

1 Números reais

LITERATURA E MATEMÁTICAS

O código Da Vinci

O profesor Langdon sentiuse unha vez máis en Harvard, de novo na súa clase de «Simbolismo na Arte», escribindo o seu número preferido no encerado:

1,618

Langdon deu a volta para contemplar a cara expectante dos seus alumnos.

—Alguén pode dicirme que é este número?

Un alto, estudante de último curso de matemáticas, que estaba ao fondo levantou a man.

—É o número Phi —dixo, pronunciando as consoantes como un efe.

—Moi ben, Stettner. Aquí vos presento a Phi.

—Que non debe confundirse con pi —engadiu Stettner cun sorriso de suficiencia.

—Phi —proseguíu Langdon—, un coma seiscientos dezaioito, é un número moi importante para a arte. Alguén sabería dicirme por que?

Stettner seguía no seu papel de gracioso.

—Porque é moi bonito?

Todos riron.

—En realidade, Stettner, volve ter razón. Phi adoita considerarse como o número máis fermoso do universo.

As gargalladas cesaron ao momento, e Stettner incorporouse, orgulloso. [...] A pesar das orixes aparentemente místicas de Phi, proseguíu Langdon, o aspecto verdadeiramente abraiante dese número era o seu papel básico en tanto que molde construtivo da natureza. As plantas, os animais e mesmo os seres humanos posuían características dimensionais que se axustaban con misteriosa exactitude á razón de Phi a 1.

—A localización de Phi na natureza —engadiu Langdon apagando as luces [para proxectar na pantalla imaxes de náutilos, piñas, xirasoles...]— transcende sen dúbida a casualidade, polo que os antigos crían que ese número fora predeterminado polo Creador do Universo. Os primeiros científicos bautizaron o un coma seiscientos dezaioito como «A Divina Proporción».

DAN BROWN

Números racionais
e irracionais

Números reais

Intervalos

Aproximacións e acotación
de erros

Notación científica

Radicais

Logaritmos

En realidade, o valor do número Phi é $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Os números 1,618 e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son dous números reais, pero un é racional e o outro é irracional. Por que? Que erro se comete ao tomar 1,618 como valor de Phi?

Tipos de números

NATURAIS $\rightarrow 1, 2, 3, \dots$

ENTEIROS $\rightarrow \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

DECIMAIS $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Exactos: } -2, 2; 1, 34; 6, 245; \dots \\ \text{Periódicos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Periódicos puros: } -1, \overline{3}; 56, \overline{345}; \dots \\ \text{Periódicos mixtos: } 0, 6\overline{2}; 5, 32\overline{87}; \dots \end{array} \right. \\ \text{Non periódicos: } \pi; \sqrt{2}; 7, 101001000\dots \end{array} \right.$

FRACCIÓNS $\rightarrow -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{12}{4}, \dots$

Repasa

1 Clasifica estes números segundo o tipo ao que pertencen.

$0, \overline{7}$ -16 $685,009\overline{1}$ $-0,0201$ 67 $\frac{27}{44}$ $-456,89$ $-\frac{34}{8}$

Paso de número decimal exacto ou periódico a fracción

Calquera número decimal exacto, periódico puro ou periódico mixto pódese expresar en forma de fracción.

Expresión dun número decimal exacto en forma de fracción

O número decimal sen coma $3,25 = \frac{325}{100}$

Tantos 0 coma cifras decimais haxa $-0,2467 = -\frac{2467}{10.000}$

Expresión dun número decimal periódico puro en forma de fracción

Parte enteira e período $5, \overline{37} = \frac{537 - 5}{99} = \frac{532}{99}$

Parte enteira $0, \overline{6} = \frac{6 - 0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Tantos 9 coma cifras ten o período $-21, \overline{302} = -\frac{21.302 - 21}{999} = -\frac{20.281}{999}$

Expresión dun número decimal periódico mixto en forma de fracción

Parte enteira e decimal periódica e non periódica $1,6\overline{4} = \frac{164 - 16}{90} = \frac{148}{90} = \frac{74}{45}$

Parte enteira e decimal non periódica $3,24\overline{7} = \frac{3.247 - 324}{900} = \frac{2.923}{900}$

Tantos 9 coma cifras ten o período e tantos 0 coma cifras ten o anteperíodo $-0,2\overline{05} = -\frac{205 - 2}{990} = -\frac{203}{990}$

Repasa

2 Expresa en forma de fracción.

$0,22$ $-34, \overline{03}$ $25,01\overline{2}$ $0,1\overline{043}$ $-2, \overline{302}$

Valor absoluto dun número

O **valor absoluto** dun número é o número prescindindo do seu signo, é dicir: se é positivo, o seu valor absoluto é el mesmo, e se é negativo cambiámolo de signo.

