

2 Ecuacións, inecuacións e sistemas

LITERATURA E MATEMÁTICAS

O último Catón

A calor era infernal, apenas quedaba aire e xa case non vía, e non só polas gotas de suor que me caían nos ollos, senón porque estaba desfalecida. Notaba un doce sopor, un sono ardente que se apoderaba de min, deixándome sen forza. O chan, aquela fría prancha de ferro que nos recibira ao chegar, era un lago de lume que cegaba. Todo tiña un resplandor alaranxado e encarnado, mesmo nós. [...]

Pero, entón, comprendino. Era tan fácil! Abondoume botar unha última ollada ás mans que Farag e eu tiñamos entrelazadas: naquela maraña, húmida pola suor e brillante pola luz, os dedos multiplicáranse... Á miña cabeza volveu, coma nun soño, un xogo infantil, un truco que o meu irmán Cesare me ensinara cando era pequena para non ter que aprender de memoria as táboas de multiplicar. Para a táboa do nove, explicárame Cesare, só había que estender as dúas mans, contar desde o dedo maimiño da man esquerda ata chegar ao número multiplicador e dobrar ese dedo. A cantidade de dedos que quedaba á esquerda, era a primeira cifra do resultado, e a que quedaba á dereita, a segunda.

Ceibeime do apertón de Farag, que non abriu os ollos, e regresei fronte ao anxo. Por un momento crin que perdería o equilibrio, pero sostívome a esperanza. Non eran seis e tres os elos que había que deixar colgando! Eran sesenta e tres. Pero sesenta e tres non era unha combinación que puidese marcarse naquela caixa forte. Sesenta e tres era o produto, o resultado de multiplicar outros dous números, coma no truco de Cesare, e eran tan fáciles de adiviñar!: os números de Dante, o nove e o sete! Nove por sete, sesenta e tres; sete por nove, sesenta e tres, seis e tres. Non había máis posibilidades. Soltei un berro de alegría e empecei a tirar das cadeas. É certo que desvariaba, que a miña mente sufría dunha euforia que non era outra cousa que o resultado da falta de osíxeno. Pero aquela euforia proporcionárame a solución: Sete e nove! O nove e o sete, que foi a clave que funcionou. [...] A lousa coa figura do anxo afundiú lentamente na terra, deixando á vista un novo e fresco corredor.

MATILDE ASENSI

Binomio de Newton
Factorización de polinomios
Fraccións alxébricas
Resolución de ecuacións
Sistemas de ecuacións
Inecuacións
Sistemas de inecuacións

Xustifica alxebricamente por que funciona o *truco* para a tabó de multiplicar por 9, e demostra que non existe un *truco* parecido para multiplicar por un número distinto de 9.

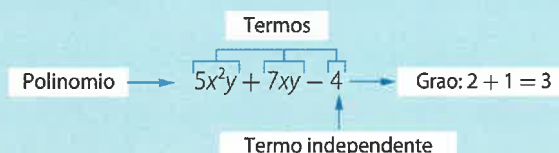
Polinomios

Un **polinomio** é unha expresión alxébrica formada pola suma de dous ou máis monomios.

Os monomios que o forman chámanse **termos**.

O **grao** dun polinomio é o grao do termo de maior grao.

O **termo independente** dun polinomio é o monomio de grao 0.



O **valor numérico** do polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, para $x = 2$, obtense substituindo x por 2 e operando: $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$

Repasa

- 1 Pon un exemplo de polinomio de grao 4 e con termo independente -5. Determina os seus termos e o seu valor numérico para $x = 2$ e $x = -1$.

Sacar factor común

Sacar factor común consiste en transformar unha expresión de suma ou resta en produto.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Factor común}} \\ a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \\ \xleftarrow{\text{Propiedade distributiva}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Factor común}} \\ a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c) \\ \xleftarrow{\text{Propiedade distributiva}} \end{array}$$

Sacamos factor común a $30x^2y^4 - 12xy^3 + 18xy^2$.

Comprobamos se hai letras que se repiten en todos os sumandos. Se as hai, tomamos as letras que aparecen con menor expoñente. Neste caso, x e y^2 .

Calculamos o m.c.d. dos coeficientes de cada termo.

$$\text{m.c.d.}(30, 12, 18) = 6$$

O factor común é as letras e o número que obtivemos. Dividimos o polinomio entre o factor común, e expresámolo como produto do factor común polo polinomio resultante da división.

$$\begin{aligned} 30x^2y^4 - 12xy^3 + 18xy^2 &\xrightarrow{6xy^2} 5xy^2 - 2y + 3 \\ 30x^2y^4 - 12xy^3 + 18xy^2 &= (6xy^2)(5xy^2 - 2y + 3) \end{aligned}$$

Repasa

- 2 Saca factor común ás seguintes expresións.

a) $4x^2yz^3 - 12xz^2 - 20xy^4z$ b) $2x(3x^2 - 1) - 8(3x^2 - 1) - (3x^2 - 1)$

Regra de Ruffini

A **regra de Ruffini** é un procedemento que facilita a división de polinomios cando o divisor é da forma $(x - a)$, sendo a un número enteiro.

Realizamos esta división: $(x^3 + 3) : (x + 1)$

Escribimos os coeficientes de todos os termos do dividendo, engadindo un cero no lugar do coeficiente de cada termo que falte.

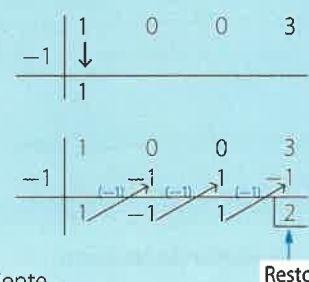
$$x^3 + 3 = 1x^3 + 0x^2 + 0x + 3$$

Á esquerda colocamos o termo independente do divisor cambiado de signo, e poñemos o primeiro coeficiente na fila de resultados.

Multiplicamos este coeficiente polo termo independente do divisor cambiado de signo, e sumámoslo ao seguinte coeficiente.

Repetimos o proceso ata chegar ao último coeficiente.

Os primeiros números que aparecen na fila de resultados corresponden aos coeficientes do cociente, e o último é o resto.



Repasa

- 3 Realiza esta división pola regra de Ruffini: $(4x^5 - 12x^3 - 20x + 2) : (x + 2)$

Elementos dunha ecuación

$$\underbrace{x}_{\text{Termo}} + \underbrace{(2x-6)}_{\text{Termo}} = \underbrace{2x^2}_{\text{Termo}} + \underbrace{7x}_{\text{Termo}} - \underbrace{(x+3)}_{\text{Termo}}$$

Incógnita: x
Grao: 2

1.º membro 2.º membro

$$-2x = 4 \xrightarrow{\text{Solución}} x = -2 \text{ porque } -2 \cdot (-2) = 4$$

$$x^2 = 1 \xrightarrow{\text{Solucións}} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \text{ porque } \begin{cases} 1^2 = 1 \\ (-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = -1 \xrightarrow{\text{Solución}} \text{Ningún número real elevado ao cadrado é negativo. Non ten solución.}$$

Repasa

4 Indica os elementos desta ecuación: $(x+2) \cdot (x-5) + 2 = 7 - x^2$

5 Cales dos seguintes valores son solucións

da ecuación $\frac{x+4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5-x}{2}$?

a) $x = 1$ b) $x = 5$ c) $x = -2$ d) $x = 2$

Resolución de ecuacións de primeiro grao

Resolver unha ecuación

é encontrar todas as súas posibles solucións.

Resolvemos esta ecuación: $\frac{3(2x+4)}{5} - x = -\frac{2(2-x)}{3}$

Eliminar os denominadores. Para iso calculamos o m.c.m. dos denominadores e multiplicamos os dous membros por el.

$$\begin{aligned} \text{m.c.m. } (5, 3) = 15 &\rightarrow 15 \left(\frac{3(2x+4)}{5} - x \right) = 15 \left(-\frac{2(2-x)}{3} \right) \\ &\rightarrow \frac{15}{5} \cdot 3(2x+4) - 15x = -\frac{15}{3} \cdot 2(2-x) \\ &\rightarrow 9(2x+4) - 15x = -10(2-x) \end{aligned}$$

Quitar as parénteses. Débese ter coidado cos signos negativos.

$$9(2x+4) - 15x = -10(2-x) \rightarrow 18x + 36 - 15x = -20 + 10x$$

Agrupar os termos con x nun dos membros, e os números, no outro. Para iso utilizamos a transposición de termos.

$$18x + 36 - 15x = -20 + 10x \rightarrow 18x - 15x - 10x = -20 - 36$$

Reducir termos semellantes.

$$18x - 15x - 10x = -20 - 36 \rightarrow -7x = -56 \rightarrow 56 = 7x$$

Despexar a incógnita.

$$56 = 7x \rightarrow \frac{56}{7} = x \rightarrow x = 8$$

Comprobar a solución. Substituímos a variable x polo valor da solución nos dous membros e operamos. O resultado debe ser idéntico.

$$\frac{3(2 \cdot 8 + 4)}{5} - 8 = -\frac{2(2-8)}{3} \rightarrow 4 = 4$$

Repasa

6 Resolve as seguintes ecuacións.

a) $\frac{2x-1}{3} - \frac{x-1}{7} = \frac{x}{2}$ c) $\frac{4(x-3)}{2} - \frac{5(x+8)}{6} = 6(x+3) - 2$

b) $\frac{3(x-2)}{2} - (2x-1) = 0$ d) $3\left(x - \frac{2}{3}\right) + 4(2x-1) = \frac{x+4}{7} - 2(x+4)$

1 Potencia dun polinomio

A **potencia dun polinomio**, $P(x)^n$, é unha forma abreviada de escribir o produto do polinomio n veces:

$$P(x)^n = \underbrace{P(x) \cdot P(x) \cdot \dots \cdot P(x)}_{n \text{ veces}}$$

1.1. Números combinatorios

Dado un número natural n , o **factorial de n** , $n!$, é o produto de n por todos os números naturais menores ca el.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Dados dous números naturais m e n , tales que $m \leq n$, defínese o **número combinatorio** « n sobre m », e escríbese $\binom{n}{m}$, como:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Lembra

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

Exemplo

1 Calcula este número combinatorio.

$$\binom{9}{7} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 2 \cdot 1} = 36$$

1.2. Binomio de Newton

A **fórmula do binomio de Newton** serve para calcular as potencias dun binomio utilizando números combinatorios.

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{(n-i)} \cdot b^i = \\ &= \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n \end{aligned}$$

Lembra

Un **binomio** é un polinomio de dous termos.

Por exemplo, $x^3 + 1$ e $-3x^2 + 2$ son binomios, mentres que $x^2 + x + 1$ e $-3x$ non son binomios.

