se consideramos esta ecuación como unha ecuación de segundo grao, onde a incógnita é $\cos x$, temos que:

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \end{cases}$$

A solución $\cos x = -2$ non é válida porque $-1 \leq \cos x \leq 1$.

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

ACTIVIDADES

20 Resolve as seguintes ecuacións trigonométricas no intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

a) $5 \operatorname{sen} x = 2$

c) $5 \operatorname{tg} x = 12$

b) $7 \cos x = -1$

d) $2 \operatorname{tg} x = 2$

21 Resolve estas ecuacións trigonométricas e simplifica o resultado.

a) $\operatorname{sen} 2x = 1$

b) $\cos x + \cos 2x = 0$

8 Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo é obter os seus elementos descoñecidos (lonxitude dos seus lados e amplitude dos seus ángulos) a partir doutros elementos coñecidos.

8.1. Coñecidos dous lados

Para calcular un dos seus ángulos agudos, utilizamos a razón trigonométrica que relaciona os dous lados coñecidos.

Faino así

COMO RESOLVEMOS UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO, COÑECENDO DOUS DOS SEUS LADOS

Resolve este triángulo rectángulo.

PRIMEIRO. Aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular o outro cateto.

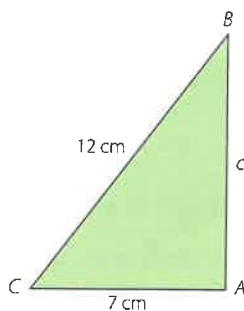
$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=12, b=7} c = \sqrt{12^2 - 7^2} = 9,75 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Utilizamos unha das súas razóns trigonométricas para calcular un dos seus ángulos agudos.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{7}{12} = 0,5833 \rightarrow \hat{B} = 35^\circ 40' 58''$$

TERCEIRO. Determinamos o terceiro ángulo coa relación de ángulos complementarios.

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{B} = 35^\circ 40' 58''} \hat{C} = 90^\circ - 35^\circ 41' 7'' = 54^\circ 19' 2''$$



Lembra

Para resolver triángulos rectángulos hai que ter en conta que:

- Coñecemos un dos seus ángulos, o ángulo recto.
- Os seus lados cumpren o teorema de Pitágoras.
- Os seus dous ángulos agudos son complementarios.

8.2. Coñecidos un lado e un ángulo agudo

Para calcular un dos seus lados, utilizamos a razón trigonométrica que relaciona o ángulo e o lado coñecidos.

Faino así

COMO RESOLVEMOS UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO, COÑECENDO UN ÁNGULO E UN LADO

Resolve este triángulo rectángulo.

PRIMEIRO. Utilizamos a relación de ángulos complementarios para calcular o terceiro ángulo.

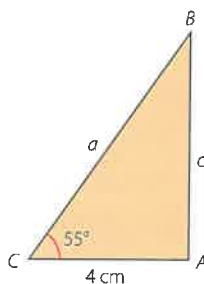
$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{C} = 55^\circ} \hat{B} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

SEGUNDO. Utilizamos unha das súas razóns trigonométricas para calcular outro dos seus lados.

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} \xrightarrow{\hat{C} = 55^\circ, b = 4} c = 4 \cdot \operatorname{tg} 55^\circ = 5,72 \text{ cm}$$

TERCEIRO. Aplicamos o teorema de Pitágoras para determinar o terceiro lado.

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=4; c=5,72} a = \sqrt{4^2 + 5,72^2} = 6,98 \text{ cm}$$



Calculadora

Para calcular o ángulo cuxo seno é un número, adóitase utilizar a tecla $\sin^{-1}$, que corresponde a $\operatorname{INV} \sin$.

$$\operatorname{INV} \sin 0,583333333 = 35,68533$$

Esta función chámase arco seno de x e escríbese $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$.

Da mesma maneira, pódese calcular o ángulo que corresponde a un coseno ou a unha tanxente.

As funcións correspondentes son $\operatorname{arc} \operatorname{cos} x$ e $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

ACTIVIDADES

22 Nun triángulo rectángulo cun ángulo recto que é $\hat{A}$, sábese que $b = 30 \text{ m}$ e $c = 25 \text{ m}$. Resólveo.

23 Dun triángulo rectángulo $\hat{ABC}$, coñecemos que $\hat{C} = 62^\circ$ e que a hipotenusa a mide 1 m . Calcula os seus elementos.

9 Teorema do seno

Teorema do seno

En calquera triángulo de ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, e lados a , b e c , cúmprese que:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

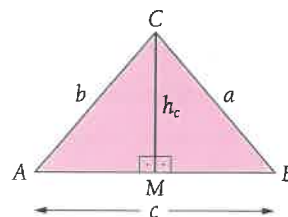
Para demostrar esta igualdade trazamos unha das alturas, h_c , nun triángulo $\widehat{ABC}$. Obtemos dous triángulos rectángulos, $\widehat{AMC}$ e $\widehat{BMC}$.

No triángulo $\widehat{AMC}$:

$$\sin \hat{A} = \frac{h_c}{b} \rightarrow h_c = b \cdot \sin \hat{A}$$

No triángulo $\widehat{BMC}$:

$$\sin \hat{B} = \frac{h_c}{a} \rightarrow h_c = a \cdot \sin \hat{B}$$



Se en ambas as expresións despegamos h_c , e igualamos os resultados, resulta: $b \cdot \sin \hat{A} = a \cdot \sin \hat{B}$, o que podemos expresar como: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$

Se repetimos o proceso coa altura h_A , obteríamos: $\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

Non esquezas

O teorema do seno permite determinar a lonxitude dun dos lados dun triángulo, coñecendo:

- O seu ángulo oposto.
- Outro lado.
- O ángulo oposto a este lado.

Exemplo

7 Calcula a lonxitude de b e c neste triángulo.

Calculamos o valor de $\hat{C}$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$$

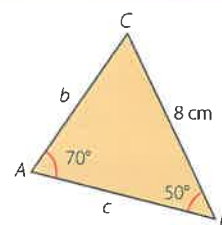
Aplicamos o teorema do seno.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \quad a = 8, \hat{A} = 70^\circ, \hat{B} = 50^\circ \rightarrow \frac{8}{\sin 70^\circ} = \frac{b}{\sin 50^\circ}$$

$$b = \frac{8 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 70^\circ} = 6,52 \text{ cm}$$

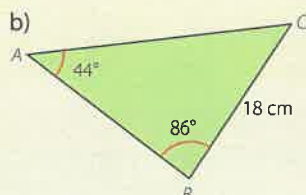
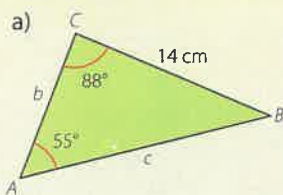
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad a = 8, \hat{A} = 70^\circ, \hat{C} = 60^\circ \rightarrow \frac{8}{\sin 70^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

$$c = \frac{8 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ} = 7,37 \text{ cm}$$



ACTIVIDADES

24 Calcula b e c nestes triángulos.



25 Razona se é posible que nun triángulo se cumpran estas igualdades.

$$a = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

$$a = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

10 Teorema do coseno

Teorema do coseno

En calquera triángulo de ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, e lados a , b e c , cúmprese que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

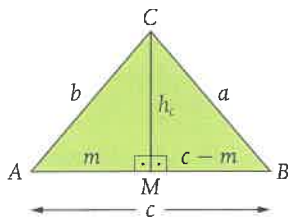
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Para demostrar este teorema trazamos unha das alturas, h_c , nun triángulo $\widehat{ABC}$. Obtemos dous triángulos rectángulos, $\widehat{AMC}$ e $\widehat{MBC}$.