O valor absoluto de -3 é $|-3| = 3$ e o valor absoluto de 3 é $|3| = 3$.

Repasa

3 Obtén o valor absoluto dos números.

$$7 \quad 0 \quad -1 \quad -6^2 \quad (-6)^2$$

Potencias

Expoñente

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Base

- Se a base dunha potencia é un número enteiro positivo, a potencia é positiva.
 $5^3 = 125$ $10^4 = 10.000$
- Se a base é un número enteiro negativo, a potencia é positiva se o expoñente é par, e negativa, se é impar.
 $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$ $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
- Para elevar unha fracción a unha potencia elévanse o numerador e o denominador a esa potencia.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625} \quad \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = \frac{-8}{125} = -\frac{8}{125}$$

Repasa

4 Calcula as seguintes potencias.

a) 3^4 c) $(-2)^6$ e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$ g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^3$
 b) $\left(\frac{5}{-2}\right)^5$ d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$ f) $(-5)^7$ h) 2^5

Propiedades das potencias

Produto de potencias da mesma base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$
Cociente de potencias da mesma base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3$
Potencia dun produto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \cdot 13)^2 = 4^2 \cdot 13^2$
Potencia dun cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4}$
Potencia dunha potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(8^3)^6 = 8^{3 \cdot 6} = 8^{18}$
Potencia de expoñente negativo	$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$5^{-4} = \frac{1}{5^4}$ $\left(\frac{8}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{8}\right)^5$
Casos particulares	$a^0 = 1$ $a^1 = a$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$	$6^0 = 1$ $6^1 = 6$ $6^{-1} = \frac{1}{6}$

Repasa

5 Simplifica e expresa o resultado como potencia.

a) $\frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}}$ b) $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2$

1 Números racionais

O conxunto $\mathbb{Q}$ dos **números racionais** está formado por todos aqueles números que se poden escribir como unha fracción $\frac{a}{b}$, onde a e b son números enteiros e b é distinto de 0.

Ao calcular a expresión decimal dun número racional, dividindo o numerador entre o denominador, obtense un número enteiro ou un número decimal exacto ou periódico.

Reciprocamente, calquera número decimal deste tipo pódese escribir en forma de fracción e, polo tanto, é un número racional.

Exemplo

1 Clasifica os números racionais e pon exemplos.

Números racionais	Números enteiros	- Números naturais: 1, 2, 3, ... - O número cero: 0 - Enteiros negativos: -1, -2, -3, ...
	Números decimais	- Decimais exactos: 0,2; 0,34; ... - Decimais periódicos: 0,7; 0,984; ...

Cada conxunto de fraccións equivalentes representa o mesmo número racional.

Calquera fracción do conxunto é un **representante** do número racional, e a fracción irredutible con denominador positivo é o **representante canónico**.

Exemplo

2 O número racional $\frac{2}{3}$ está formado pola fracción $\frac{2}{3}$ e todas as súas fraccións equivalentes. Cal é o seu representante canónico?

$$\frac{2}{3} = \left\{ \dots, \frac{-6}{-9}, \frac{-4}{-6}, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots \right\}$$

A fracción irredutible con denominador positivo é $\frac{2}{3}$; polo tanto, é o representante canónico do conxunto de fraccións.

ACTIVIDADES

1 Calcula o representante canónico destes números.

a) $\frac{-16}{24}$

b) $\frac{18}{39}$

c) $\frac{-24}{-60}$

2 Escribe dous representantes dos números racionais.

a) $\frac{7}{12}$

b) $\frac{9}{2}$

c) $\frac{8}{25}$

3 Calcula cantos números racionais distintos hai nesta secuencia.

$$\frac{5}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad \frac{-5}{3} \quad \frac{5}{-3} \quad \frac{10}{6} \quad 1,6$$

4 Unha fracción que teña un termo negativo e outra que teña os seus dous termos positivos, poden ser representantes do mesmo número racional?

2 Números irracionais

O conxunto $\mathbb{I}$ dos **números irracionais** está formado polos números que non poden ser expresados como fracción. A súa expresión decimal ten un número infinito de cifras que non se repiten de forma periódica.