Exemplo

2 Obtén o polinomio que resulta ao desenvolver a expresión $(3x^2 + 2)^4$.

Utilizando a fórmula do binomio de Newton temos:

$$\begin{aligned} (3x^2 + 2)^4 &= \binom{4}{0} (3x^2)^4 + \binom{4}{1} (3x^2)^3 \cdot 2 + \binom{4}{2} (3x^2)^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} (3x^2) \cdot 2^3 + \binom{4}{4} 2^4 = \\ &= 81x^8 + 4 \cdot 27x^6 \cdot 2 + 6 \cdot 9x^4 \cdot 4 + 4 \cdot 3x^2 \cdot 8 + 16 = \\ &= 81x^8 + 216x^6 + 216x^4 + 96x^2 + 16 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

1 Calcula estes números combinatorios.

a) $\binom{7}{2}$

b) $\binom{7}{5}$

c) $\binom{12}{3}$

d) $\binom{8}{7}$

2 Desenvolve as seguintes potencias, utilizando o binomio de Newton.

a) $(2x-5)^3$

b) $(x^3+2x)^5$

2 Raíces dun polinomio

Un número a é **raíz dun polinomio** $P(x)$ se se cumpre que o valor numérico do polinomio para $x = a$ é 0.

$$a \text{ raíz de } P(x) \rightarrow P(a) = 0$$

Exemplo

3 Comproba se 2 e 3 son raíces do polinomio $P(x) = x^3 - 8$.

$$P(x) = x^3 - 8 \xrightarrow{x=2} P(2) = 2^3 - 8 = 0 \rightarrow 2 \text{ é raíz de } P(x)$$

$$P(x) = x^3 - 8 \xrightarrow{x=3} P(3) = 3^3 - 8 \neq 0 \rightarrow 3 \text{ non é raíz de } P(x)$$

Propiedades

- Para que un número enteiro a sexa raíz dun polinomio $P(x)$ é necesario que a sexa divisor do seu termo independente.
- O número de raíces dun polinomio é sempre menor ou igual ca o seu grao.

Faino así

COMO CALCULAMOS AS RAÍCES DUN POLINOMIO

Calcula as raíces deste polinomio: $P(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2$

PRIMEIRO. Calculamos os divisores do termo independente.

Se o polinomio non ten termo independente, sacamos factor común á maior potencia de x posible.

$$P(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(x^3 + 4x^2 + x - 6)$$

Factor común x^2

$$\text{Div}(-6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

Como sacamos factor común x^2 , $P(x)$ ten 0 como raíz.

SEGUNDO. Para comprobar se a , que é divisor do termo independente, é raíz realizamos a división entre $(x - a)$ pola regra de Ruffini.

TERCEIRO. Despois de calcular a primeira raíz, repetimos o proceso ata que non poidamos continuar.

As raíces do polinomio son: $\{0, 1, -2, -3\}$.

	1	4	1	-6	
1		1	5	6	
	1	5	6	0	
-2		-2	-6		
	1	3	0		
-3		-3			
	1	0			

Decátate



- Ao sacar factor común a unha potencia de x , o polinomio sempre ten 0 como raíz.

$$P(x) = x^m(a_n x^n + \dots + b)$$

$$P(0) = 0^m(a_n 0^n + \dots + b) = 0$$

- Cando 1 é unha raíz dun polinomio, a suma dos seus coeficientes é 0.

ACTIVIDADES

3 Comproba se os seguintes números son raíces do polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -4$

4 Calcula as raíces destes polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 1$

b) $Q(x) = x^3 - 9x^2 - x + 105$

3 Factorización de polinomios

A **factorización dun polinomio** consiste en escribilo como produto de polinomios do menor grao posible.

Para factorizar un polinomio utilizamos diversas técnicas como: sacar factor común (cando todos os termos do polinomio teñen un divisor común), as igualdades notables e o cálculo das raíces do polinomio mediante a regra de Ruffini.

Faino así

COMO FACTORIZAMOS UN POLINOMIO

Factoriza estes polinomios.

a) $P(x) = 4x^6 + 8x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 2x^2$

b) $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

PRIMEIRO. Buscamos as raíces enteiras do polinomio.

- Cando o polinomio non ten termo independente, extraemos o factor común x elevado á máxima potencia que poidamos.

a) $P(x) = 4x^6 + 8x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 2x^2 = x^2(4x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 7x - 2)$

Factor común x^2

b) Non é posible sacar factor común.

- Calculamos os divisores do termo independente.

a) $\text{Div}(-2) = \{1, -1, 2, -2\}$

b) $\text{Div}(-2) = \{1, -1, 2, -2\}$

1	4	8	-3	-7	-2
		4	12	9	2
-2	4	12	9	2	0
		-8	-8	-2	
	4	4	1	0	$\rightarrow 4x^2 + 4x + 1$

2	1	-2	1	-2
		2	0	2
	1	0	1	0 $\rightarrow x^2 + 1$

SEGUNDO. Co polinomio que resulta, comprobamos se se poden aplicar as igualdades notables.

a) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

Cadrado dunha suma

b) Non se poden aplicar as igualdades notables.

TERCEIRO. Escribimos os polinomios factorizados.

a) $P(x) = 4x^6 + 8x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 2x^2 = x^2(x-1)(x+2)(2x+1)^2$

b) $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$

Non esquezas



Se a é raíz dun polinomio, entón $(x - a)$ é divisor do polinomio.

Existen polinomios que non teñen raíces reais.

$P(x) = x^2 + 1 \rightarrow$ Non ten raíces reais.

Estes polinomios non se poden factorizar.

ACTIVIDADES

5 Factoriza estes polinomios.

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x$

6 Encontra as raíces enteiras dos polinomios.

a) $12x + 2x^3 + 4 + 9x^2$

b) $x^4 - 8x^2 - 9$

c) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2$

4 Fraccións alxébricas

Unha **fracción alxébrica** é unha división indicada de dous polinomios, onde o denominador é sempre de grao distinto de cero.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con grao } Q(x) \neq 0$$

Faino así

COMO SIMPLIFICAMOS FRACCIÓNS ALXÉBRICAS

Simplifica esta fracción alxébrica: $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$

PRIMEIRO. Factorizamos o numerador e o denominador da fracción.

$$\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} \xrightarrow[\text{Cadrado dunha suma}]{\text{Factor común } x} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2}$$

SEGUNDO. Suprimimos os factores comúns do numerador e do denominador.

$$\frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

Operacións con fraccións alxébricas

As operacións con fraccións alxébricas cumpren as mesmas propiedades ca as operacións con fraccións:

- Suma e resta: reducimos a común denominador.
- Produto: multiplicamos os numeradores e os denominadores.
- Cociente: multiplicamos pola fracción inversa.

Faino así

COMO REDUCIMOS A COMÚN DENOMINADOR VARIAS FRACCIÓNS ALXÉBRICAS

Reduce a común denominador estas fraccións alxébricas: $\frac{x^3}{y^2}, \frac{y-2}{xy}$

PRIMEIRO. Calculamos o mínimo común múltiplo dos denominadores. O resultado é o novo denominador común.

Denominador común: xy^2

SEGUNDO. Dividimos o novo denominador común entre o denominador de cada fracción, e o resultado o multiplicámolo polo numerador.

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{y^2} &\xrightarrow{(xy^2 : y^2) = x} \frac{x^3 \cdot x}{xy^2} = \frac{x^4}{xy^2} \\ \frac{y-2}{xy} &\xrightarrow{(xy^2 : xy) = y} \frac{(y-2)y}{xy^2} \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

7 Simplifica estas fraccións alxébricas.

a) $\frac{3x^2 - 5x}{3x}$

b) $\frac{20 - 8x + 4x^2}{12 + 8x}$

8 Realiza esta operación e simplifica o resultado.

$$\frac{3}{3x^2 + 6x} + \frac{1}{x} - \frac{2-x}{6x+12}$$

5 Ecuaciones de segundo grado

Unha **ecuación de segundo grado** cunha incógnita é unha igualdade alxébrica que se pode expresar da forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a , b e c números reais e $a \neq 0$.

Se b e c son números distintos de cero, dise que a ecuación é **completa**.

Se $b = 0$ ou $c = 0$, a ecuación denomínase **incompleta**.

5.1. Resolución de ecuaciones de segundo grado

		Forma	Soluciones
Ecuaciones de 2.º grado	Completas	$ax^2 + bx + c = 0$ $a, b, c \neq 0$	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	Incompletas	$ax^2 + c = 0$ $b = 0$	$x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$
		$ax^2 + bx = 0$ $c = 0$	$x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$
		$ax^2 = 0$ $b = 0, c = 0$	$x = 0$

Exemplo

4 Resolve as seguintes ecuacións de segundo grado.

a) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

b) $5x^2 + 100x = 0$

a) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

As solucións son 1 e $-\frac{1}{3}$.

b) $5x^2 + 100x = 0 \rightarrow x(5x + 100) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{-100}{5} = -20 \end{cases}$

As solucións son 0 e -20 .

ACTIVIDADES

9 Clasifica e resolve estas ecuacións de segundo grado.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$

f) $3x^2 - 18x = 0$

b) $3x^2 + 20x + 12 = 0$

g) $4x^2 - 36 = 0$

c) $3x^2 + 9x - 4 = 0$

h) $-8x^2 + 40 = 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

i) $-5x^2 + 30x = 0$

e) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$

l) $3x^2 = 2x^2$

10 Resolve estas ecuacións.

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0$

b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$

c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$

e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0$

5.2. Número de solucións

O **discriminante** dunha ecuación de segundo grao é: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dependendo do signo do discriminante, a ecuación pode ter dúas, unha ou ningunha solución.

Discriminante	N.º de solucións
$\Delta > 0$	2
$\Delta = 0$	1
$\Delta < 0$	Ningunha

Exemplo

5 Determina o número de solucións destas ecuacións de segundo grao.

a) $2x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{a=2, b=-4, c=1} \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 > 0$
Dúas solucións

b) $2x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{a=2, b=-4, c=2} \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$
Unha solución

c) $2x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{a=2, b=-4, c=3} \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$
Ningunha solución

5.3. Ecuacións bicadradas

Unha **ecuación bicadrada** é unha ecuación que se pode expresar da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Para resolver ecuacións deste tipo substituímos x^2 por outra variable, $z = x^2$, e resolvemos a ecuación como unha ecuación de segundo grao.

Faino así

COMO RESOLVEMOS ECUACIÓNS BICADRADAS

Resolve a ecuación $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.

PRIMEIRO. Facemos o cambio $z = x^2$. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 2z - 3 = 0$

SEGUNDO. Resolvemos a ecuación de segundo grao que resulta para a incógnita z .

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ z_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

TERCEIRO. Calculamos as solucións para a variable x .

$$\begin{aligned} z_1 = 1 &\rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \\ z_2 = -3 &\rightarrow x^2 = -3 \rightarrow \text{Non ten solución} \end{aligned}$$

Decátate



Hai ecuacións que sen ser bicadradas se poden resolver como unha ecuación bicadrada.

$$x^8 + 2x^4 - 3 = 0$$

Facemos $x^4 = z^2$.

$$x^4 = z^2 \rightarrow z^2 + 2z - 3 = 0$$

ACTIVIDADES

11 Determina, sen resolver a ecuación, o número de solucións que ten.

a) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$

d) $2x^2 - x - 3 = 0$

b) $9x^2 + 30x + 25 = 0$

e) $-x^2 + 9x - 2 = 0$

c) $-5x^2 + 9x - 6 = 0$

f) $0,34x^2 + 0,5x - 1 = 0$

12 Cantas solucións poden ter estas ecuacións bicadradas? Resólveas.

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

b) $x^2(x^2 - 1) = 16(x^2 - 1)$

c) $25x^2(x^2 - 1) + 11(x^4 + 1) - 7 = 0$

6 Outros tipos de ecuacións

6.1. Ecuacións con fraccións alxébricas

Para resolver ecuacións que conteñen fraccións alxébricas eliminamos os denominadores multiplicando polo seu m.c.m. e, despois, resolvemos a ecuación resultante.