No triángulo $\widehat{AMC}$:

$$\sin \hat{A} = \frac{h_c}{b} \rightarrow h_c = b \cdot \sin \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{m}{b} \rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A}$$



Aplicando o teorema de Pitágoras no triángulo $\widehat{MBC}$:

$$a^2 = (c - m)^2 + h_c^2$$

Como $h_c = b \cdot \sin \hat{A}$ e $m = b \cdot \cos \hat{A}$, temos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - m)^2 + h_c^2 \rightarrow a^2 = (c - b \cdot \cos \hat{A})^2 + (b \cdot \sin \hat{A})^2 \\ &\rightarrow a^2 = c^2 - 2cb \cdot \cos \hat{A} + \underbrace{b^2 \cdot \cos^2 \hat{A} + b^2 \cdot \sin^2 \hat{A}}_{\text{Factor común } b^2} \\ &\rightarrow a^2 = c^2 - 2cb \cdot \cos \hat{A} + \underbrace{b^2(\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A})}_1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos \hat{A}$$

De forma análoga obteríanse as outras dúas igualdades.

Exemplo

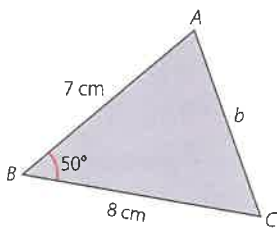
8 Calcula a lonxitude do lado b neste triángulo.

Aplicamos o teorema do coseno.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$b^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos 50^\circ = 40,98$$

$$b = \sqrt{40,98} = 6,4 \text{ cm}$$



Non esquezas



O teorema do coseno permite determinar a lonxitude dun dos lados dun triángulo, coñecendo:

- Os outros lados.
- O ángulo oposto a este lado.

ACTIVIDADES

26 Un triángulo $\widehat{ABC}$ é rectángulo e a lonxitude da súa hipotenusa é a .

- Aplica o teorema do coseno ao ángulo recto $\hat{A}$.
- En que teorema se transforma o teorema do coseno neste caso?

27 Decide se as seguintes medidas corresponden ás lonxitudes dos lados dun triángulo, e indica se é acutángulo, rectángulo ou obtusángulo.

- 12, 11 e 9 cm
- 23, 14 e 8 cm
- 26, 24 e 10 cm
- 40, 30 e 20 m

11 Resolución de triángulos calquera

11.1. Coñecidos os tres lados

Para calcular os seus ángulos utilizamos o teorema do coseno.

Faino así

COMO RESOLVEMOS UN TRIÁNGULO, COÑECENDO OS SEUS TRES LADOS

Resolve o triángulo.

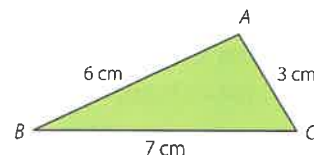
PRIMEIRO. Aplicamos o teorema do coseno para obter dous dos seus ángulos.

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \\ 7^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos \hat{A} \\ \cos \hat{A} &= -0,111 \rightarrow \hat{A} = 96^\circ 22' 23''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\ 3^2 &= 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos \hat{B} \\ \cos \hat{B} &= 0,905 \rightarrow \hat{B} = 25^\circ 10' 37''\end{aligned}$$

SEGUNDO. Utilizamos a suma de ángulos dun triángulo para calcular o terceiro ángulo.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow 96^\circ 22' 23'' + 25^\circ 10' 37'' + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 58^\circ 27'$$



11.2. Coñecidos dous lados e o ángulo comprendido

É necesario aplicar o teorema do coseno para calcular o terceiro lado.

Decátate



Se $\sin \hat{A} = 0,62$; $\hat{A}$ pode ser un ángulo agudo ou obtuso (pertencente ao 1.º ou 2.º cuadrantes).

$$\sin \hat{A} = 0,62 \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 38^\circ 18' 58'' \\ \hat{A} = 141^\circ 41' 2'' \end{cases}$$

Neste caso, $\hat{A}$ non pode ser $141^\circ 41' 2''$ porque:

$$\hat{A} + \hat{C} = 141^\circ 41' 2'' + 48^\circ > 180^\circ$$

Faino así

COMO RESOLVEMOS UN TRIÁNGULO, COÑECENDO DOUS LADOS E O ÁNGULO QUE COMPREENDEN

Resolve este triángulo.

PRIMEIRO. Utilizamos o teorema do coseno para calcular o lado que falta.

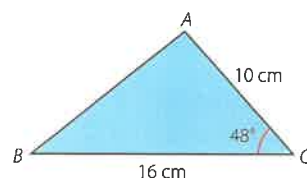
$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \\ c^2 &= 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 48^\circ \\ c &= \sqrt{141,92} = 11,91 \text{ cm}\end{aligned}$$

SEGUNDO. Aplicamos o teorema do seno para determinar un dos seus ángulos.

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{10}{\sin \hat{B}} = \frac{11,91}{\sin 48^\circ} \rightarrow \sin \hat{B} = 0,624$$
$$\hat{B} = 38^\circ 36' 32''$$

TERCEIRO. Utilizamos a suma de ángulos dun triángulo para calcular o terceiro ángulo.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{A} + 38^\circ 36' 32'' + 48^\circ = 180^\circ \rightarrow \hat{A} = 93^\circ 23' 28''$$



ACTIVIDADES

28 Nunha construción, dúas traves de 10 m están soldadas polos seus extremos e forman un triángulo con outra viga de 15 m. Calcula os ángulos que forman entre si.

29 Nun romboide, os lados miden 5 cm e 8 cm e unha das súas diagonais mide 10 cm. Calcula a medida dos seus catro ángulos.

11.3. Coñecidos dous lados e o ángulo oposto a un deles

Este caso pode dar lugar a dúas solucións.

Faino así

COMO RESOLVEMOS UN TRIÁNGULO, COÑECENDO DOUS LADOS E O ÁNGULO OPOSTO A UN DELES

Resolve o seguinte triángulo.

PRIMEIRO. Aplicamos o teorema do seno para calcular o ángulo oposto ao outro lado coñecido.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \frac{11}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{9}{\operatorname{sen} 50^\circ}$$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = 0,936 \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 60^\circ 23' 24'' \\ \hat{A} = 110^\circ 36' 36'' \end{cases}$$

SEGUNDO. Utilizamos a suma de ángulos para calcular o terceiro ángulo.

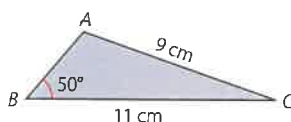
$$1.^\circ \text{ solución: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow 69^\circ 23' 24'' + 50^\circ + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 60^\circ 36' 36''$$

$$2.^\circ \text{ solución: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow 110^\circ 36' 36'' + 50^\circ + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 19^\circ 23' 24''$$

TERCEIRO. Aplicamos o teorema do seno para determinar o terceiro lado.

$$1.^\circ \text{ solución: } \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{9}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 60^\circ 36' 36''} \rightarrow c = 10,23 \text{ cm}$$

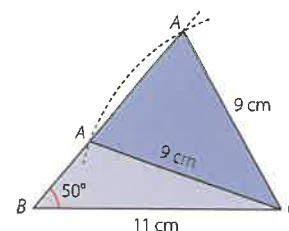
$$2.^\circ \text{ solución: } \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{9}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 19^\circ 23' 24''} \rightarrow c = 3,9 \text{ cm}$$



Non esquezas



Se ao resolver o triángulo obtemos dúas solucións, significa que existen dous triángulos que cumpren as condicións iniciais.