Existen infinitos números irracionais, algúns dos cales son:

- As raíces non exactas, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{1.492}$... En xeral, se n é un número natural que non é un cadrado perfecto, $\sqrt{n}$ é irracional.
- Números coñecidos desde a antigüidade:

$$\pi = 3,1415926...; \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339...; e = 2,71828182...$$

Non esquezas



Se a é un número racional
e b é un número irracional:

$a + b$ é irracional

$a \cdot b$ é irracional

Exemplo

3 Demostra que $\sqrt{7}$ non é un número racional.

Se $\sqrt{7}$ fose racional poderíamos escribir:

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b}, \text{ con } \frac{a}{b} \text{ irredutible} \rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b} \rightarrow 7 = \frac{a^2}{b^2}$$

Por tanto, a^2 é divisible por b^2 , o que é imposible xa que a e b son primos entre si.

Faino así

COMO PODEMOS ESCRIBIR NÚMEROS IRRACIONAIS

Escribe algúns números irracionais indicando como o fas.

PRIMEIRO MÉTODO. Utilizando unha **regra de formación**: escribimos o número decimal ata unha determinada cifra e indicamos como continúa.

Número	Regra de formación
0,1234567891011...	Tras a coma sitúanse todos os números naturais
1,2468101214...	Tras a coma sitúanse todos os números pares

SEGUNDO MÉTODO. Se a un número irracional lle sumamos un número ou o multiplicamos por outro, o resultado é un número irracional.

Por exemplo, $\sqrt{5}$ é irracional $\rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é irracional (Φ).

Tamén son números irracionais: $1 + \sqrt{5}$, $3 \cdot \sqrt{5}$, $-\frac{\sqrt{5}}{3}$...

ACTIVIDADES

5 Escribe 4 números irracionais, especificando a súa regra de formación.

6 Decide se os seguintes números son irracionais.

- a) 0,51015202530... c) $2 - \pi$
b) $\frac{3\pi}{4\pi}$ d) $\frac{10}{17}$

7 Encontra, sen facer operacións con decimais, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

8 Razona se son certas ou non as seguintes afirmacións.

- a) A raíz dun número irracional é irracional.
b) Un número irracional ao cadrado non é racional.

3 Números reais

O conxunto dos **números reais** está formado polos números racionais e irracionais, e represéntase por $\mathbb{R}$.

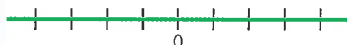
NÚMEROS REAIS $\mathbb{R}$

NÚMEROS IRRACIONAIS $\mathbb{I}$		NÚMEROS RACIONAIS $\mathbb{Q}$	
$\sqrt{12}$	$-\sqrt{103}$	$\frac{1.407}{5}$	$-\frac{4}{9}$
π	$-0,1234567\dots$		$\frac{7}{3}$
$1,120120012000\dots$	$\sqrt{3}$	Números enteiros $\mathbb{Z}$ Números naturais $\mathbb{N}$ 2 1.304	
		-1	-3

3.1. Recta real

Non esquezas

Os números reais *enchen* completamente a recta.



Todo punto da recta real ten unha expresión enteira ou decimal (exacta, periódica ou non periódica).

A recta numérica na que se representan todos os números reais denomínase **recta real**.

Faino así

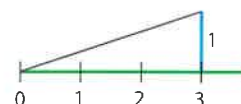
COMO REPRESENTAMOS NA RECTA REAL OS NÚMEROS DA FORMA $\sqrt{n}$

Representa $\sqrt{12}$ na recta real.

PRIMEIRO. Descompoñemos n como unha suma de cadrados perfectos.

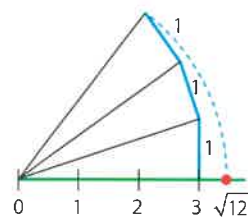
$$\sqrt{12} \rightarrow 12 = 3^2 + 3 = 3^2 + 1^2 + 2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

SEGUNDO. Utilizamos os dous primeiros cadrados perfectos para construír os catetos dun triángulo rectángulo sobre a recta real. No noso caso, as lonxitudes dos catetos serán 3 e 1.



TERCEIRO. Utilizamos o seguinte cadrado perfecto para construír un novo triángulo sobre a hipotenusa do triángulo anterior. Neste caso, a lonxitude é 1.

CUARTO. Seguimos construíndo triángulos de forma análoga ata facelo con todos os cadrados.



QUINTO. Con centro en 0, e raio, a hipotenusa do último triángulo, trazamos un arco que corte a recta real.