Exemplo

6 Resolve esta ecuación: $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{1}{x}$

$$\text{m.c.m.}(x-1, x) = x(x-1)$$

Multiplicamos cada termo da ecuación polo m.c.m.

$$x(x-1)\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right) = x(x-1) \cdot \frac{1}{x} \rightarrow x(x+1) - x(x-1) = x-1$$

$$x^2 + x - x^2 + x = x - 1 \rightarrow 2x = x - 1 \rightarrow x = -1$$

Comprobamos a solución.

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{1}{x} \xrightarrow{x=-1} \frac{-1+1}{-1-1} - 1 = \frac{1}{-1} \rightarrow -1 = -1$$

Non esquezas



Nas ecuacións con radicais, ao elevar ao cadrado poden introducirse solucións que non pertencen á ecuación. Por iso é necesario comprobar as solucións obtidas.

6.2. Ecuacións con radicais

As ecuacións con radicais son aquelas nas que aparece a variable x baixo o signo da raíz. Para resolvelas, illanse as raíces, unha a unha, nun dos membros e elévase a ecuación ao cadrado.

Exemplo

7 Resolve a ecuación $x + 3\sqrt{x+1} = 17$.

Illamos no primeiro membro o termo con radical.

$$3\sqrt{x+1} = 17 - x$$

Elevamos ao cadrado cada membro da igualdade e simplificamos.

$$\begin{aligned} (3\sqrt{x+1})^2 &= (17-x)^2 \rightarrow 9x+9 = 289-34x+x^2 \\ &\rightarrow x^2 - 43x + 280 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 35 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos a solución.

$$x + 3\sqrt{x+1} = 17 \xrightarrow{x=8} 8 + 3\sqrt{8+1} = 17 \rightarrow 17 = 17$$

$$x + 3\sqrt{x+1} = 17 \xrightarrow{x=35} 35 + 3\sqrt{35+1} = 53 \rightarrow 53 \neq 17$$

Só é válida a solución $x = 8$.

ACTIVIDADES

13 Calcula a solución das seguintes ecuacións con fraccións alxébricas.

a) $x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+7}{x+1}$

b) $\frac{4}{x^4} + \frac{3-x^2}{x^2} = 0$

14 Resolve estas ecuacións con radicais.

a) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} = 6$

b) $x^2 - \sqrt{3x^2-2} = 4$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = \sqrt{8x+4}$

d) $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{4x-3} + 5 = 0$

7 Factorización de ecuaciones

Unha ecuación factorizada é da forma:

$$(x - a) \cdot (x - b) \cdot \dots = 0$$

Para calcular a súa solución hai que igualar a cero cada un dos factores e resolver as ecuacións resultantes.

Unha maneira de resolver ecuacións de grao maior ca 2 é factorizalas mediante o método de Ruffini e extraer factor común.

Exemplos

8 Resolve a ecuación $-x(x-1)(x^2-2) = 0$.

Como a ecuación está factorizada, igualamos cada factor a cero.

$$-x = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$$

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

As solucións da ecuación son:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \sqrt{2} \text{ e } x_4 = -\sqrt{2}$$

9 Resolve a ecuación $2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 36x = 0$.

Sacamos factor común $2x$.

$$2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 36x = 0 \rightarrow 2x(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) = 0$$

Aplicamos a regra de Ruffini ao polinomio que está dentro da paréntese para encontrar as súas raíces.

	1	2	-9	-18
-2		-2	0	18
	1	0	-9	0

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 2)(x^2 - 9) = (x + 2)(x + 3)(x - 3)$$

A ecuación factorizada é:

$$2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 36x = 0 \rightarrow 2x(x + 2)(x + 3)(x - 3) = 0$$

Igualamos cada un dos factores a cero.

$$2x = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

As solucións desta ecuación son:

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = -3 \text{ e } x_4 = 3$$

ACTIVIDADES

15 Estas ecuacións aparecen factorizadas. Encontra a súa solución.

a) $3(x-1)(x+2)(x-4) = 0$

b) $x(x-2)(x+3)(x-12) = 0$

c) $(2x-1)(4x+3)(x-2) = 0$

d) $2x^2(x-3)^2(3x+4) = 0$

e) $5x(x-1)^2(2x+7)^3 = 0$

16 Factoriza as ecuacións e resólveas.

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

b) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

c) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 16 = 0$

17 Escribe unha ecuación que teña como solucións:

$$x = 3, x = 2 \text{ e } x = -7$$

Cal é o mínimo grao que pode ter?

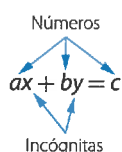
8 Sistemas de ecuacións lineares

Unha **ecuación linear** é unha ecuación de grao 1 que pode ter unha ou varias incógnitas.

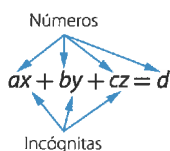
Un **sistema de ecuacións lineares** é un conxunto de dúas ou máis ecuacións lineares con varias incógnitas para o que se quere encontrar unha solución común.

Lembra

Ecuación linear de dúas incógnitas



Ecuación linear de tres incógnitas



Exemplo

10 Resolve este sistema de ecuacións lineares:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

Método de substitución

Despexamos unha incógnita nunha das ecuacións.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2y$$

Substituímos o valor da incógnita despexada na outra ecuación.

$$2x - 3y = 1 \xrightarrow{x=2y} 2(2y) - 3y = 1 \quad y = 1$$

Calculamos o valor da outra incógnita.

$$x = 2y \xrightarrow{y=1} x = 2 \cdot 1 = 2$$

Método de igualación

Despexamos a mesma incógnita nas dúas ecuacións.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3y}{2} \\ x = 2y \end{cases}$$

Igualamos as expresións, e resolvemos a ecuación resultante.

$$\frac{1+3y}{2} = 2y \rightarrow 1+3y = 4y \rightarrow y = 1$$

Calculamos a outra incógnita.

$$x = 2y \xrightarrow{y=1} x = 2 \cdot 1 = 2$$

Método de redución

Igualamos os coeficientes dunha das incógnitas.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 1$$

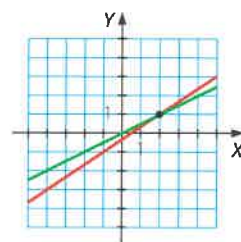
Sumamos ou restamos as dúas ecuacións, e resolvemos a ecuación que resulta.

Calculamos a outra incógnita.

$$2x - 3y = 1 \xrightarrow{y=1} 2x - 3 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 2$$

Método gráfico

Representamos as rectas que corresponden a cada ecuación. Determinamos se teñen puntos comúns.



ACTIVIDADES

18 Resolve estes sistemas de ecuacións.

a) $\begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{cases}$

Escolle o método que consideres máis adecuado.

19 Calculamos as solucións destes sistemas.

a) $\begin{cases} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) = 15 \\ -x + y + 3(x - 2y + 6) = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-5}{3} + \frac{2y-1}{5} = 2 \\ 3(2-x) + 4(y+1) = 36 \end{cases}$

Clasificación de sistemas

Os sistemas de ecuacións lineares, atendendo ao seu número de solucións, clasifícanse en:

- **Compatible**, cando o sistema ten algunha solución.
 - Se a solución é única, o sistema é **determinado**.
 - Se hai máis dunha solución, o sistema é **indeterminado**.
- **Incompatible**, cando o sistema non ten solución.

Exemplo

11 Clasifica os seguintes sistemas de ecuacións lineares.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

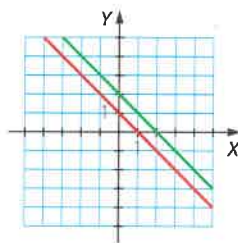
c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

a) Ambas as ecuacións proporcionan unha información contraditoria.

Se $x + y$ é igual a 1, segundo a primeira ecuación, non pode ser igual a 2, tal e como se expresa na segunda ecuación.

Debuxamos as rectas que representan cada ecuación, e obtemos dúas rectas paralelas.

O sistema non ten solución, é incompatible.

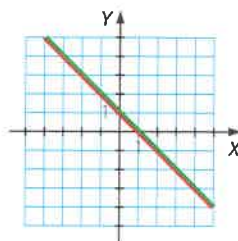


b) Ambas as ecuacións proporcionan a mesma información.

A segunda ecuación é igual á primeira ecuación multiplicada por 2.

Debuxamos as rectas que representan cada ecuación, e obtemos dúas rectas coincidentes.

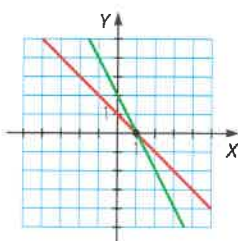
O sistema ten infinitas solucións, é compatible indeterminado.



c) Ambas as ecuacións achegan distinta información.

Debuxamos as rectas que representan cada ecuación, e obtemos dúas rectas que se cortan nun punto, que é a solución do sistema.

O sistema ten unha única solución, é compatible determinado.



ACTIVIDADES

20 Clasifica estes sistemas de ecuacións, e resólveos polo método máis adecuado.

a) $\begin{cases} 8x - 2y = 4 \\ -12x + 3y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} p + 2q = 1 \\ 3p - q = 11 \end{cases}$

21 Decide de que tipo son estes sistemas de ecuacións, e representa graficamente a súa solución.

a) $\begin{cases} -12x + 9y = -2 \\ 8x - 6y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 21a - 14b = 35 \\ -12a + 8b = -20 \end{cases}$

9 Sistemas de ecuacións non lineares

Un **sistema de ecuacións non lineares** é un conxunto de dúas ou máis ecuacións onde algunha delas non é linear, como poden ser as ecuacións de grao maior ca 1, ecuacións con fraccións alxébricas ou con radicais.

Exemplos

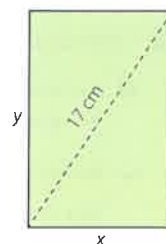
- 12** A diagonal dun rectángulo mide 17 cm e o seu perímetro 46 cm. Calcula a lonxitude dos seus lados.

x : Longo do rectángulo y : Altura do rectángulo

$$\begin{aligned} \text{Polo teorema de Pitágoras} &\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 17 \\ \text{Pola definición de perímetro} &\rightarrow 2x + 2y = 46 \end{aligned}$$

Simplificamos o sistema.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} = 17 &\xrightarrow{\text{Elevamos ao cadrado}} x^2 + y^2 = 17^2 \\ 2x + 2y = 46 &\xrightarrow{\text{Dividimos entre 2}} x + y = 23 \end{aligned}$$



Despexamos y na segunda ecuación.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 17^2 \\ x + y &= 23 \end{aligned} \rightarrow y = 23 - x$$

$$x^2 + (23 - x)^2 = 289 \xrightarrow{y=23-x} 2x^2 - 46x + 240 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 15 \end{cases}$$

$$y = 23 - x \xrightarrow{x=8} y = 15 \qquad y = 23 - x \xrightarrow{x=15} y = 8$$

Con ambas as solucións obtemos o mesmo rectángulo.