11.4. Coñecidos un lado e dous ángulos

Este caso pode resolverse mediante o teorema do seno.

Faino así

COMO RESOLVEMOS UN TRIÁNGULO, COÑECENDO UN LADO E DOUS ÁNGULOS

Resolve este triángulo.

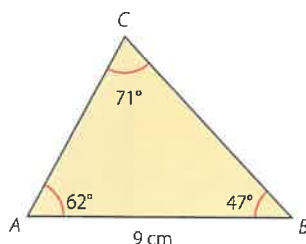
PRIMEIRO. Utilizamos a suma de ángulos para calcular o terceiro ángulo.

$$62^\circ + 47^\circ + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 71^\circ$$

SEGUNDO. Aplicamos o teorema do seno para calcular os outros dous lados.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} 62^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 47^\circ} = \frac{9}{\operatorname{sen} 71^\circ}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 8,4 \text{ cm} \\ b = 6,95 \text{ cm} \end{cases}$$



ACTIVIDADES

30 Resolve o triángulo, sabendo que dous dos seus lados miden 14 cm e 18 cm, respectivamente, e o ángulo oposto a un deles mide 70° . Debuxa o triángulo.

31 Ao resolver o triángulo con $a = 4 \text{ m}$, $c = 6 \text{ m}$ e $\hat{A} = 25^\circ$, obtemos como solucións dous triángulos obtusángulos. Comproba que isto é posible e debuxa as solucións.

Razóns trigonométricas

1. COMO SE CALCULAN AS RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO, COÑECIDA UNHA DELAS

9 Calcula o seno, o coseno e a tanxente do ángulo α .

a) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ e $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

b) $\tan \alpha = -2$ e $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

SOLUCIÓN

- Se a razón coñecida non é a tanxente ou a cotanxente.

PRIMEIRO. Aplícase esta fórmula.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\cos \alpha = \frac{1}{4}} \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} = \pm 0,97$$

SEGUNDO. Tense en conta o cuadrante onde está o ángulo para determinar a solución.

Como $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, α está no 4.º cuadrante e, por tanto, o seno ten que ser negativo, resulta que: $\sin \alpha = -0,97$.

TERCEIRO. Aplícase a fórmula $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\sin \alpha = -0,97; \cos \alpha = 0,25} \rightarrow \tan \alpha = \frac{-0,97}{0,25} = -3,88$$

- Se a razón coñecida é a tanxente ou a cotanxente.

PRIMEIRO. Formúlase e resólvese un sistema de ecuacións coas dúas fórmulas.

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \sin \alpha = -2 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\xrightarrow{\sin \alpha = -2 \cos \alpha} \\ &\rightarrow (-2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \\ &\rightarrow 5 \cos^2 \alpha = 1 \\ &\rightarrow \cos \alpha = \pm 0,45 \end{aligned}$$

SEGUNDO. Tense en conta o cuadrante onde está o ángulo para determinar a solución.

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \cos \alpha = -0,45$$

TERCEIRO. Substitúese o resultado nunha das ecuacións para calcular a outra razón.

$$\begin{aligned} \sin \alpha = -2 \cos \alpha &\xrightarrow{\cos \alpha = -0,45} \\ &\rightarrow \sin \alpha = -2 \cdot (-0,45) = 0,9 \end{aligned}$$

Fórmulas trigonométricas

1. COMO SE CALCULAN AS RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO A PARTIR DAS RAZÓNS DE ÁNGULOS COÑECIDOS

10 Sabendo que $\sin 40^\circ = 0,64$ e $\cos 40^\circ = 0,77$; calcula a razón trigonométrica do ángulo que se indica en cada caso.

- a) $\sin 50^\circ$ c) $\sin 320^\circ$ e) $\sin 5^\circ$ g) $\sin 20^\circ$
b) $\sin 140^\circ$ d) $\sin 70^\circ$ f) $\sin 80^\circ$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Compróbase se é posible escribir o ángulo da razón trigonométrica que se pide como 90° , 180° ou 360° menos o ángulo do que se coñece a razón trigonométrica, ou como 180° máis ese ángulo.

Neste caso, o ángulo de razóns coñecidas é de 40° .

- a) $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$
 $\sin (90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ = 0,77$
b) $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
 $\sin (180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ = 0,64$
c) $360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$
 $\sin (-40^\circ) = -\sin 40^\circ = -0,64$

SEGUNDO. Se non é posible, inténtase expresar como a suma ou a diferenza de 30° , 45° ou 60° e o ángulo do que se coñece a razón trigonométrica. Neste caso, o ángulo de razóns coñecidas é de 40° .

- d) $40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$
 $\sin (40^\circ + 30^\circ) = \sin 40^\circ \cos 30^\circ + \cos 40^\circ \sin 30^\circ = 0,95$
e) $45^\circ - 40^\circ = 5^\circ$
 $\sin (45^\circ - 40^\circ) = \sin 45^\circ \cos 40^\circ - \cos 45^\circ \sin 40^\circ = 0,1$

TERCEIRO. Se tampouco é posible, exprésase como o ángulo dobre ou metade do ángulo do que se coñece a razón trigonométrica.

Neste caso, o ángulo de razóns coñecidas son de 40° .

- f) O ángulo cunha amplitude de 80° pódese expresar como o ángulo dobre de 40° .
 $2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$
 $\sin (2 \cdot 40^\circ) = 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ = 0,98$

- g) O ángulo cunha amplitude de 20° pódese expresar como o ángulo metade de 40° .

$$\frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

$$\sin \frac{40^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 40^\circ}{2}} = 0,34$$

Tómase a solución positiva porque o ángulo pertence ao 1.º cuadrante.

Ecuaciones trigonométricas

1. COMO SE RESOLVEN ECUACIONES TRIGONÓMICAS DO TIPO $\operatorname{sen} f(x) = k$, $\cos f(x) = k$ OU $\operatorname{tg} f(x) = k$

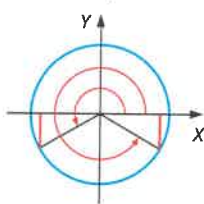
11 Resolve esta ecuación.

$$\operatorname{sen}(2x + 30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculanse os ángulos cunha razón trigonométrica que teña este resultado.

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} 210^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} 330^\circ = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



SEGUNDO. Igualanse os ángulos e despéxase x .

$$\begin{cases} 2x + 30^\circ = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 330^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x = 150^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$$

2. COMO SE RESOLVEN ECUACIONES TRIGONÓMICAS NAS QUE HAI QUE EXPRESAR TODAS AS RAZÓNS TRIGONÓMICAS EN FUNCIÓN DUNHA DELAS

12 Resolve a seguinte ecuación trigonométrica.

$$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Redúcese a un só ángulo.

$$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\downarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 3 \cos x + 2 = 0$$

SEGUNDO. Redúcese a unha soa razón trigonométrica.