ACTIVIDADES

9 Indica o conxunto numérico mínimo ao que pertence cada número.

- a) 8,0999... c) $\sqrt{15}$ e) 2,5
b) 1,223334444... d) $6,1\overline{26}$ f) -11

10 Representa as raíces.

- a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{101}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{36}$

11 Coloca, na recta real, o número:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

12 Representa, na seguinte recta real, os números 1 e 2.



3.2. Propiedades

As propiedades dos números reais son as mesmas que cumpren os números racionais.

Propiedades	Suma	Multiplicación
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Elemento oposto/inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Non esquezas



- O elemento oposto e o elemento inverso son únicos para cada número real.
- O número 0 non ten inverso, é dicir, non existe ningún número real que multiplicado por 0 sexa igual a 1.

Exemplo

4 Aplica a propiedade distributiva a estas expresións.

$$\text{a) } -\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{13}{5} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{6}{7} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{13}{5}\right) = -\frac{6}{7} \cdot \frac{57}{20} = -\frac{342}{140} = -\frac{171}{70}$$

$$\text{b) } \frac{2}{7} \cdot \frac{13}{8} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{13}{8} - \frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{7} \cdot \frac{63}{40} = \frac{126}{280} = \frac{9}{20}$$

3.3. Relación de orde

Dados dous números reais a e b , dicimos que:

- a é **menor ca** b , e escríbese $a < b$, cando $b - a$ é positivo.
- a é **maior ca** b , e escríbese $a > b$, cando $b - a$ é negativo.

A relación de orde entre números reais cumpre as seguintes propiedades.

Transitiva

Se $a \leq b$ e $b \leq c$, cúmprese que: $a \leq c$

Relación total

Establécese unha orde entre todos os números: $a < b$, $a = b$ ou $a > b$

Monótona respecto da suma

Se $a \leq b$, dado un valor de c , cúmprese que: $a + c \leq b + c$

Respecto do produto

Se $a \leq b$ e $c > 0$, cúmprese que: $a \cdot c \leq b \cdot c$

Se $a \leq b$ e $c < 0$, cúmprese que: $a \cdot c \geq b \cdot c$

ACTIVIDADES

13 Aplica a propiedade distributiva e opera.

$$\text{a) } \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\right)$$

$$\text{b) } \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7}$$

14 Ordena, de menor a maior, os seguintes números racionais e irracionais.

$$\frac{22}{7} \quad \pi \quad \frac{2.827}{900}$$

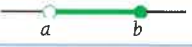
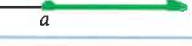
15 Con axuda da propiedade distributiva, calcula 99^2 e 999^2 sen realizar as operacións.

4 Intervalos

Un **intervalo** é un conxunto de números reais que se corresponde cos puntos dun segmento ou unha semirrecta na recta real.

Cada intervalo vén determinado polos seus extremos, sendo dous extremos no caso dos segmentos e un extremo no caso das semirrectas.

Segundo inclúan ou non os puntos extremos, os intervalos poden ser **abertos**, **semiabertos** ou **cerrados**.

Intervalo aberto	(a, b)	$\{x: a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x: a \leq x \leq b\}$	
Intervalo semiaberto	$(a, b]$	$\{x: a < x \leq b\}$	
Intervalo semiaberto	$[a, b)$	$\{x: a \leq x < b\}$	
Semirrecta aberta	$(a, +\infty)$	$\{x: a < x\}$	
Semirrecta cerrada	$[a, +\infty)$	$\{x: a \leq x\}$	
Semirrecta aberta	$(-\infty, b)$	$\{x: x < b\}$	
Semirrecta cerrada	$(-\infty, b]$	$\{x: x \leq b\}$	

Lembra

Valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$|3| = 3 \quad |-3| = 3 \quad |-7| = 7$$

Exemplo

5 Representa os seguintes conxuntos de todas as formas posibles.

a) Números menores ca 7

b) $\{x: 3 \leq x < 4\}$

c) $\{x: -2 < x < 5\}$

d) $\{x: |x| \leq 4\}$

a) $\{x: x < 7\} = (-\infty, 7)$



b) $\{x: 3 \leq x < 4\} = [3, 4)$



c) $\{x: -2 < x < 5\} = (-2, 5)$



d) $\{x: |x| \leq 4\} = [-4, 4]$



No último apartado, a condición $|x| \leq 4$ equivale a que a distancia ata o número 0 é menor ca 4 unidades.

ACTIVIDADES

16 Representa os seguintes conxuntos numéricos de todas as formas que coñezas.

a) Números menores ca π .

b) Números maiores ca $\sqrt{3}$ e menores ou iguais ca 7.

c) Números menores ou iguais ca 2 e maiores ca -2 .

d) Números comprendidos entre os dous primeiros números pares, ambos incluídos.