- 13** A suma dun número máis cinco veces o inverso doutro é 2, e o segundo número máis o cuádruplo do primeiro é 9. Determina os números.

x : Primeiro número y : Segundo número

$$\begin{aligned} x + 5\left(\frac{1}{y}\right) &= 2 \\ y + 4x &= 9 \end{aligned} \rightarrow y = 9 - 4x$$

$$x + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 2 \xrightarrow{y=9-4x} x + \frac{5}{9-4x} = 2$$

Quitamos denominadores.

$$x(9 - 4x) + 5 = 2(9 - 4x) \rightarrow 4x^2 - 17x + 13 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$y = 9 - 4x \xrightarrow{x=1} y = 5 \qquad y = 9 - 4x \xrightarrow{x=\frac{13}{4}} y = -4$$

Os números 1 e 5, e os números $\frac{13}{4}$ e -4 , cumpren as condicións.

ACTIVIDADES

- 22** Resolve os sistemas.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 202 \\ x + y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + xy = 24 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$

- 23** Calcula dous números, sabendo que a súa suma é 42 e a suma dos seus inversos é $\frac{7}{72}$.

10 Inecuacións

Unha **inecuación** é unha desigualdade que se compón de dúas expresións alxébricas separadas por un dos signos: $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$.

A súa solución está formada por todos os valores que fan que a desigualdade numérica sexa certa.

Exemplo

14 Determina se $x = -1$ e $x = 6$ son solucións destas inecuacións.

a) $x + 2 < 5$ $\xrightarrow{x=-1} -1 + 2 < 5 \rightarrow x = -1$ é solución da inecuación
 $\xrightarrow{x=6} 6 + 2 \not< 5 \rightarrow x = 6$ non é solución da inecuación

b) $x - 3 \geq 2$ $\xrightarrow{x=-1} -1 - 3 \not\geq 2 \rightarrow x = -1$ non é solución da inecuación
 $\xrightarrow{x=6} 6 - 3 \geq 2 \rightarrow x = 6$ é solución da inecuación

10.1. Inecuacións de primeiro grao cunha incógnita

Unha inecuación de primeiro grao cunha incógnita resólvese como se fose unha ecuación, e determínase o intervalo solución mediante tenteo.

Faino así

COMO RESOLVEMOS UNHA INECUACIÓN DE PRIMEIRO GRAO CUNHA INCÓGNITA

Resolve esta inecuación cunha incógnita: $2x - 30 \leq 5x + 3$

PRIMEIRO. Tomamos a inecuación como unha ecuación, substituíndo a desigualdade por unha igualdade, e resolvémola.

$$2x - 30 = 5x + 3 \rightarrow 3x + 33 = 0 \rightarrow x = -\frac{33}{3} = -11$$

SEGUNDO. A solución divide a recta real en dous intervalos. Tomamos un punto calquera de cada intervalo.

Tomamos $x = -12$ de $(-\infty, -11)$ e $x = 0$ de $(-11, +\infty)$.

TERCEIRO. Comprobamos se estes puntos son solucións da inecuación. Se un punto verifica a desigualdade, entón todo o intervalo é solución.

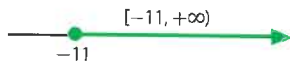
$$\text{Se } x = -12 \rightarrow 0 \leq 3 \cdot (-12) + 33 \rightarrow 0 \not\leq -3 \rightarrow (-\infty, -11) \text{ non é solución}$$

$$\text{Se } x = 0 \rightarrow 0 \leq 3 \cdot 0 + 33 \rightarrow 0 \leq 33 \rightarrow (-11, +\infty) \text{ é solución}$$

CUARTO. Comprobamos se o extremo común dos intervalos é solución da inecuación.

$$\text{Se } x = -11 \rightarrow 0 \leq 3 \cdot (-11) + 33 \rightarrow 0 \leq 0 \rightarrow x = -11 \text{ é solución.}$$

A solución da inecuación é $[-11, +\infty)$.



Decátate



Se na inecuación a desigualdade é $\leq$ ou $\geq$, o extremo común dos intervalos sempre pertence á solución.

ACTIVIDADES

24 Resolve a seguinte inecuación.

$$\frac{1}{2}x - 4 \leq 3x + 1$$

Razoa os pasos realizados para resolvela.

25 Encontra o erro cometido na resolución desta inecuación.

$$2x \leq 8x - 12$$

$$-6x \leq -12 \rightarrow 6x \leq 12 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow (-\infty, 2)$$

10.2. Inecuacións de segundo grao cunha incógnita

Unha inecuación de segundo grao cunha incógnita resólvese como se fose unha ecuación e determináanse os intervalos solución mediante tenteo.

Faino así

COMO RESOLVEMOS UNHA INECUACIÓN DE SEGUNDO GRAO CUNHA INCÓGNITA

Resolve esta inecuación de segundo grao.

$$x^2 - x + 4 \geq 5x - 4$$

PRIMEIRO. Aplicamos as propiedades das inecuacións ata obter unha expresión alxébrica nun membro, e cero no outro.

$$x^2 - x + 4 \geq 5x - 4 \rightarrow x^2 - x + 4 - 5x + 4 \geq 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

SEGUNDO. Transformamos a inecuación resultante nunha ecuación. Para iso, substituímos a desigualdade por unha igualdade e resolvémola como unha ecuación de segundo grao.

Resolvemos a ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

TERCEIRO. As solucións dividen a recta real en intervalos. Tomamos un punto de cada intervalo.



O punto $x = 0$ pertence ao intervalo $(-\infty, 2)$.

O punto $x = 3$ pertence ao intervalo $(2, 4)$.

O punto $x = 5$ pertence ao intervalo $(4, +\infty)$.

CUARTO. Comprobamos se estes puntos son solucións da inecuación. Se un punto verifica a desigualdade, entón todo o intervalo é solución.

Se $x = 0$ cúmprese que: $0^2 - 6 \cdot 0 + 8 \geq 0 \rightarrow 8 \geq 0 \rightarrow (-\infty, 2)$ é solución

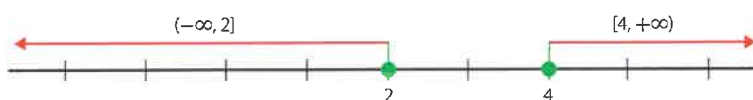
Se $x = 3$ cúmprese que: $3^2 - 6 \cdot 3 + 8 \geq 0 \rightarrow -1 \not\geq 0 \rightarrow (2, 4)$ non é solución

Se $x = 5$ cúmprese que: $5^2 - 6 \cdot 5 + 8 \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0 \rightarrow (4, +\infty)$ é solución

QUINTO. Comprobamos se as solucións da ecuación, $x = 2$ e $x = 4$, son solucións da inecuación.

Se $x = 2 \rightarrow 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0 \rightarrow 2$ é solución

Se $x = 4 \rightarrow 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0 \rightarrow 4$ é solución



Por tanto, a solución da inecuación é a unión de dous intervalos: $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

ACTIVIDADES

26 Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao cunha incógnita.

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ | f) $(x - 3)(x + 4) \geq 0$ |
| b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ | g) $(x + 3)x < 4$ |
| c) $x^2 - 9x > 0$ | h) $x^2 - 30 > x$ |
| d) $x^2 - 9 < 0$ | i) $x^2 + x + 3 < 0$ |
| e) $x^2 + 2 \leq 0$ | j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ |

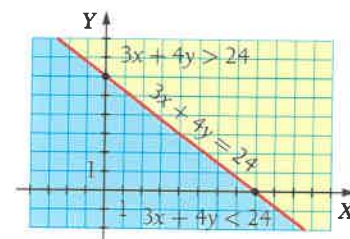
27 Resolve estas inecuacións de grao superior, seguindo o método utilizado para as inecuacións de segundo grao.

- a) $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 2) \geq 0$
 b) $x(x - 4)(x + 1)(x^3 - 1) \leq 0$
 c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$
 d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

10.3. Inecuacións con dúas incógnitas

Para resolver inecuacións con dúas incógnitas, primeiro consideramos a inecuación como unha ecuación e representamos no plano a recta que expresa. Como esta recta divide o plano en dúas partes, tomamos un punto de cada unha e determinamos a rexión do plano que é a solución da inecuación.

As solucións destas inecuacións exprésanse en forma de rexións do plano que están delimitadas por unha recta.



Faino así

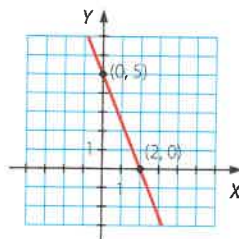
COMO RESOLVEMOS UNHA INECUACIÓN LINEAR CON DÚAS INCÓGNITAS

Resolve esta inecuación con dúas incógnitas: $5x + 2y > 10$

PRIMEIRO. Consideramos a desigualdade como unha igualdade, e dando valores a x e y , representamos a recta que expresa.

$$5x + 2y = 10 \xrightarrow{x=0} y = 5 \rightarrow \text{Punto } (0, 5)$$

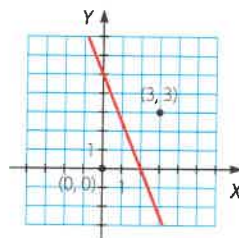
$$5x + 2y = 10 \xrightarrow{y=0} x = 2 \rightarrow \text{Punto } (2, 0)$$



SEGUNDO. A recta divide o plano en dúas rexións. Tomamos dous puntos, un de cada rexión do plano.

O punto $(0, 0)$ pertence á parte inferior do plano.

O punto $(3, 3)$ pertence á parte superior do plano.



TERCEIRO. Comprobamos se eses puntos son solucións da inecuación. Se un punto verifica a desigualdade, entón toda a rexión é solución.

$$\text{Se } x = 0, y = 0 \rightarrow 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 > 10 \rightarrow 0 > 10$$

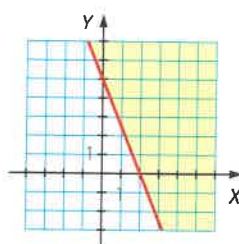
$(0, 0)$ non é solución.

$$\text{Se } x = 3, y = 3 \rightarrow 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 > 10 \rightarrow 21 > 10$$

$(3, 3)$ é solución.

A solución da inecuación é a parte do plano que ocupan todos os puntos situados na mesma rexión que $(3, 3)$.

Como a desigualdade non contén signo $=$, a recta non forma parte da solución.



Decátate



Se na inecuación a desigualdade é $\leq$ ou $\geq$, a recta forma parte da rexión solución.

ACTIVIDADES

28 Representa no plano a rexión solución destas inecuacións.

- $x + y < 0$
- $x - y \leq 0$
- $2x - y > 1$
- $y - 2 \geq 0$

29 Debuxa as seguintes rexións do plano.

- Os puntos do plano con abscisa positiva.
- Os puntos do plano con ordenada maior ou igual ca cero.

Encontra unha inecuación que teña cada unha desas rexións como conxunto solución.

11 Sistemas de inecuacións

Un **sistema de inecuacións** é un conxunto de inecuacións do que se que-
re calcular a solución común.

Para calcular a solución dun sistema de inecuacións resólvese por separado ca-
da unha das inecuacións e logo elíxense as solucións comúns.