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\downarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

TERCEIRO. Resolvemos a ecuación onde a incógnita é unha das razóns trigonométricas.

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \end{cases}$$

3. COMO SE RESOLVEN ECUACIONES TRIGONÓMICAS NAS QUE HAI QUE FACTORIZAR

13 Resolve esta ecuación trigonométrica.

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Redúcese a un só ángulo e simplifícase a expresión.

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$$

Factor común $\operatorname{sen} x$

$$\operatorname{sen} x (2 \cos x - 1) = 0$$

SEGUNDO. Cando a expresión está factorizada, igualase cada un dos factores a cero.

$$\operatorname{sen} x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_3 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_4 = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

4. COMO SE RESOLVEN ECUACIONES TRIGONÓMICAS NAS QUE HAI QUE APLICAR FÓRMULAS TRIGONÓMICAS EN SENTIDO INVERSO

14 Resolve esta ecuación trigonométrica.

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x - 2 = 0$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Transfórmase a ecuación ata obter algunhas das fórmulas que se coñecen da suma ou diferenza de ángulos, o ángulo dobre ou o ángulo metade.

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x - 2 = 0$$

:2

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x - 1 = 0$$

$$\downarrow \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 30^\circ \cos x = 1$$

$$\downarrow \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(x - 30^\circ) = 1$$

SEGUNDO. Resólvese a ecuación resultante.

$$\operatorname{sen}(x - 30^\circ) = 1 \rightarrow x - 30^\circ = 90^\circ \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k$$

5. COMO SE VERIFICA UNHA IDENTIDADE TRIGONOMÉTRICA

 Demostra que $\frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Transfórmase o primeiro membro da igualdade, aplicando as fórmulas trigonométricas que se coñecen.

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} &= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\cancel{2} \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{tg}^2 x)}{\cancel{2} \operatorname{tg} x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \end{aligned}$$

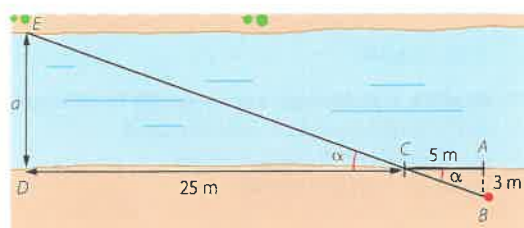
SEGUNDO. Simplifícase e se se obtén o segundo membro, a igualdade está demostrada. Se non é así, transfórmase o segundo membro ata obter o resultado.

$$\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} - \frac{\operatorname{sen} x \cancel{\operatorname{tg}^2 x}}{\cancel{\operatorname{tg} x}} = \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$$

Resolución dun triángulo calquera

1. COMO SE APLICA A RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS PARA RESOLVER PROBLEMAS

16 Xoán quere saber a largura dun río sen ter que desprazarse á outra beira. Medindo os seus pasos, chega á seguinte situación.



Canto mide o río de largo?

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. O triángulo $\widehat{ABC}$ é un triángulo rectángulo do que se coñecen dous dos seus lados e do que se quere calcular o ángulo α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$

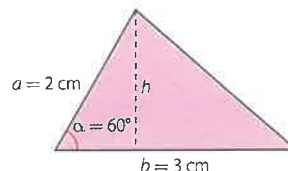
SEGUNDO. O triángulo $\widehat{DCE}$ é un triángulo rectángulo do que se coñecen un dos seus lados e un ángulo, α . Determinábase a .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{25} \xrightarrow{\operatorname{tg} \alpha = 0,6} 0,6 = \frac{a}{25} \rightarrow a = 15 \text{ m}$$

Resolución de triángulos

1. COMO SE CALCULA A ÁREA DUN TRIÁNGULO, COÑECENDO DOUS DOS SEUS LADOS E O ÁNGULO QUE FORMAN

17 Calcula a área deste triángulo.



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase a altura utilizando o seno do ángulo.

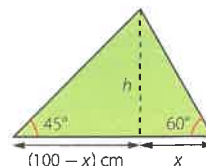
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{a} \rightarrow h = 2 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

SEGUNDO. Determinábase a área.

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

2. COMO SE CALCULA A ALTURA DUN TRIÁNGULO, COÑECENDO UN DOS SEUS LADOS E OS SEUS DOUS ÁNGULOS ADXACENTES

18 Calcula a altura deste triángulo.



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. A altura divide o triángulo inicial en dous triángulos rectángulos.

Aplicase a definición de tanxente nos dous ángulos coñecidos e fórmase un sistema de ecuacións.

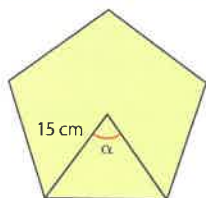
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{h}{100 - x} \rightarrow h = (100 - x) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \end{aligned} \right\}$$

SEGUNDO. Resólvese o sistema e calcúlase a solución.

$$\begin{aligned} h &= x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \\ h &= (100 - x) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \\ x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ &= (100 - x) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \\ x \cdot (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ) &= 100 \operatorname{tg} 45^\circ \\ x &= \frac{100 \operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ} = 36,63 \text{ cm} \\ h &= x \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \xrightarrow{x = 36,63} h = 63,37 \text{ cm} \end{aligned}$$

3. COMO SE CALCULA A ÁREA DUN POLÍGONO REGULAR, COÑECENDO O SEU RAIÓ

- 19 Determina a área deste pentágono regular.



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculase a medida do ángulo central.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

SEGUNDO. Cálculase a área do triángulo que forman dous dos seus raios co lado, e multiplícase polo seu número de lados, n .



$$A = \frac{r \cdot r \cdot \sin \alpha}{2} \cdot n = \frac{15 \cdot 15 \cdot \sin 72^\circ}{2} \cdot 5 = 534,375 \text{ cm}^2$$

Teoremas do seno e do coseno

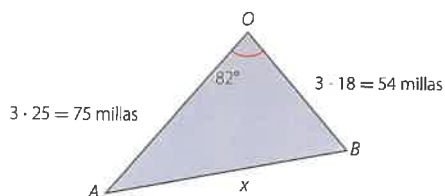
1. COMO SE RESOLVEN PROBLEMAS APLICANDO O TEOREMA DO COSENO

- 20 Dous barcos saen simultaneamente dun porto con rumbos que forman un ángulo de 82° . O primeiro navega a unha velocidade de 18 millas por hora, e o segundo, a 25 millas por hora. Mantéñense inalterados os rumbos e o alcance dos seus equipos de raio é de 180 millas, poderán poñerse en contacto ao cabo de 3 horas?

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Debúxase o triángulo que se forma cos datos do problema, e calcúlanse todos os elementos que sexa posible.

Denótanse os dous barcos por A e B.



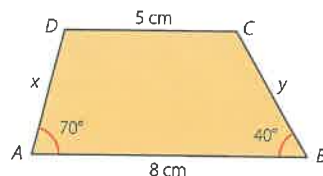
SEGUNDO. Aplícase o teorema do coseno para calcular o elemento buscado.

$$\overline{AB} = \sqrt{54^2 + 75^2 - 2 \cdot 54 \cdot 75 \cdot \cos 82^\circ} = 86,10 \text{ millas}$$

Por tanto, os barcos si que se poden poñer en contacto.