17 Escribe, de todas as maneiras que coñezas, estes intervalos da recta real.

a) 

b) 

c) 

d) 

18 Representa o conxunto $\{x: |x - 3| \leq 1\}$ de todas as formas posibles.

5 Aproximacións e erros

5.1. Aproximacións

Ás veces é imposible traballar con certos números, por exemplo: π , $\sqrt{3}$, 2.737... Nestes casos usamos valores exactos, que estean próximos ao número e que simplifiquen os cálculos, e estes valores chámanse aproximacións.

Existen varios tipos de aproximacións, sendo as máis importantes:

- **Aproximación por defecto ou truncamento.** Consiste en eliminar as cifras a partir da orde considerada.
- **Aproximación por exceso.** Elimínanse as cifras a partir da orde considerada, pero aumentase nunha unidade a última cifra que deixamos.

Redondeo: É a mellor das aproximacións das dúas anteriores.

Exemplo

- 6 Aproxima 4,635; $3,5\overline{7}$ e $\sqrt{3}$ ás centésimas.

	Redondeo ás centésimas	Truncamento ás centésimas
4,635	4,64	4,63
$3,5\overline{7}$	3,58	3,57
$\sqrt{3} = 1,732\dots$	1,73	1,73

Calculadora



Coa calculadora podemos fixar o número de decimais co que traballamos:

MODE 7 FIX 3

Se fixamos 3 decimais, a calculadora sempre redondea a 3 decimais.

Así, o resultado de facer

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$ será:

2 $\sqrt{}$ = 1,414

5.2. Erros

O **erro absoluto**, E_a , é a diferenza, en valor absoluto, entre o valor real e a aproximación.

$$E_a = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximado}}|$$

O **erro relativo**, E_r , é o cociente do erro absoluto e do valor real.

$$E_r = \left| \frac{E_a}{V_{\text{real}}} \right|$$

Exemplo

- 7 Calcula os erros cometidos ao redondear 2,387 ás centésimas.

$$2,387 \xrightarrow{\text{Ás centésimas}} 2,39$$

$$E_a = |2,387 - 2,39| = 0,003$$

$$E_r = \left| \frac{0,003}{2,387} \right| = 0,0013$$

ACTIVIDADES

- 19 Con axuda da calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal e as súas aproximacións por exceso e por defecto.

- Ás dezmilésimas.
- Ás cenmilésimas.
- Ás millonésimas.

- 20 Calcula os erros absoluto e relativo ao redondear o número 1,3456 ás décimas.

- 21 Pensa nunha situación na que dúas medicións teñan os mesmos erros absolutos, pero distintos erros relativos.

6 Cota de erros



Unha cota é un valor que limita unha cantidade descoñecida:

- Unha cota da estatura é 2,5 m, porque non existen persoas de maior altura.
- A cota de idade máxima para gozar das vantaxes do carné xove é 30 anos, xa que a partir desa idade non se pode obter ese carné.

Ao redondear un número ata unha orde n cometemos un erro absoluto que cumpre que:

$$E_{\text{absoluto}} < \frac{1}{2 \cdot 10^n} \rightarrow \text{Cota de erro absoluto, } \epsilon$$

Exemplo

- 8** Calcula a cota de erro absoluto do redondeo do número π ás centésimas.

$$\pi = 3,14159265... \xrightarrow{\text{Ás centésimas}} 3,14$$

$$E_a = |V_{\text{real}} - V_{\text{aproximado}}| = |\pi - 3,14| < 0,005 = \frac{1}{2 \cdot 10^2}$$

Unha cota de erro absoluto desta aproximación é 0,005.

Pódese dicir que o erro absoluto é menor que media unidade da orde á que aproximamos o número.

$$\text{Aproximación ás décimas} \longrightarrow E_a < 0,05$$

$$\text{Aproximación ás centésimas} \longrightarrow E_a < 0,005$$

...

Se consideramos unha cota de erro absoluto, ϵ , sendo $E_{\text{absoluto}} < \epsilon$, cumprese que:

$$E_{\text{relativo}} < \frac{\epsilon}{V_{\text{aproximado}} - \epsilon} \rightarrow \text{Cota de erro relativo}$$

Exemplo

- 9** Calcula a cota de erro relativo do redondeo do número π ás centésimas.

$$\pi = 3,14159265... \xrightarrow{\text{Ás centésimas}} 3,14 \rightarrow E_a < 0,005$$

$$\frac{\epsilon}{V_{\text{aproximado}} - \epsilon} = \frac{0,005}{3,14 - 0,005} \Rightarrow 0,0016 \rightarrow E_r < 0,0016$$

A cota de erro relativo adóitase dar en tanto por cento; neste caso, a cota de erro relativo é do 0,16%.