Faino así

COMO RESOLVEMOS OS SISTEMAS DE INECUACIÓNS CUNHA INCÓGNITA

Calcula a solución destes sistemas de inecuacións.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2 > 1 \\ 3x - 2 < 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + x \leq 2 \\ 2x^2 + 3x \leq 2 \end{cases}$$

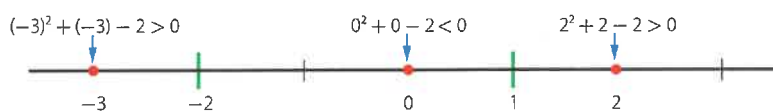
PRIMEIRO. Resolvemos cada unha das inecuacións por separado.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2 > 1 \rightarrow x > -1 \rightarrow \text{Solución: } (-1, +\infty) \\ 3x - 2 < 1 \rightarrow 3x < 3 \rightarrow x < 1 \rightarrow \text{Solución: } (-\infty, 1) \end{cases}$$

$$\text{b) } x^2 + x \leq 2 \rightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$$

Resolvemos a ecuación correspondente.

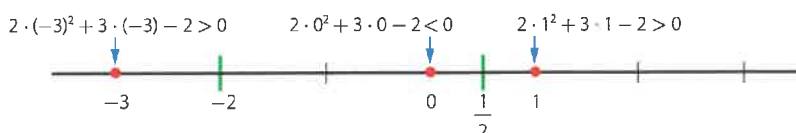
$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } [-2, 1]$$



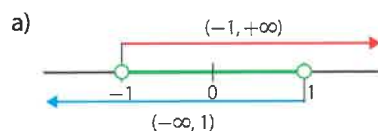
$$2x^2 + 3x \leq 2 \rightarrow 2x^2 + 3x - 2 \leq 0$$

Resolvemos a ecuación correspondente.

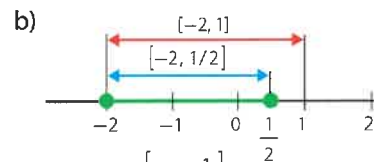
$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$



SEGUNDO. Eliximos o intervalo que cumpre as dúas inecuacións.



Solución: $(-1, 1)$



Solución: $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$

ACTIVIDADES

30 Calcula as solucións destes sistemas de inecuacións.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3 > 5 \\ 2x - 1 > 11 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 15 + 7x \geq 8 \\ 3x < 14x + 6 \end{cases}$$

31 Resolve os seguintes sistemas de inecuacións cunha incógnita.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 3x < 6 \\ 6x^2 + 4x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + x^2 < 3x^2 + 4 \\ 7x^2 + x \geq 2x - 6 \end{cases}$$

Faino así

COMO RESOLVEMOS OS SISTEMAS DE INECUACIÓNS CON DÚAS INCÓGNITAS

Calcula a solución deste sistema de inecuacións lineares con dúas incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

PRIMEIRO. Resolvemos cada unha das inecuacións por separado, e representamos a parte do plano que é solución de cada unha das inecuacións.

Para a inecuación $2x + y \leq 10$ temos que:

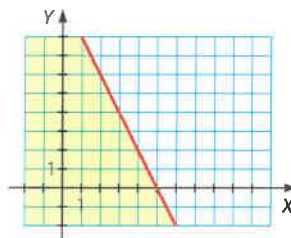
$$2x + y = 10 \xrightarrow{x=0} y = 10 \rightarrow \text{Punto } (0, 10)$$

$$2x + y = 10 \xrightarrow{y=0} x = 5 \rightarrow \text{Punto } (5, 0)$$

Para o punto $(0, 0)$ cúmprese que:

$$2x + y \leq 10 \xrightarrow{x=0, y=0} 2 \cdot 0 + 0 \leq 10$$

$(0, 0)$ é solución.



Para a inecuación $2x + 3y \leq 18$ temos que:

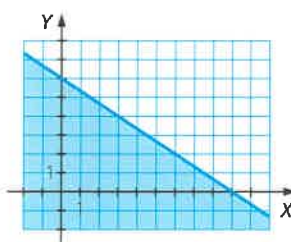
$$2x + 3y = 18 \xrightarrow{x=0} y = 6 \rightarrow \text{Punto } (0, 6)$$

$$2x + 3y = 18 \xrightarrow{y=0} x = 9 \rightarrow \text{Punto } (9, 0)$$

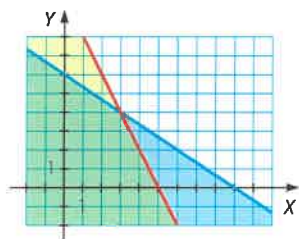
Para o punto $(0, 0)$ cúmprese que:

$$2x + 3y \leq 18 \xrightarrow{x=0, y=0} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 18$$

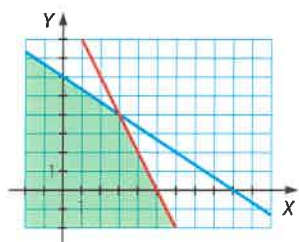
$(0, 0)$ é solución.



SEGUNDO. Representamos, nos mesmos eixes, a parte do plano que é solución de cada inecuación.



TERCEIRO. Eliximos a rexión do plano que cumpre ambas as inecuacións.



A solución do sistema é a parte do plano que está coloreada.

ACTIVIDADES

32 Calcula as solucións destes sistemas de inecuacións.

a) $\begin{cases} x + 2y < 4 \\ -2x + y \geq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 12x - 3y \geq 7 \\ -x + 2y \leq 12 \end{cases}$

33 Resolve os seguintes sistemas de inecuacións con dúas incógnitas.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + 2y < 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y \geq 0 \\ x < 2 \end{cases}$

Binomio de Newton

1. COMO SE CALCULA A POTENCIA DUN BINOMIO DO TIPO $(P(x) + Q(x))^n$

- 15 Determina o desenvolvemento deste binomio utilizando a fórmula do binomio de Newton.

$$\left(-\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}x\right)^3$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Identifícase cada un dos elementos da fórmula.

$$(a+b)^n \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{x^2} \\ b = -\frac{1}{2}x \\ n = 3 \end{cases}$$

SEGUNDO. Aplícase a fórmula do binomio de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{(n-i)} \cdot b^i$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}x\right)^3 &= \binom{3}{0} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^3 + \binom{3}{1} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) + \\ &+ \binom{3}{2} \left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + \binom{3}{3} \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 \end{aligned}$$

TERCEIRO. Cálculanse os números combinatorios e opérase.

$$\binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2!}{1 \cdot 2!} = 3$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}x\right)^3 &= -\frac{8}{x^6} + 3 \cdot \frac{4}{x^4} \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) + \\ &+ 3 \left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{4}x^2 + \left(-\frac{1}{8}x^3\right) = \\ &= -\frac{8}{x^6} - \frac{12x}{2x^4} - \frac{6x^2}{4x^2} - \frac{x^3}{8} \end{aligned}$$

CUARTO. Simplifícase o resultado.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}x\right)^3 &= -\frac{8}{x^6} - \frac{12x}{2x^4} - \frac{6x^2}{4x^2} - \frac{x^3}{8} = \\ &= -\frac{8}{x^6} - \frac{6}{x^3} - \frac{3}{2} - \frac{x^3}{8} \end{aligned}$$

Ecuacións de segundo grao

1. COMO SE DETERMINA UN COEFICIENTE PARA QUE UNHA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRAO TEÑA UN NÚMERO DETERMINADO DE SOLUCIÓNS

- 15 Determina o valor de k para que a ecuación $3x^2 - 6x + k = 0$ non teña solución.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Establécese a condición que debe cumprir o discriminante para que a ecuación teña o número de solucións que se pide.

Para que a ecuación non teña solución debe ser:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \xrightarrow{a=3, b=-6, c=k} (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k < 0$$

$$36 - 12k < 0$$

SEGUNDO. Resólvese a inecuación resultante.

$$36 - 12k < 0 \rightarrow 36 < 12k \rightarrow \frac{36}{12} < k \rightarrow k > 3$$



O coeficiente k pode tomar calquera valor do intervalo $(3, +\infty)$.

Ecuacións bicuadradas

1. COMO SE RESOLVEN ECUACIÓN DO TIPO $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

- 17 Resolve a ecuación $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Tómasse a variable x de maior grao, x^{2n} , e faise o cambio $z = x^n$.

$$x^{2n} = x^6 \xrightarrow{2n=6} n=3$$

Realízase o cambio $z = x^3$.

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \xrightarrow{z=x^3} z^2 - 9z + 8 = 0$$

SEGUNDO. Resólvese a ecuación de segundo grao resultante.

$$\begin{aligned} z^2 - 9z + 8 &= 0 \\ z &= \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \\ z_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

TERCEIRO. Cálculanse as solucións para a variable x .

$$z_1 = 8 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$z_2 = 1 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt[3]{1} = 1$$

As solucións da ecuación son $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

Ecuacións con fraccións alxébricas

1. COMO SE RESOLVEN ECUACIÓN

DO TIPO $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$

- 18** Resolve a seguinte ecuación con fraccións alxébricas.

$$\frac{2x^3 - x^2 - 2x + 25}{x^2 - 1} = 2x$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Multiplícase a ecuación polo polinomio que está no denominador.

$$\frac{2x^3 - x^2 - 2x + 25}{x^2 - 1} = 2x$$

$$2x^3 - x^2 - 2x + 25 = 2x(x^2 - 1)$$

$$2x^3 - x^2 - 2x + 25 = 2x^3 - 2x$$

$$-x^2 + 25 = 0$$

SEGUNDO. Resólvese a ecuación resultante.

$$-x^2 + 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

A ecuación ten dúas solucións: $x_1 = 5$ e $x_2 = -5$.

2. COMO SE RESOLVEN ECUACIÓN

DO TIPO $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$

- 19** Resolve a seguinte ecuación.

$$\frac{x^2 - x}{3x + 1} = \frac{-x}{2x - 1}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Elimínanse os denominadores multiplicando o numerador dunha fracción polo denominador da outra, e viceversa.

$$\frac{x^2 - x}{3x + 1} = \frac{-x}{2x - 1}$$

$$(x^2 - x)(2x - 1) = (3x + 1)(-x)$$

$$2x^3 - 2x^2 - x^2 + x = -3x^2 - x$$

$$2x^3 + 2x = 0$$

SEGUNDO. Resólvese a ecuación resultante.

$$2x^3 + 2x = 0$$

Factor común $2x$

$$2x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{Non ten solución} \end{cases}$$

A solución da ecuación é $x = 0$.

Ecuacións con radicais

1. COMO SE RESOLVEN ECUACIÓN DO TIPO $\sqrt{P(x)} = a$

- 20** Calcula as solucións desta ecuación con radicais.

$$\sqrt{x^2 - 3} = 1$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Elévanse ambos os membros ao cadrado e simplifícase, se é posible.

$$\sqrt{x^2 - 3} = 1 \rightarrow (\sqrt{x^2 - 3})^2 = 1^2$$

$$x^2 - 3 = 1 \rightarrow x^2 = 4$$

SEGUNDO. Resólvese a ecuación resultante.

$$x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

TERCEIRO. Compróbase a solución, xa que ao elevar ao cadrado poden aparecer solucións que non verifican a ecuación orixinal.

$$\sqrt{x^2 - 3} = 1 \xrightarrow{x=2} \sqrt{2^2 - 3} = 1 \rightarrow 1 = 1$$

$$\sqrt{x^2 - 3} = 1 \xrightarrow{x=-2} \sqrt{(-2)^2 - 3} = 1 \rightarrow 1 = 1$$

Por tanto, $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$ son as solucións desta ecuación.