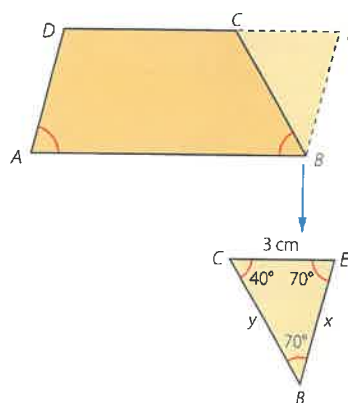
2. COMO SE RESOLVEN PROBLEMAS APLICANDO O TEOREMA DO SENO

- 21 Calcula a lonxitude dos lados AD e BC.



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Trázase, polo vértice B, unha liña paralela ao lado AD e obtense o triángulo BEC.



Neste triángulo coñécense:

- Os ángulos $\widehat{C}$ e $\widehat{E}$, que miden, respectivamente, 40° e 70° .
- O ángulo $\widehat{B}$, que mide:
 $\widehat{B} = 180^\circ - (40^\circ + 70^\circ) = 70^\circ$
- A lonxitude do lado oposto ao ángulo $\widehat{B}$, que é de 3 cm.

SEGUNDO. Aplícase o teorema do seno cos dous ángulos coñecidos.

$$\frac{3}{\sin 70^\circ} = \frac{x}{\sin 40^\circ}$$

Despéxase x

$$x = \frac{3 \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = 2,05 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{\sin 70^\circ} = \frac{y}{\sin 70^\circ}$$

Despéxase y

$$y = \frac{3 \sin 70^\circ}{\sin 70^\circ} = 3 \text{ cm}$$

Ángulos. Razóns trigonométricas dos ángulos agudos

32 Transforma os seguintes ángulos en graos ou radiáns, segundo corresponda.

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| a) 225° | i) $\frac{\pi}{3}$ rad |
| b) 75° | l) $0,3$ rad |
| c) 160° | m) 120° |
| d) $-1,5$ rad | n) 315° |
| e) 2 rad | ñ) $264^\circ 25'$ |
| f) 540° | o) $\frac{7\pi}{2}$ rad |
| g) -270° | p) $\frac{-6\pi}{5}$ rad |
| h) $140^\circ 40'$ | |

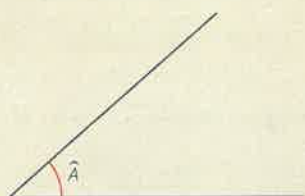
33 Debuxa tres ángulos agudos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, tales que:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = 3,4$$

34 Debuxa dúas rectas perpendiculares a un dos lados deste ángulo, de modo que se formen dous triángulos rectángulos.



Mide os lados dos dous triángulos e verifica que as razóns do ángulo $\hat{A}$ son idénticas en ambos.

35 Comproba se son certas ou non as seguintes igualdades, sen usar a calculadora.

- $\operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ$
- $\cos 90^\circ - \cos 30^\circ = \cos 60^\circ$
- $\operatorname{tg} 60^\circ = 2 \operatorname{tg} 30^\circ$
- $\operatorname{sen} 60^\circ = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ$
- $\cos 45^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{2}$
- $\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ$

36 Os ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ son agudos. Completa a seguinte táboa sen determinalos.

Seno	Coseno	Tanxente
$\operatorname{sen} \hat{A} = 0,5602$		
	$\cos \hat{B} = 0,1849$	
		$\operatorname{tg} \hat{C} = 2,7804$

37 Emprega a calculadora para determinar os ángulos agudos que cumpren:

- | | |
|--|--|
| a) $\cos \hat{A} = 0,3453$ | e) $\operatorname{tg} \hat{E} = 0,3554$ |
| b) $\operatorname{tg} \hat{B} = 2,3688$ | f) $\operatorname{sen} \hat{F} = 0,0968$ |
| c) $\operatorname{cosec} \hat{C} = 1,9044$ | g) $\operatorname{sen} \hat{G} = 0,2494$ |
| d) $\cos \hat{D} = 0,9726$ | h) $\cot x \hat{H} = 2,5$ |

38 Determina as seguintes razóns.

- | | |
|---|--|
| a) $\operatorname{sen} 19^\circ 22' 37''$ | g) $\operatorname{tg} 83^\circ 41' 57''$ |
| b) $\cos 44^\circ 52'$ | h) $\operatorname{sen} 37^\circ 25''$ |
| c) $\cos 1,03$ | i) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ |
| d) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$ | l) $\cos 0,845$ |
| e) $\sec 54^\circ 28'$ | m) $\cot x 35^\circ 40'$ |
| f) $\operatorname{cosec} \pi$ | n) $\sec \frac{\pi}{6}$ |

39 Resolve os triángulos rectángulos correspondentes, considerando que $\hat{A}$ é o ángulo recto.

- $b = 7$ m, $\hat{B} = 48^\circ$
- $c = 12$ m, $\hat{B} = 28^\circ$
- $a = 13$ m, $c = 5$ m
- $a = 6$ cm, $\hat{C} = 42^\circ 12'$
- $b = 3$ m, $c = 6$ m
- $b = 8$ m, $a = 10$ m

40 Se nos situamos a 40 metros da cheminea dunha fábrica vémola baixo un ángulo de 26° . Que altura ten? Considera que os ollos do observador están situados a 175 cm do chan.

41 Unha barca está atada á beira dun canal cunha corda que mide 8 metros. En certo momento, esta corda forma un ángulo de 38° co bordo. A que distancia da beira se encontra a barca?



42 As bases dun trapezio isóscele miden 8 cm e 14 cm, e os lados iguais, 5 cm. Calcula a medida dos seus ángulos.

43 Que ángulo forman entre si as diagonais dun rectángulo de 10 cm de base e 6 cm de altura?

44 Un pentágono regular está inscrito nunha circunferencia de 20 cm de raio. Determina a medida do seu lado.

45 Calcula a lonxitude do lado dun dodecágono regular circunscrito a unha circunferencia de raio 6 cm.

Razóns trigonométricas de ángulos calquera

- 46** A táboa mostra razóns trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes. Sen determinalos, complétaa coas razóns que faltan.

Cuadrante	sen	cos	tx
Segundo	0,6702		
Terceiro		-0,4539	
Cuarto			-0,7459
Terceiro	-0,7822		
Segundo			-1,9004
Cuarto		0,6983	

- 47** Sen usar a calculadora, determina.

- a) $\sin \pi - \tan \pi + 2 \cos \pi$
b) $\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}$
c) $\tan 2\pi - \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{3\pi}{2}$
d) $\cos 2\pi - \sin 2\pi$

- 48** Completa, sen usar a calculadora, os valores do seno dos seguintes ángulos.

$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π

- 49** Completa, sen usar a calculadora, os valores do coseno dos seguintes ángulos.

$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π

- 50** Completa, sen usar a calculadora, os valores da tanxente dos seguintes ángulos.

-60°	-45°	-30°	0	30°	45°	60°	90°
120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°

- 51** Utiliza a calculadora para atopar as razóns.