ACTIVIDADES

22 Indica dous exemplos de medida e dá as súas correspondentes cotas de erro.

23 Calcula as cotas de erro absoluto e relativo ao redondear o número $\sqrt{2}$:

a) Ás centésimas.

b) Ás milésimas.

24 A poboación dunha vila, redondeada ás decenas, é de 310 habitantes. Podes indicar os erros? Saberías dar as cotas de erro cometido?

25 Calcula unha cota de erro absoluto cando truncamos un número ás décimas. E se fose ás centésimas?

7 Notación científica

Un número en notación científica é da forma $a \cdot 10^b$, onde $|a|$ é un número decimal exacto do intervalo $[1, 10)$ e o expoñente, b , é un número enteiro.

O termo a chámase **mantisa** do número e b é a **orde de magnitude**.

A notación científica utilízase para abreviar cantidades grandes ou pequenas.

Faino así

COMO ESCRIBIMOS UN NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

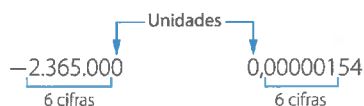
Escribe estes números en notación científica.

−2.365.000 0,00000154

PRIMEIRO. Se o número ten a súa parte enteira distinta de cero, o expoñente da potencia de 10 será positivo, e se a súa parte enteira é cero, o expoñente será negativo.

−2.365.000 → Expoñente positivo 0,00000154 → Expoñente negativo

SEGUNDO. Contamos as cifras que ten o número desde a primeira cifra distinta de cero ata chegar ás unidades. A cifra das unidades non se conta. O resultado, salvo no signo, coincide co expoñente da potencia de 10.



TERCEIRO. Escribimos o número cunha soa cifra enteira, distinta de cero, e a correspondente potencia de 10.

$$\begin{aligned} -2.365.000 &= -2,365 \cdot 10^6 \\ 0,00000154 &= 1,54 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Calculadora



Para expresar un número en notación científica coa calculadora utilízanse as teclas **EXP** e **±**.

Para introducir o número $7,352 \cdot 10^9$ tecleamos:

7,352 **EXP** 9

E para introducir $8,64 \cdot 10^{-3}$ teclearemos:

8,64 **EXP** 3 **±**

Operacións con números en notación científica

- Para sumar e restar, os números deben ter a mesma orde de magnitude.
- Para multiplicar e dividir, multiplícanse ou divídense as mantisas, por un lado, e as potencias de 10, por outro.

Exemplo

10 Realiza estas operacións.

$$\begin{aligned} \text{a) } 9,76 \cdot 10^3 + 2,43 \cdot 10^2 - 3,1 \cdot 10^{-1} &= 9,76 \cdot 10^3 + 0,243 \cdot 10^3 - 0,00031 \cdot 10^3 = \\ &= (9,76 + 0,243 - 0,00031) \cdot 10^3 = \\ &= 10,00331 \cdot 10^3 = 1,000331 \cdot 10^4 \\ \text{b) } (2,1 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2 \cdot 10^4) : (8 \cdot 10^3) &= [(2,1 \cdot 3,2) : 8] \cdot [(10^{-2} \cdot 10^4) : 10^3] = \\ &= 0,84 \cdot 10^{-2+4-3} = 0,84 \cdot 10^{-1} = 8,4 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Decátate



O resultado dalgunhas sumas ou restas pode ser un número que non está escrito en notación científica.

$$7,06 \cdot 10^{11} + 5,2 \cdot 10^{11} = 12,26 \cdot 10^{11}$$

$12,26 \cdot 10^{11}$ → A súa parte enteira ten dúas cifras.

$$12,26 \cdot 10^{11} = 1,226 \cdot 10^{12}$$

ACTIVIDADES

26 Escribe en notación científica os seguintes números.

- a) 0,0000085 c) 31.940.000.000
b) 5.000.000.000.000 d) 0,000000000479

27 Opera e expresa o resultado en notación científica.

- a) $(5,2 \cdot 10^3 + 4,75 \cdot 10^{-2}) : 8,05 \cdot 10^{-4}$
b) $3,79 \cdot 10^8 \cdot (7,73 \cdot 10^4 - 6,54 \cdot 10^{-2})$

8 Radicais

$$\begin{array}{c} \text{Índice} \\ \downarrow \\ \sqrt[n]{a} = b \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Radicando} \quad \text{Raíz} \end{array}$$

Dado un número real a , chámase **raíz enésima** de a , ou **radical de índice n** de a , a todo número real b que verifique que $b^n = a$. Denótase por $\sqrt[n]{a} = b$.