2. COMO SE RESOLVEN ECUACIÓN

DO TIPO $\sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)}$

- 21** Resolve esta ecuación con radicais.

$$\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2x}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Elévanse ambos os membros ao cadrado e simplifícase, se é posible.

$$\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2x} \rightarrow (\sqrt{x^2 + 3x})^2 = (\sqrt{2x})^2$$

$$x^2 + 3x = 2x \rightarrow x^2 + x = 0$$

SEGUNDO. Resólvese a ecuación resultante.

$$x^2 + x = 0$$

Factor común x

$$x(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

TERCEIRO. Compróbase a solución.

$$\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2x} \xrightarrow{x=0} \sqrt{0} = \sqrt{0} \rightarrow 0 = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2x} \xrightarrow{x=-1} \sqrt{-2} = \sqrt{-2}$$

Por tanto, $x = -1$ non é solución porque non existe a raíz dun número negativo.

A solución desta ecuación é $x = 0$.

3. COMO SE RESOLVEN ECUACIONES

DO TIPO $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} = R(x)$

22 Resolve esta ecuación con radicales.

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{x} = 2$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Déixase un radical en cada membro.

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{x} = 2 \rightarrow \sqrt{2x+8} = 2 + \sqrt{x}$$

SEGUNDO. Elévanse ambos os membros ao cadrado.

$$(\sqrt{2x+8})^2 = (2 + \sqrt{x})^2 \rightarrow 2x + 8 = 4 + 4\sqrt{x} + x$$

TERCEIRO. Íllase o radical nun membro e vólvese elevar ao cadrado.

$$2x + 8 = 4 + 4\sqrt{x} + x \rightarrow (x + 4)^2 = (4\sqrt{x})^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = 16x$$

CUARTO. Resólvese a ecuación resultante.

$$x^2 + 8x + 16 = 16x \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \rightarrow x = 4$$

QUINTO. Compróbase a solución.

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{x} = 2 \xrightarrow{x=4} \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2 \rightarrow 2 = 2$$

Por tanto, $x = 4$ é a solución desta ecuación.

Ecuacións de grao superior

1. COMO SE RESOLVE UNHA ECUACIÓN MEDIANTE FACTORIZACIÓN

23 Resolve a seguinte ecuación.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Exprésase a ecuación mediante un produto de factores utilizando a regra de Ruffini, o factor común e as igualdades notables.

Extráese como factor común x .

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Aplicase a regra de Ruffini ao polinomio que corresponde ao segundo factor da ecuación factorizada.

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & -3 & 2 \\ & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

SEGUNDO. Igualase a cero cada un dos factores da ecuación, e calcúlanse as súas solucións.

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2$$

As solucións da ecuación son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$.

Sistemas de ecuacións

1. COMO SE RESOLVE UN SISTEMA LINEAR DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS

24 Resolve este sistema de ecuacións con tres incógnitas.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3z = -8 \\ x - 5y + 2z = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Despéxase unha das incógnitas en calquera ecuación e substitúese o seu valor nas outras dúas ecuacións.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3z = -8 \\ x - 5y + 2z = 3 \end{cases} \rightarrow x = 1 + 2y - z$$

Ao substituír este valor nas outras dúas ecuacións resulta:

$$\begin{cases} 2(1 + 2y - z) - 3z = -8 \rightarrow 4y - 5z = -10 \\ 1 + 2y - z - 5y + 2z = 3 \rightarrow -3y + z = 2 \end{cases}$$

SEGUNDO. Resólvese o sistema formado por estas dúas ecuacións.

$$\begin{cases} 4y - 5z = -10 \\ -3y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 5} \begin{cases} 4y - 5z = -10 \\ -15y + 5z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -11y = 0 \rightarrow y = 0 \end{array}$$

$$4y - 5z = -10$$

$$\downarrow y = 0$$

$$-5z = -10 \rightarrow z = 2$$

TERCEIRO. Substitúense estes valores en calquera das ecuacións do sistema inicial e calcúlase a variable que falta.

$$x - 2y + z = 1$$

$$\downarrow y = 0, z = 2$$

$$x + 2 = 1 \rightarrow x = -1$$

CUARTO. Compróbase a solución.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3z = -8 \\ x - 5y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\downarrow x = -1, y = 0, z = 2$$

$$\begin{cases} -1 - 2 \cdot 0 + 2 = 1 \\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -8 \\ -1 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 3 \end{cases}$$

$$\downarrow \text{Simplificamos}$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -8 = -8 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

A solución do sistema é $x = -1$, $y = 0$ e $z = 2$.

Inecuacións

1. COMO SE RESOLVE UNHA INECUACIÓN QUE CONTÉN FRACCIÓN ALXÉBRICA

25 Resolve esta inecuación: $\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} \geq x$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Opérase ata obter unha expresión alxébrica nun membro, e cero no outro.

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} - x \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} - \frac{x(x - 4)}{x - 4} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 + 4x}{x - 4} \geq 0 \rightarrow \frac{2x + 4}{x - 4} \geq 0$$

SEGUNDO. Resólvense as dúas ecuacións que se forman, igualando a cero o numerador e o denominador.

$$2x + 4 = 0$$

$$x = -2$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

TERCEIRO. As solucións obtidas dividen a recta real en intervalos. Tomamos un punto de cada intervalo.



O punto $x = -3$ pertence ao intervalo $(-\infty, -2)$.

O punto $x = 0$ pertence ao intervalo $(-2, 4)$.

O punto $x = 5$ pertence ao intervalo $(4, +\infty)$.

CUARTO. Compróbase se estes puntos son solucións da inecuación, porque se un punto do intervalo verifica a desigualdade, entón todo o intervalo é solución.

$$x = -3 \rightarrow \frac{(-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 4}{-3 - 4} \geq -3 \rightarrow \frac{19}{-7} \geq -3$$

$$x = 0 \rightarrow \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 4}{0 - 4} \geq 0 \rightarrow \frac{4}{-4} \geq 0$$

$$x = 5 \rightarrow \frac{5^2 - 2 \cdot 5 + 4}{5 - 4} \geq 5 \rightarrow \frac{19}{1} \geq 5$$

QUINTO. Compróbase se as solucións da ecuación, $x = 2$ e $x = 4$, son solucións da inecuación.

$$x = -2 \rightarrow \frac{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4}{-2 - 4} \geq -2 \rightarrow \frac{12}{-6} \geq -2$$

$x = 4 \rightarrow$ A fracción alxébrica non existe



Por tanto, a solución da inecuación é a unión de dous intervalos: $(-\infty, -2] \cup (4, +\infty)$

Sistemas de inecuacións

1. COMO SE RESOLVEN PROBLEMAS MEDIANTE UN SISTEMA DE INECUACIÓNS

- 26 Un fabricante quiere mesturar un produto A, que custa 40 €/kg, con outro produto B, que custa 20 €/kg. Para que a mestura pese máis de 50 kg e o custo sexa menor de 2.000 €, calcula as cantidades que pode comprar de cada produto.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Identifícanse as incógnitas.

$x \rightarrow$ quilogramos do produto A

$y \rightarrow$ quilogramos do produto B

SEGUNDO. Formúlase o sistema de inecuacións.

A mestura é maior de 50 kg.

$$x + y > 50$$

O custo é menor de 2.000 €.

$$\text{Custo do produto A} \rightarrow 40 \cdot x$$

$$\text{Custo do produto B} \rightarrow 20 \cdot y$$

$$40x + 20y < 2.000$$

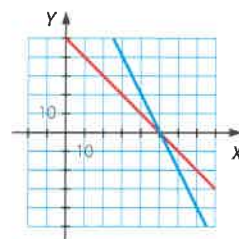
TERCEIRO. Resólvese o sistema.

$$\begin{cases} x + y > 50 \\ 40x + 20y < 2.000 \end{cases} \xrightarrow{:20} \begin{cases} x + y > 50 \\ 2x + y < 100 \end{cases}$$

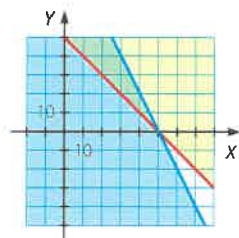
Represéntanse nuns mesmos eixes ambas as rectas, e calcúlase a parte do plano que é solución de cada inecuación.

A recta $x + y = 50$ pasa por $(0, 50)$ e $(50, 0)$.

A recta $2x + y = 100$ pasa por $(0, 100)$ e $(50, 0)$.



Tomando un punto de cada rexión nas que queda dividido o plano, obtense como solución a rexión sombreada en verde.



Números combinatorios e binomio de Newton

34 Calcula $3!$, $4!$, $5!$, $6!$ e $7!$, e comproba se son certas as seguintes expresións.

- a) $2! \cdot 3! = 6!$
- b) $3! + 4! = 7!$
- c) $6! - 2! = 4!$

35 Simplifica as expresións sen calcular previamente o valor dos factoriais.

- a) $\frac{6!}{4!}$
- b) $\frac{9!}{6!}$
- c) $\frac{(a+2)!}{a!}$
- d) $\frac{8!}{4!}$
- e) $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$
- f) $\frac{x!}{(x-3)!}$

36 Calcula as incógnitas e comproba estas igualdades.

- a) $\binom{8}{x} = \binom{8}{6}$
- b) $\binom{x}{3} = \binom{x}{7}$
- c) $\binom{x}{y} = \binom{x}{5}$

37 Completa os seguintes desenvolvementos.

- a) $(3x+2)^4 = 81x^4 + \square x^3 + \square + 96\square + 16$
- b) $(3-4y)^3 = 27 - \square y + 144\square + \square$
- c) $(2p-q^2)^4 = 16p^4 - 32p\square q\square + 24p\square q\square + \square + q\square$
- d) $(3mn-p^2)^3 = \square m^3 n\square - 27m\square n\square p\square + \square mnp^4 - p\square$

38 Sabendo que $5,1 = 5 + 0,1$ e que $0,99 = 1 - 0,01$; calcula o valor de $5,1^3$ e $0,99^2$ empregando a fórmula do binomio de Newton.

39 Determina os termos que se indican nestes desenvolvementos.

- a) Sétimo termo de $(x+2y)^{10}$.
- b) Décimo termo de $(x^2-3)^{15}$.
- c) Decimosexto termo de $(2p+q^2)^{28}$.
- d) Decimocuarto termo de $(-a+2)^{21}$.

40 Calcula as potencias que presenten un desenvolvemento que dea lugar a estas expresións.

- a) $4x^2 + 20x + 25$
- b) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
- c) $81p^4 + 216p^3 + 216p^2 + 96p + 16$

41 Encontra os termos indicados dos seguintes desenvolvementos.

- a) O termo central de $(3p^2-2q)^{12}$.
- b) O termo que contén x^{12} en $(2x^2+1)^9$.
- c) O termo que contén x^{11} en $\left(\frac{2}{x}-x^2\right)^{10}$.

42 O sétimo e o oitavo termos do desenvolvemento dunha potencia son $1.792x^2y^{12}$ e $1.024xy^{14}$, respectivamente. Intenta descubrir de que binomio calculamos unha potencia.

Factorización e fraccións alxébricas

43 Comproba se $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ é divisible por $x-2$ e, en caso afirmativo, encontra un polinomio $N(x)$ que permita escribir $M(x)$ da forma $M(x) = (x-2) \cdot N(x)$.