- a) $\sin 319^\circ 12' 52''$ g) $\tan 183^\circ 13' 53''$
b) $\cos 434^\circ 26'$ h) $\sin 333^\circ 55''$
c) $\tan 7,03$ i) $\tan \frac{11\pi}{8}$
d) $\sin \frac{8\pi}{5}$ l) $\cos 3,845$
e) $\operatorname{cosec} 200^\circ 16'$ m) $\cot x \frac{11\pi}{6}$
f) $\sec \frac{5\pi}{4}$ n) $\operatorname{cosec} 5,24$

- 52** Reduce os ángulos ao 1.º cuadrante e calcula estas razóns.

- a) $\sin 131^\circ$ f) $\tan 238^\circ 24'$
b) $\cos 334^\circ 46'$ g) $\sin 302^\circ 15''$
c) $\tan 146^\circ 22''$ h) $\cos 192^\circ 21' 32''$
d) $\operatorname{cosec} 122^\circ 53'$ i) $\cot x 295^\circ 12' 45''$
e) $\sec 156^\circ 23' 6''$ l) $\sec 203^\circ 36' 54''$

- 53** Na circunferencia goniométrica, debuxa e obtén con axuda da calculadora.

- a) Dous ángulos cun seno de 0,36.
b) Dous ángulos cunha tanxente de -3,54.

- 54** Calcula os seguintes ángulos.

- a) $\arccos 0,4539$ e) $\arctan 2,1618$
b) $\arcsin 0,9284$ f) $\arccos (-0,2926)$
c) $\arctan (-0,5459)$ g) $\arcsin 0,6862$
d) $\arccos (-0,3996)$ h) $\arcsin (-0,3308)$

- 55** Coñecidas as razóns de 30° , 45° e 60° , obtén, sen usar a calculadora, as razóns de 120° , 225° , 240° e 300° .

- 56** Determina o ángulo α do 1.º cuadrante cuxas razóns trigonométricas verifican:

- $\sin \alpha = |\sin 249^\circ 31'|$
- $\cos \alpha = |\cos 249^\circ 31'|$
- $\tan \alpha = |\tan 249^\circ 31'|$

Calcula cales son as súas razóns trigonométricas.

- 57** Que ángulo do 3.º cuadrante ten o mesmo coseno ca $132^\circ 24' 18''$?

Usa a calculadora para obter as razóns deses dous ángulos e compáraas.

- 58** Que ángulo do 2.º cuadrante ten a mesma tanxente ca $337^\circ 54' 29''$?

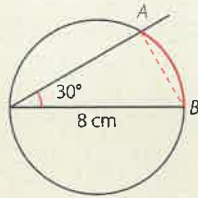
Con axuda da calculadora, obtén as razóns dos ángulos e compáraas.

- 59** Sabendo que $\sin \alpha = 0,23$ e que α é un ángulo agudo, determina as razóns trigonométricas.

- a) $\cos \alpha$ d) $\cos (180^\circ - \alpha)$
b) $\tan \alpha$ e) $\sin (180^\circ + \alpha)$
c) $\tan (-\alpha)$ f) $\sin (720^\circ + \alpha)$

ACTIVIDADES

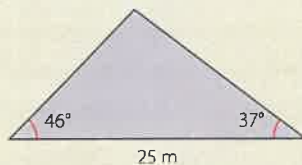
- 60 Na seguinte circunferencia, calcula a medida do segmento AB e do arco de circunferencia $\widehat{AB}$.



- 61 Calcula as razóns trigonométricas destes ángulos.

- a) $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$, $\cos \gamma = -0,54$
 b) $\frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$, $\sin \delta = 0$

- 62 Calcula a área deste triángulo.



Resolución de triángulos

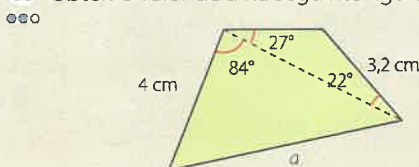
- 63 Resolve os seguintes triángulos.

- | | | |
|-----------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $a = 10$ cm | $b = 14$ cm | $c = 8$ cm |
| b) $b = 6$ cm | $c = 9$ cm | $\hat{A} = 39^\circ 12'$ |
| c) $a = 7$ cm | $\hat{B} = 38^\circ 49'$ | $\hat{C} = 66^\circ 40'$ |
| d) $a = 8$ cm | $b = 10$ cm | $\hat{B} = 36^\circ 38'$ |
| e) $a = 2,1$ cm | $b = 1,4$ cm | $c = 1,8$ cm |
| f) $a = 9$ cm | $c = 5$ cm | $\hat{B} = 103^\circ 27'$ |
| g) $b = 8,3$ cm | $c = 9,1$ cm | $\hat{C} = 112^\circ 50'$ |
| h) $c = 6$ cm | $\hat{A} = 27^\circ 42'$ | $\hat{B} = 98^\circ 20'$ |

- 64 Encontra as solucións para estes triángulos.

- | | | |
|----------------|----------------|--------------------------|
| a) $a = 12$ cm | $b = 7$ cm | $c = 6$ cm |
| b) $a = 8$ cm | $c = 9$ cm | $\hat{A} = 42^\circ 55'$ |
| c) $a = 10$ cm | $c = 9$ cm | $\hat{A} = 72^\circ 55'$ |
| d) $b = 6$ cm | $c = 4,5$ cm | $\hat{C} = 38^\circ 26'$ |
| e) $c = 12$ cm | $A = 92^\circ$ | $\hat{B} = 26^\circ 28'$ |
| f) $a = 11$ cm | $b = 12$ cm | $\hat{A} = 27^\circ 36'$ |

- 65 Obtén o valor de a na seguinte figura.



- 66 Nunha parede hai dúas argolas distantes 8 m entre si.

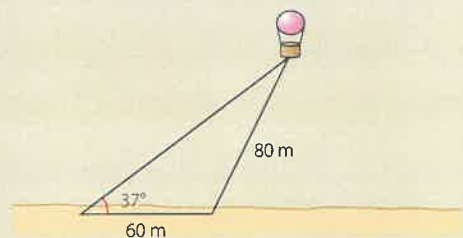
- Un neno ata cada extremo dunha corda ás argolas e afástase da parede ata que a corda queda tensa. Nese momento, a corda forma ángulos de 50° e 37° coa parede.

- a) Canto mide a corda?
 b) A que distancia está o neno da parede?

- 67 Dous exploradores perdéronse e deciden seguir camiños distintos para conseguir axuda. Para saber onde está o outro en cada momento manteñen un rumbo fixo e as súas traxectorias forman un ángulo de 54° . Se un camiña a 5 km/h e o outro o fai a 4 km/h, a que distancia se encontran ao cabo de 2 horas? E despois de 6 horas?



- 68 Un globo aerostático encóntrase suxeito ao chan, mediante dous cables de aceiro, en dous puntos que distan 60 m. O cable máis curto mide 80 m e o ángulo que forma o outro cable co chan é de 37° .



Calcula.

- a) A medida do outro cable.
 b) A distancia do globo ao chan.

- 69 Os segmentos que unen os vértices dun triángulo co seu circuncentro dividen a circunferencia circunscrita en 3 partes.

- a) Se o raio desa circunferencia mide 4 cm e dous dos arcos teñen unha amplitude de 128° e 83° , canto mide o outro arco?
 b) Calcula a medida dos lados e dos ángulos do triángulo.

- 70 Un dos ángulos dun trapezio isóscele mide 65° , os lados iguais miden 8 cm e a súa diagonal é de 15 cm. Determina a súa área.