A radicación é unha operación relacionada coa potenciación.

Potenciación	Radicación
Coñecemos a base, b , e o expoñente, n , e calculamos a potencia. $b^n = a$	Coñecemos a potencia, a , e o expoñente, n , e calculamos a base. $\sqrt[n]{a} = b$

8.1. Valor numérico dun radical

Chámase **valor numérico** do radical $\sqrt[n]{a}$ a todo número real b tal que $b^n = a$.

Cando calculamos o valor numérico dun radical hai que ter en conta se o índice é par ou impar e, tamén, o signo do radicando.

	Radicando	Índice	N.º de raíces reais
$\sqrt[n]{a}$	$a > 0$	n impar	1 raíz positiva
		n par	2 raíces: unha positiva e a súa oposta
	$a = 0$	n par ou impar	1 raíz: $\sqrt[n]{0} = 0$
	$a < 0$	n impar	1 raíz negativa
		n par	Ningunha raíz

Calculadora

A calculadora científica permítenos calcular raíces coas teclas $\sqrt[n]{x}$ e SHIFT .

$$\sqrt[3]{-4} \rightarrow 4 \text{ (+/-) (SHIFT) } \sqrt[n]{x} 3 = -1.587401052$$

$$\sqrt{20} \rightarrow 20 \text{ (SHIFT) } \sqrt[n]{x} 4 = 2.114742527$$

Decátate de que, cando existen dúas raíces, a calculadora só dá a raíz positiva.

Exemplo

11 Dadas as seguintes equivalencias, deduce o número de raíces.

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad 4^2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4 \\ (-4)^2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Dicimos que 16 ten dúas raíces cadradas.}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \quad 4^3 = 64 \rightarrow \sqrt[3]{64} = 4 \\ (-4)^3 = -64 \rightarrow \sqrt[3]{-64} = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 64 \text{ ten unha raíz cúbica, 4.} \\ -4 \text{ é a raíz cúbica de } -64. \end{array} \right.$$

ACTIVIDADES

28 Decide se son certas estas igualdades. Razona a resposta.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$

b) $\sqrt[3]{256} = \pm 4$

c) $\sqrt[3]{1.000.000} = \pm 1.000$

d) $\sqrt[3]{32} = \pm 2$

29 Calcula o valor numérico, se existe, dos seguintes radicais.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{-10.000}$

d) $\sqrt[5]{243}$

8.2. Potencias de expoñente fraccionario

Unha potencia de expoñente fraccionario $a^{\frac{m}{n}}$ é un radical de índice n e radicando a^m , e denótase: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exemplo

12 Expresa en forma de potencia con expoñente fraccionario.

a) $\sqrt[3]{7^4} = 7^{\frac{4}{3}}$ b) $\sqrt[5]{-16} = (-16)^{\frac{1}{5}}$ c) $\sqrt{12^4} = 12^{\frac{4}{2}}$

Dous radicais son equivalentes cando, ao expresalos en forma de potencia con expoñente fraccionario, as súas bases son iguais e as fraccións dos seus expoñentes son equivalentes.

$$a^{\frac{m}{n}} \text{ é equivalente a } a^{\frac{p}{q}} \text{ se } \frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Exemplo

13 Expresa como potencia os seguintes radicais e calcula radicais equivalentes.

a) $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ $3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{10}} \rightarrow \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[10]{9}$
 b) $\sqrt[3]{(-5)^2} = (-5)^{\frac{2}{3}}$ $(-5)^{\frac{2}{3}} = (-5)^{\frac{4}{6}} \rightarrow \sqrt[6]{(-5)^4} = \sqrt[6]{(-5)^4}$

Decátate



Ao calcular radicais equivalentes, o número de raíces pode variar.

$\sqrt[3]{-1}$ e $\sqrt[6]{(-1)^2}$ son equivalentes, pero non teñen as mesmas raíces.

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[6]{(-1)^2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

8.3. Simplificación de radicais

Simplificar radicais consiste en extraer da raíz todos os factores posibles.