44 Determina as raíces dos seguintes polinomios.

- a) $(x-3)(x+5)(x-2)$
- b) $x(x-2)^2(2x+1)$
- c) $(2x-1)(3x+2)(x+3)^2$
- d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
- e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$
- f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$
- g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$
- h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

45 Dun polinomio de segundo grao, $P(x)$, sábese que $P(1) = -6$, $P(0) = -3$ e unha das súas raíces é 3. Determina. Obtén o valor de m para que o polinomio $mx^3 - 6x^2 - 4x + 8$ teña 2 por raíz.

46 Obtén o valor de n para que o polinomio $2x^3 + 2x^2 + nx + 3$ teña -3 por raíz.

47 Que valor debe tomar a para que o resto de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre $x-4$ sexa 67?

48 Determina a e b de maneira que o polinomio $x^3 + ax^2 + bx - 6$ sexa divisible por $x-2$ e por $x+3$.

49 Escribe un polinomio de terceiro grao cuxas raíces sexan as que se indican en cada caso.

- a) 2, 3 e 5
- b) $-2, -1$ e 4
- c) 2, 2 e -4

50 Encontra un polinomio $P(x)$ de segundo grao que presenten as raíces sexan 1 e -2 e tal que $P(3) = 30$.

51 Escribe un polinomio de terceiro grao que presenten as raíces sexan 3, -1 e -1 e tal que $Q(2) = -18$.

52 Opera e simplifica.

- a) $\frac{3}{a+2} - \frac{1}{2a+4} - \frac{2}{3a+6}$
- b) $\frac{3-2p}{p+2} + \frac{1+p}{p+3}$
- c) $\frac{3}{2a-6} + \frac{1}{3-a}$

53 Realiza as operacións e simplifica o resultado.

- a) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12}$
- b) $\frac{2-x}{x^2-3x} - \frac{1}{4x-12} + \frac{5}{6x-18}$
- c) $\frac{4}{a+b} - \frac{5}{a-b}$
- d) $\frac{4-x^2}{x+2} + \frac{9-x^2}{x+3}$

Ecuacións

- 54** Comproba se o número indicado en cada apartado
 ○○○ é solución da ecuación.

a) $2(x^2 - x - 2) + 6(3 - x) - 2(x - 3) - 8 = 0$
 $x = -2$

b) $2(-x - 2)(1 - x) - 2(x + 1) = 0$
 $x = \sqrt{3}$

c) $(2 + x)5x - (3x - 4) + 3(x - 1) - x^2 + 2(x + 4) = 0$
 $x = -\frac{3}{2}$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) + 11 = 0$
 $x = \frac{1}{2}$

- 55** Resolve as seguintes ecuacións de segundo grao
 ○○○ con denominadores.

a) $\frac{2 - x^2}{3} + \frac{3 - x}{4} + \frac{23}{12} = 0$

b) $\frac{2 - x}{2} + \frac{3x^2 - 2x}{3} + \frac{19x}{6} = 0$

c) $\frac{x - 2x^2}{2} = 1 - \frac{3x + x^2}{4}$

d) $\frac{x^2 + x}{5} + \frac{(x + 2)x}{2} = 0$

- 56** Busca as solucións das seguintes ecuacións
 ○○○ con fraccións alxébricas e comproba, polo menos, unha das solucións.

a) $\frac{1 - x^2}{x} + \frac{3x + 1}{4} + \frac{1}{6} = 0$

b) $\frac{x^2 + 4}{x} + \frac{1 - 4x}{3} + \frac{8}{15} = 0$

c) $\frac{2 - x}{2x} = \frac{5}{6} - \frac{3x^2 - 2x}{3x}$

- 57** Resolve as ecuacións de segundo grao sen utilizar
 ○○○ a fórmula correspondente.

a) $x(x + 3) - 2(x^2 - 4) - 8 = 0$

b) $(2x + 3)^2 - 8(2x + 1) = 0$

- 58** A suma das solucións dunha ecuación de segundo grao é
 ○○○ 4 e o seu produto é -21.

a) Escribe a ecuación correspondente.

b) Determina esas solucións.

- 59** Calcula k en cada caso.

○○○ a) $x^2 + kx + 25 = 0$ ten unha solución.

b) $x^2 - 4x + k = 0$ non ten solucións.

c) $kx^2 + 8x + 5 = 0$ ten dúas solucións.

- 60** Resolve a ecuación de segundo grao utilizando
 ○○○ as igualdades notables. Relaciona o resultado co número de solucións.

- 61** Que valor debe tomar k para que os números indicados
 ○○○ sexan solucións das ecuacións?

a) $2x^2 + 5x + k = 0$

$x = \frac{3}{2}$

b) $k(x^2 - 5x + 1) - 6(x + 2) + 4(k - x) - 65 = 0$
 $x = -2$

- 62** Que valores deben tomar a e b para que a ecuación
 ○○○ $ax^2 + bx - 30 = 0$ teña dúas solucións, $x_1 = 5$ e $x_2 = -3$?

- 63** Di, sen resolvelas, cal é a suma e o produto
 ○○○ das raíces das seguintes ecuacións, e logo calcúlalas para comprobalo.

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

c) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

- 64** Escribe ecuacións de segundo grao que presentan
 ○○○ as seguintes solucións:

a) $x_1 = -4$ e $x_2 = 2$

b) $x_1 = 0$ e $x_2 = -7$

c) $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$

d) $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$

- 65** Resolve as ecuacións.

○○○ a) $\frac{2x - 3}{x^2 - 1} - \frac{3 - x}{x + 1} = 0$

b) $\frac{3}{x + 2} - \frac{5 - x}{x + 1} = 0$

c) $\frac{-x + 3}{x - 1} - \frac{9 - x}{x^2 - 1} = 0$

d) $\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{3}{x - 2} - 2$

e) $\frac{x + 4}{x - 3} - \frac{1 - 2x}{x^2 - x - 6} = 0$

- 66** Estas ecuacións teñen menos de catro solucións.
 ○○○ Determinaas.

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0$

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0$

c) $6 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^4} = 0$

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

- 67** Obtén as solucións das ecuacións.

○○○ a) $\frac{2x(x^3 - 7x)}{2x^2 - 12} = 6$

b) $3x^2(x^2 - 2) = \frac{x^2 - 2}{3}$

c) $8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3}$

d) $\frac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2$

ACTIVIDADES

- 68** Completa as seguintes ecuacións escribindo un número no segundo membro, de maneira que teñan estas solucións.

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = \square$
 $x = 2$

b) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \square - \frac{1}{\sqrt{4x}}$
 $x = 4$

- 69** Resolve e comproba as solucións.

a) $x + \sqrt{2x+3} = 6$

b) $2\sqrt{3x+1} - 2x + 2 = 0$

c) $\frac{\sqrt{2x-2}}{x-5} = 1$

d) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} - 2 = 0$

- 70** Estas ecuacións teñen cero, unha ou dúas solucións.

●●● Determinaas.

a) $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{4x-3} - 5 = 0$

b) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-2} = 2$

c) $\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x+8} = 0$

d) $\frac{3}{1+\sqrt{x}} = \frac{5-\sqrt{x}}{3}$

e) $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-5} + 1 = 0$

- 71** As ecuacións teñen tres solucións. Dada unha solución, calcula as outras dúas solucións.

a) $(x+3)(x^2-2x-3) = 0$
 $x = -3$

b) $(2a-1)(4a^2+20a+25) = 0$
 $a = \frac{1}{2}$

- 72** Calcula a solución destas ecuacións.

●●● a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

b) $x^2(x+6) = 32$

c) $x^2(x^2+1) + 2x^3 + 36 = 12x(x+1)$

d) $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 = 0$

- 73** Escribe ecuacións factorizadas que teñan as solucións e o grao indicado.

a) Grao 3 e solucións 5, -2 e 7.

b) Grao 4 e solucións 1, -3 e -4.

- 74** Calcula as solucións destas ecuacións.

●●● a) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

b) $4x^3(x-3) + 2x^2 + 30(x+1) = 23x(x-1)$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0$

- 75** Resolve estas ecuacións.

●●● a) $\frac{x^3+x^2}{3} + x\frac{x+1}{6} = x+1$

b) $3x^2\left(4 + \frac{7}{x}\right) = \frac{6(17x-4)}{x}$

c) $\frac{x^2}{16}(x+7) + x+1 = 0$

d) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

e) $\frac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1} = 3$

Sistemas de ecuacións lineares

- 76** Do seguinte sistema de ecuacións sábese que $x = -1$ forma parte da súa solución. Determina o valor de y .

$$\begin{cases} 3(2x+y-1) - 6(4x-y) = 15 \\ -x+y+3(x-2y)+6 = 4 \end{cases}$$

- 77** Resolve os seguintes sistemas.

●●● a) $\begin{cases} -2(x+4) + 3(3-2y) - 1 = 12 \\ 5(x+y) - 4(x+1) - 2y + 10 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6(x-2y-3) - 3(2x+y-3) + x+7 = 0 \\ 3(x-6y) - 2(x-y) + y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x+3}{3} + \frac{y+1}{5} = 3 \\ \frac{x-5}{2} - \frac{2y-1}{3} = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x+3}{9} - \frac{y-5}{8} = 0 \\ \frac{2x-y+1}{2} - \frac{x+2y-3}{5} = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -(2x+3y-2) - 6(x-y+1) = -15 \\ 4(x+3) - 12(x-y+3) = -32 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 6(x+2y-3) - 5(-2x+3y-1) + 3 = 6 \\ 16 = \frac{3y}{x-1} \end{cases}$

- 78** Dada a ecuación $2x - 5y = 14$, encontra outra ecuación para que xuntas formen un sistema de dúas ecuacións que:

- a) Teña unha soa solución.
b) Non teña solucións.
c) Teña infinitas solucións.

- 79** Calcula, se é posible, un valor de a para que o sistema:

●●● $\begin{cases} 6x - 4y = 12 \\ -9x + ay = -18 \end{cases}$

- a) Sexa incompatible.
b) Sexa compatible indeterminado.
c) Sexa compatible determinado.

- 80** Encontra, se é posible, un valor de b para que o sistema:

$$\begin{cases} 8x - 12y = 20 \\ 4x + 9y = b \end{cases}$$

- a) Sexa incompatible.
b) Sexa compatible indeterminado.
c) Sexa compatible determinado.

- 81** Resolve os seguintes sistemas con tres ecuacións e dúas incógnitas, e representa as solucións.

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -x + y = -4 \\ -4x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 6x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$

- 82** Determina as solucións destes sistemas de tres ecuacións con tres incógnitas.

a) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Inecuacións

- 83** Resolve as inecuacións.

- a) $-x + 15 \leq 3 - 7x$
b) $x + 11 \geq 3 - 4x$
c) $-x - 13 \leq 3 + 7x$
d) $2x + 11 \geq 6 + 5x$

- 84** Calcula a solución das seguintes inecuacións.

- a) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9$
b) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) \geq -3(x + 1) - (2 - 3x)$
c) $\frac{x+2}{3} - \frac{2x+4}{2} > 1$

- 85** Encontra a solución das inecuacións.

- a) $\frac{1-5x}{4} - 2\frac{4+3x}{5} \leq \frac{1}{2}$
b) $\frac{-2+3x}{5} + \frac{6-4x}{3} + \frac{1}{2} \geq 0$
c) $1 - \frac{2x-5}{6} + \frac{1-4x}{2} - \frac{x-1}{3} < 0$

- 86** Resolve estas inecuacións.