- 71 O ancho dun escenario de teatro mide 8 m. As localidades que compramos están situadas a unha distancia de 6 m e 12 m de cada un dos extremos laterais do escenario.

- Cal é o ángulo de visión que teremos para ver a representación?



Ángulos suma, diferencia, dobre e metade

72 A partir das razóns de 30° , 45° e 60° obtén, sen usar a calculadora, as razóns de 75° , 105° e 15° . Comproba logo os resultados coa calculadora.

73 Tendo en conta as fórmulas trigonométricas e as razóns de ángulos coñecidos, calcula as razóns dos ángulos cunha amplitude de $7^\circ 30'$ e 210° . Comproba os resultados que obtiveches coa calculadora.

74 Calcula as razóns de $67^\circ 30'$, 195° e $52^\circ 30'$. Comproba os resultados coa calculadora.

75 Sabemos que $\sin 56^\circ = 0,83$ e $\cos 23^\circ = 0,92$.

- a) Calcula o resto de razóns deses ángulos.
- b) Calcula as razóns trigonométricas de 79° .
- c) Determina as razóns de 33° .
- d) Poderías calcular as razóns de 28° ?
- e) E as de 46° ?

76 Obtén unha fórmula simplificada de:

- a) $\sin(30^\circ + \hat{A})$
- c) $\tan(45^\circ - \hat{C})$
- b) $\cos(\hat{B} - 60^\circ)$
- d) $\cos(\hat{D} + 30^\circ)$

77 Se $\sin x = 0,6$ e $\cos x = -0,8$; calcula as seguintes razóns trigonométricas.

- a) $\cos(x - \pi)$
- d) $\sin(x - \pi)$
- b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- e) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- c) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- f) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Razoa en que cuadrante se encontra cada un deses ángulos.

78 O ángulo que se forma entre cada dous nervios dun abano é de 15° . Se o abano ten catro nervios centrais, calcula as razóns trigonométricas dos ángulos que se forman ao despregalo nervio a nervio.



79 Sabendo que $\sin x = \frac{2}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sen calcular previamente o valor de x .

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

- a) Expresa os resultados utilizando radicais.
- b) Explica como determinarías as razóns de $\frac{\pi}{4}$ rad e $\frac{\pi}{3}$ rad.

80 Sábese que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\tan x = \frac{3}{4}$.

- a) Calcula $\sin x$ e $\cos x$.
- b) Determina, utilizando radicais, as razóns dos ángulos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4}$.
- c) Sen determinar o ángulo x , calcula:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

- d) Sen determinar o ángulo x , decide razoadamente en que cuadrante están os ángulos.

$$x - \frac{\pi}{4} \quad x + \frac{\pi}{6}$$

81 Sabendo que as razóns de 32° son:

$$\sin 32^\circ = 0,53 \quad \cos 32^\circ = 0,848$$

- a) Calcula as razóns trigonométricas de 62° .
- b) Calcula as razóns de 31° .
- c) Podes medir calquera ángulo cunha medida en graos que non teña minutos nin segundos?

Igualdades e ecuacións trigonométricas

82 Expresa en función da razón dun só ángulo.

$$1 + \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha$$

83 Demostra que se verifican estas igualdades.

- a) $1 + \sin 2\alpha = 2 \sin(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha - 45^\circ)$
- b) $\cos 2\alpha = 2 \sin(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha + 45^\circ)$

84 Comproba a seguinte relación entre as razóns trigonométricas dun ángulo.

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin 2x} = \frac{\tan x}{2}$$

85 Demostra que é certa a igualdade.

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

86 Simplifica a expresión.

$$\frac{2 \cos(45^\circ - \alpha) \cos(45^\circ + \alpha)}{\cos 2\alpha}$$

87 Busca unha fórmula simplificada para calcular as razóns do ángulo triplo:

$$\sin 3\alpha \text{ e } \cos 3\alpha.$$

Comproba o resultado obtido para o ángulo $\alpha = 40^\circ$.

88 Demostra a seguinte igualdade.

$$\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) = \cos \beta$$

89 Demostra que se verifica a igualdade.

$$\frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b} = \frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)}$$

ACTIVIDADES

- 90** Comproba, substituíndo α por un ángulo coñecido, que a seguinte igualdade é certa.

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

Demostra que esta propiedade se cumpre para calquera ángulo α .

- 91** Resolve as seguintes ecuacións.

a) $\cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 1$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$

d) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 1$ *NON*

e) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x = 0$

f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 0$

g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

h) $\frac{\operatorname{sen}(60^\circ - x)}{\cos x} = 1$

i) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \operatorname{tg} x - 1 = 0$

l) $\operatorname{sen}(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$

- 92** Resolve estes sistemas de ecuacións trigonométricas.

a) $\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y &= 1 \\ \cos^2 x - \cos^2 y &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$

b) $\left. \begin{aligned} x + y &= 120 \\ \cos x &= \frac{1}{2 \cos y} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} y \end{aligned} \right\}$

- 93** Resolve as ecuacións trigonométricas.

a) $4 \operatorname{sen} x - \sec x = 0$

b) $\frac{\cos^2 x}{2 \cos x + \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$

c) $\frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} + 2 \operatorname{sen} x = 2 \cos x$

d) $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 5 \cos^2 x - 4$

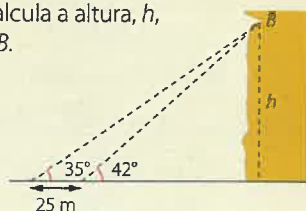
e) $2 \cos x - 1 = \sec x$

f) $2 \cos x + \operatorname{sen} x = 1$

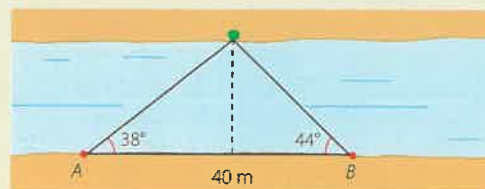
g) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

Problemas con trigonometría

- 94** Observa a situación e, con axuda da trigonometría, calcula a altura, h , á que está o punto B.



- 95** Dous amigos están separados por unha distancia de 40 metros e ven unha árbore na beira oposta dun río, como indica a figura. Calcula a anchura do río.

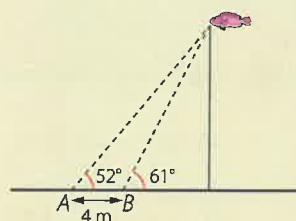


- 96** Un mastro súxéitase ao chan por dous cables de aceiro que forman ángulos de 43° e $57^\circ 50'$ con este, respectivamente. Se as distancias dos cables ao pé do mastro suman 15 m, cal é a altura do mastro?

- 97** Sabendo que a área dun triángulo rectángulo é 28 cm^2 e que un dos seus ángulos mide 60° :

- a) Canto mide cada un dos seus ángulos?
b) Calcula a lonxitude dos seus lados e o seu perímetro.

- 98** Dúas persoas foron pescar e están colocadas na beira a unha distancia de 4 m entre si, polo que ven saltar un peixe cos ángulos que indica a figura.



Que cantidade de sedal necesita cada un para lanzar o anzol ata o lugar onde saltou o peixe?

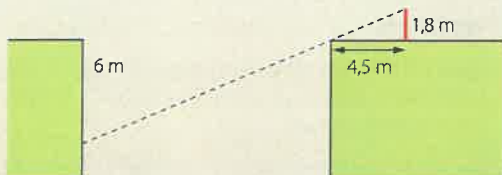
- 99** Dous focos, situados no chan e en lados distintos, iluminan o campanario dunha igrexa. A suma das distancias dos focos ata o pé da torre é de 100 m. Se os ángulos que forman os feixes de luz co chan son de 32° e 46° , respectivamente, que altura ten o campanario?

- 100** Nunha montaña vense, en liña recta cara ao leste, dous barrios que están separados por 800 metros. Desde a cima, obsérvanse con ángulos de 18° e $26^\circ 40'$, respectivamente.



- a) Cal é a altura da montaña?
b) A que distancia se encontra cada barrio do observador?

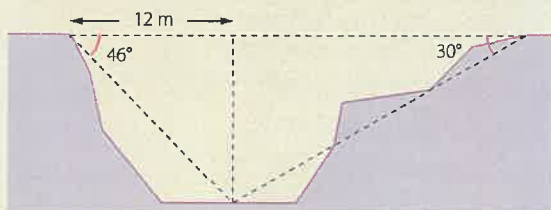
- 101** Ester e María desexan medir a largura dunha gorxa entre montañas. Para iso colócanse nun dos bordos do mesmo. Ester deixa esvarar unha corda que ten 6 m de longo, sosténdoa desde o bordo do precipicio. Pola súa parte, María, que ten os ollos a 1,8 m do chan, debe retirarse 4,5 metros para ver o bordo máis próximo coincidindo co final da corda.



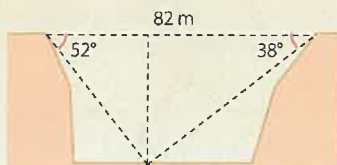
- a) Que largura ten?
b) Poderíase calcular sen facer uso da trigonometría?
- 102** Antón mide 1,70 m e observa que a súa sombra é de 50 cm a certa hora do día. Con que inclinación chegan os raios solares a esa hora?
- 103** Unha casa de planta rectangular mide 12 metros de longo e 8 metros de largo. O tellado, cunha inclinación de 18° , é unha superficie plana inclinada cuxa parte máis elevada está situada sobre un dos lados maiores do rectángulo. Calcula a área do tellado.



- 104** Para construír un viaduto tomáronse estas medidas.



- a) Que lonxitude terá o viaduto?
b) Cal é a altura máxima dos piares que o suxeitan?
- 105** Calcula a altura á que camiñan os viaxeiros cando cruzan un desfiladeiro por unha ponte colgante como a da figura.



- 106** Sabendo que x é un ángulo do 2.º cuadrante e que $\tan x = -0,5322$, determina, sen calcular o ángulo x :

- a) $\sin 2x$
b) $\cos \left(90^\circ - \frac{x}{2} \right)$

- 107** Demostra que a suma das tanxentes dos tres ángulos dun triángulo é igual ca o seu produto.

- 108** As medidas dos lados dun triángulo son proporcionais a 5, 6 e 7, respectivamente, e a súa área é $24\sqrt{6}$. Determina a medida dos seus lados e dos seus ángulos.

- 109** Comproba que a seguinte fórmula se cumpre se $\hat{A}$ mide 45° .

$$\sin^2 \left(\frac{\hat{A} + 30^\circ}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{2} \cos 30^\circ + \sqrt{2} \sin 30^\circ}{4}$$

Demuestra que é unha igualdade que só se cumpre para outro valor de $\hat{A}$. Encóntralo.

- 110** Obtén a relación que existe entre o lado dun pentágono regular e o raio da circunferencia onde se atopa inscrito.

- 111** Nun triángulo rectángulo verifícase tamén o teorema do seno. Investiga se isto nos dá información adicional sobre os elementos dese triángulo.

- 112** O teorema do coseno ten tres enunciados, un para cada lado do triángulo. Se o triángulo é rectángulo e a é a hipotenusa, a fórmula do teorema do coseno que empeza por a é, realmente, o teorema de Pitágoras. Investiga se os outros dous enunciados nos dan algunha propiedade nova do triángulo.

- 113** Sabemos que $\tan z = 1,5$. Con estes datos, podes calcular $\tan \left(z + \frac{\pi}{2} \right)$ sen determinar o ángulo z ?

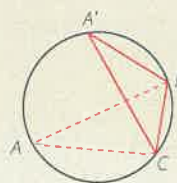
Se aplicas a fórmula do ángulo suma terás dificultades. Utiliza esta expresión.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

- 114** Dous ángulos inscritos nunha circunferencia que abranguen o mesmo arco miden igual. Utilízao para demostrar que:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

sendo d o diámetro da circunferencia circunscrita ao triángulo.



Reflexiona sobre a teoría

- 115** Para que valores de k ten solución a ecuación $\sin x \cos x = k$?
Indica as posibles solucións.

IDEA CLAVE

Utiliza as razóns trigonométricas do ángulo dobre.

- 116** Demuestra que a bisectriz interior do ángulo $\widehat{A}$, no triángulo $\widehat{ABC}$, divide o lado oposto en dous segmentos proporcionais aos lados AB e AC .

IDEA CLAVE

Aplica o teorema do seno nos dous triángulos nos que a bisectriz trazada divide ao triángulo $\widehat{ABC}$.

- 117** Demuestra que a suma do seno e do coseno dun ángulo é sempre menor ou igual ca o dobre do seno de $\frac{\pi}{4}$ radiáns.

Para que ángulos se verifica a igualdade?

IDEA CLAVE

Aplica o método de redución ao absurdo: supoñer o contrario ao que se quere demostrar e chegar a unha contradición.

- 118** Calcula o perímetro e a área dun polígono regular de raio r e n lados.

IDEA CLAVE

Divide o polígono en triángulos isósceles desde o centro da circunferencia circunscrita.

Pensa un pouco máis

- 119** Nun triángulo equilátero de lado l trazáronse as circunferencias inscrita e circunscrita. Calcula a altura do triángulo e a medida dos raios de ambas as circunferencias en función de l .

Análise do enunciado

Os ángulos dun triángulo equilátero miden 60° , e a altura é a suma dos raios de ambas as circunferencias.



Deseño da resolución

Relacionamos as incógnitas coas razóns trigonométricas de 30° e 60° .

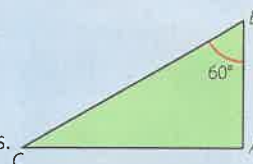
Clave para resolver o problema

O triángulo que forman os dous raios coa metade do lado é un triángulo rectángulo.

- 120** Nun triángulo $\widehat{ABC}$ cúmprense as seguintes condicións.

- O lado BC mide o dobre que o lado AB .
- O ángulo $\widehat{B}$ mide 60° .

Calcula os outros dous ángulos.



Análise do enunciado

Os datos proporcionánnos a relación que existe entre dous lados dun triángulo e o ángulo que forman.

Deseño da resolución

Coa relación das medidas dos lados e o ángulo, constrúese o triángulo. Despois, aplícanse as técnicas de resolución de triángulos.

Clave para resolver o problema

Aplícanse os teoremas do coseno e do seno.

Tamén se pode realizar sen axuda da trigonometría, trazando a mediana correspondente ao lado BC .