- a) $\begin{cases} 2(x-5) - 3(2-2x) < 0 \\ -x + 3(2+x) > 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 4(2x-5) + 2(8-2x) + 7 \geq 0 \\ 3(1-2x) - 3(2x-1) + 1 \geq 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} \frac{x-2}{5} + \frac{1-x}{3} < 0 \\ \frac{2-3x}{6} - \frac{3-3x}{2} > 0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} -3(x+1) \cdot 2 - \frac{2+5x}{3} > 1 \\ 2 \cdot \frac{2x-1}{5} + \frac{1}{5} < 0 \end{cases}$

- 87** Cal é a solución destas inecuacións?

- a) $x^2 - x - 6 < 0$
b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$
c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$
d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$
e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$
f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

- 88** Resolve estas inecuacións que conteñen fraccións alxébricas.

- a) $\frac{x+3}{x-5} < 0$ c) $\frac{-x+1}{2-3x} > 0$
b) $\frac{2x-3}{x+3} < 0$ d) $\frac{2-x}{2x+5} - 1 > 0$

- 89** Determina as solucións destas inecuacións.

- a) $\frac{x+2}{3} + \frac{x(x-1)}{5} > 0$
b) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-x^2}{3} + 1 < 0$
c) $x - \frac{1-2x}{3} - \frac{2x^2+1}{4} \geq 5$
d) $3 - \frac{2x-3}{2} + \frac{16x+x^2}{3} \geq 0$
e) $\frac{x-1}{4} - \frac{12x-x^2}{3} \geq \frac{2x^2+1}{3} - x$

- 90** Obtén as solucións destes sistemas.

- a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases}$

ACTIVIDADES

91 Resolve estes sistemas de inecuacións.

9100 a) $\begin{cases} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 3x + 5 > -16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 2x - 3 > 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ 3x - 2 < 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 < 0 \\ 3x - 2 > 10 \end{cases}$

92 Obtén graficamente as solucións dos seguintes sistemas de inecuacións.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 < 0 \\ x + 2y > 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + 2y > 11 \end{cases}$

93 Calcula as solucións destes sistemas.

9300 a) $\begin{cases} 2x - y + 6 < 0 \\ -4x + 2y < 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 6 < 0 \\ -4x + 2y > 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 6 > 0 \\ -4x + 2y < 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y + 6 > 0 \\ -4x + 2y > 2 \end{cases}$

94 Resolve os sistemas.

94000 a) $\begin{cases} \frac{2x+y}{3} < \frac{y+6}{5} \\ \frac{4-x}{3} + \frac{2-y}{5} < 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{6x+y}{25} < \frac{3-y}{5} \\ \frac{-x+1}{3} - 2 \cdot \frac{2x+y-3}{2} < \frac{3x+1}{4} \end{cases}$

Problemas con ecuacións

95 Determina a suma e o produto das solucións da ecuación.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Calcula as solucións. Podes explicar o que sucede?

96 Estuda o valor dos coeficientes da ecuación bicadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, para que teña catro, tres, dúas, unha ou ningunha solución.

97 Utiliza o método de substitución para resolver estes sistemas de ecuacións non lineares que teñen dúas solucións, menos o último, que non ten solución.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = 6x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 10 = xy \\ x + 2 = y + 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - y + 9 = 0 \end{cases}$

98 Resolve a ecuación.

$$2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Trata de facelo substituíndo na expresión $x - \frac{1}{x} = t$ e obterás unha ecuación de segundo grao.

Calcula as solucións para a incógnita t e logo substitúe para calcular o valor de x .

99 Determina a solución destas ecuacións realizando as substitucións de variable necesarias.

a) $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$

b) $\frac{x^2}{x^2 - 6x + 9} - \frac{6x}{x - 3} + 8 = 0$

100 Se Max sobe de tres en tres os banzos dunha torre, ten que dar 30 pasos menos ca se os sobe de dous en dous. Cantos banzos ten a torre?

101 O xequo Omar ten disposto no seu testamento que a terceira parte dos seus camelos se lle entregue ao seu primoxénito, Alí; que a terceira parte do rabaño sexa para o seu segundo fillo, Casim, e o resto vaia parar á súa esposa Fátima. Trala morte de Omar e, unha vez feita a repartición, a Fátima correspóndelle 140 camelos. Cantos camelos compoñían o rabaño do xequo?

102 Nunha bodega venden dous tipos de viño: crianza e reserva. Calcula cal é o seu prezo se sabemos que Xoán comprou 3 botellas de reserva e 12 botellas de crianza e pagou 69 €, mentres que Belén comprou 6 botellas de crianza e 8 botellas de reserva e pagou 80 €.



- 103** Un comerciante compra melóns a 40 céntimos/kg e véndeos a 60 céntimos. Calcula cantos quilogramos de melóns comprou se se lle estragaron 10 kg e obtivo 42 €.

- 104** Carme dispónse a investir 100.000 €. No banco ofrécenlle dous produtos: Fondo Tipo A, ao 4 % de interese anual, e Fondo Risco B, ao 6 % de interese anual. Inviste unha parte en cada tipo de fondo e ao cabo do ano obtén 4.500 € de intereses. Canto adquiriu de cada produto?



- 105** Un ciclista e un coche parten ao seu encontro desde dúas cidades separadas por 180 km. Sabendo que o ciclista avanza catro veces máis amodo ca o coche e que tardan 1 h 48 min en encontrarse, cal é a velocidade de cada un?

- 106** Un camión sae dunha cidade a 80 km/h e dúas horas despois parte na mesma dirección un coche a 100 km/h. Canto tardará en alcanzalo e canta distancia percorrerá ata ese momento?

- 107** Os lados dun rectángulo diferéncianse en 2 m. Se aumentásemos 2 m cada lado, a área incrementaríase en 40 m². Calcula as dimensións do polígono.

- 108** Calcula un número, sabendo que a suma das súas cifras é 14, e que se se inverte a orde en que están colocadas, o número diminúe en 18 unidades.

- 109** O aluguer dunha tenda de campaña custa 80 € ao día. Inés está preparando unha excursión cos seus amigos e fai a seguinte reflexión: «Se fóramos tres amigos máis, teríamos que pagar 6 € menos cada un». Cantos amigos van de excursión?

- 110** Xacinto está cercando un terreo de forma rectangular. Cando leva posto arame a dous lados consecutivos do terreo, dáse de conta de que gastou 170 m de arame. Se sabe que a diagonal do rectángulo mide 130 m, cales son as dimensións e a área do terreo?

- 111** A apotema dun hexágono regular mide 8 cm. Determina a medida do seu lado e da súa área.

- 112** Calcula as dimensións que ten un prego rectangular de papel, sabendo que se deixamos as marxes laterais de 1 cm e as verticais de 2,5 cm, a área é 360 cm², e que se as marxes laterais son de 2 cm e as verticais son de 1,25 cm, a área é a mesma.

- 113** Calcula un número enteiro, sabendo que se ao cadrado do seguinte número lle restamos oito veces o seu inverso obtemos 23.

- 114** Se aumentásemos en 4 cm a aresta dun cubo, o seu volume multiplicaríase por 8. Calcula a medida da aresta.

- 115** Dúas vacas e tres tenreiros valen o mesmo ca dezaseis ovellas. Unha vaca e catro ovellas valen igual ca tres tenreiros. Tres tenreiros e oito ovellas custan o mesmo ca catro vacas. Calcula o prezo de cada animal.

- 116** Un número que ten tres cifras representámolo na forma abc . Determina, sabendo que se escribes cab , o número diminúe en 459 unidades; se escribes bac , o número diminúe en 360 unidades, e que bca é 45 unidades menor ca bac .

- 117** O triplo dun número menos a súa metade é sempre maior ca 3. Que números cumpren esta propiedade?

- 118** Dun número sábese que se ao seu cadrado lle restamos a súa metade, obtense un número menor ca 1. Que número pode ser?

- 119** É certo que a suma dun número e do seu cadrado é sempre positiva? Que números cumpren esa condición?

- 120** Encontra todos os números enteiros que multiplicados polo seguinte número dean un resultado menor ca 24.

- 121** Determina para que valores de x é posible realizar as operacións indicadas.

a) $\sqrt{5-3x}$

b) $\sqrt{x-3}$

c) $\sqrt{4-3x-x^2}$

d) $\log(2-5x)$

e) $\log(6-x-x^2)$

f) $\log(x^2-2x+1)$

- 122** Xesús e Beatriz queren saber canto custa un bote de refresco, pero non recordan exactamente canto pagaron. Xesús comprou 8 botes e sabe que pagou cun billete de 5 € e que lle devolveron unha moeda de 2 € e algo máis de diñeiro. Beatriz comprou 18 botes e lembra que pagou a cantidade exacta cun billete de 5 €, unha moeda de 2 € e algunha moeda máis. Con estes datos, que poderías dicir do prezo do bote de refresco?



Reflexiona sobre a teoría

- 123** Demostra a seguinte propiedade que cumpren os números combinatorios.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

- 124** Demostra, utilizando o método de indución, as seguintes igualdades.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

IDEA CLAVE

O método de indución consiste en comprobar que as igualdades se verifican para $n = 1$, supoñer que son certas para $n = k$ (hipótese de indución) e demostralas para $n = k + 1$.

- 125** Discute as solucións da seguinte ecuación, segundo os valores de m .

$$x^2 - 2x + \log m = 0$$

IDEA CLAVE

Estuda o signo do discriminante.

- 126** Se as solucións da ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son x_1 e x_2 , escribe ecuacións de segundo grao que presenten as seguintes solucións:

- a) Os cadrados de x_1 e x_2 .
- b) Os inversos de x_1 e x_2 .
- c) Os opostos de x_1 e x_2 .

- 127** Calcula a relación entre os coeficientes da ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e a suma, o produto e a suma dos dobres produtos das súas tres raíces.

IDEA CLAVE

Supón que α , β e γ son as solucións; factoriza o polinomio, opera e identifica os coeficientes.

Pensa un pouco máis

- 128** Xoán e Lois soben nunha escaleira mecánica. Xoán sobe tres veces máis rápido ca o seu amigo, facéndoo ambos de banzo en banzo. Ao terminar de subir, Xoán contou 75 banzos e Lois contou 50 banzos. Con eses datos, calcula os banzos «visibles» da escaleira.

Análise do enunciado

Por cada banzo que se baixa, a escaleira baixa un coeficiente k de banzo; e, ao subir, por cada banzo que se sobe, a escaleira baixa un quinto de k .

Deseño da resolución

Formula as ecuacións para o número de banzos.

Clave para resolver o problema

Iguala o número de banzos visibles de baixada cos de subida.

- 129** Temos un chan rectangular, formado por baldosas enteiras cadradas de cor clara, que está rodeado de baldosas escuras, tamén cadradas.

Que dimensións debe ter o rectángulo claro para que o número de baldosas da zona clara sexa igual ao da franxa escura que o rodea?



Análise do enunciado

Temos dous rectángulos, un dentro doutro, de maneira que o maior ten dobre superficie ca o menor.

Deseño da resolución

Formula a ecuación relacionando a superficie co número de baldosas.

Clave para resolver o problema

Obtense unha ecuación con dúas incógnitas cuxas solucións deben ser números naturais.