Faino así

COMO SIMPLIFICAMOS RADICAIS

Simplifica, todo o posible, os radicais $\sqrt[4]{64}$ e $\sqrt[8]{9}$.

PRIMEIRO. Expresamos a raíz como potencia de expoñente fraccionario. $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}}$ $\sqrt[8]{3^2} = 3^{\frac{2}{8}}$

SEGUNDO. Calculamos a fracción irredutible do expoñente. Se é unha fracción impropia, transformámola na suma dun número enteiro e unha fracción propia. $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

TERCEIRO. Expresámolo como produto de potencias, se se pode, e volvemos transformalo en radical. $2^{\left(1+\frac{1}{2}\right)} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

Lembra



Fraccións impropias

Unha fracción é impropia cando o seu denominador é menor ca o seu numerador.

$$\frac{16}{3} \rightarrow \text{Fracción impropia}$$

Calquera fracción impropia pódese expresar como a suma dun número enteiro e unha fracción.

$$16 \overline{) \frac{16}{3}} \rightarrow \frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$$

ACTIVIDADES

30 Transforma os radicais en potencias, e viceversa.

a) $3^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{1}{6}}$ e) $10^{\frac{2}{7}}$
 b) $5^{\frac{2}{3}}$ d) $7^{\frac{3}{5}}$ f) $\sqrt[4]{5^7}$

31 Indica se son equivalentes os seguintes radicais.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ e $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[4]{36}$ e $\sqrt{6}$
 b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ e $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[4]{5^{10}}$ e $\sqrt{5^4}$

9 Operacións con radicais

9.1. Reducir radicais a índice común

Reducir radicais a índice común consiste en encontrar outros radicais equivalentes que teñan o mesmo índice.

Faino así

COMO REDUCIMOS RADICAIS A ÍNDICE COMÚN

Reduce a índice común $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[5]{5}$.

PRIMEIRO. Expresamos os radicais como potencias de expoñente fraccionario.

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}}$$

SEGUNDO. Reducimos a común denominador os expoñentes e expresámoslos de novo como radical.

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 5) = 30$$

$$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{15}{30}} = \sqrt[30]{2^{15}} \quad 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{10}{30}} = \sqrt[30]{3^{10}} \quad 5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{6}{30}} = \sqrt[30]{5^6}$$

Non esquezas



- $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{1}{\frac{n}{p}}} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a}$
- $b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} = (b+c)\sqrt[n]{a}$
- $b\sqrt[n]{a} - c\sqrt[n]{a} = (b-c)\sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

9.2. Operacións con radicais

- Para sumar ou restar radicais, estes deben ter o mesmo índice e idéntico radicando.
- Para multiplicar ou dividir radicais, deben ter o mesmo índice ou igual radicando. Se os radicais non teñen o mesmo índice, redúcense a índice común.
- Para calcular a potencia ou a raíz dun radical, transformamos os radicais en potencias e operamos con elas.

Exemplo

14 Realiza estas operacións.

Simplificamos o radical

$$\text{a) } 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[6]{5^2} = 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$$

Cociente de potencias da mesma base

$$\text{b) } (\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[5]{5^2} = \left(2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 5^{\frac{2}{5}} = 2^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} \cdot 5^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}$$

Reducimos a común denominador as fraccións dos expoñentes, e expresámoslos como potencia dun produto.

$$2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{5}{30}} \cdot 5^{\frac{12}{30}} = (2^5 \cdot 5^{12})^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2^5 \cdot 5^{12}} = \sqrt[30]{20.000}$$

$$\text{c) } \sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[4]{5^{\frac{1}{3}}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{5}$$

ACTIVIDADES

32 Efectúa estas operacións.

- a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$
 b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5}$

33 Opera e simplifica.

- a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$
 b) $\left(\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ d) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

10 Racionalización

A **racionalización** consiste en transformar fraccións que teñan radicais no denominador noutras fraccións equivalentes que non os teñan.

10.1. Fraccións do tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

Para que desapareza o radical do denominador nas fraccións do tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{b^{n-1}}$.

Faino así

COMO RACIONALIZAMOS EXPRESIÓN DO TIPO $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$

Racionaliza a expresión $\frac{6}{\sqrt[3]{3^2}}$.

PRIMEIRO. Multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[3]{b^{n-1}}$.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{6 \sqrt[3]{3^5}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3^5}} = \frac{6 \sqrt[3]{3^5}}{\sqrt[3]{3^7}}$$

SEGUNDO. Simplificamos a expresión resultante.

$$\frac{6 \sqrt[3]{3^5}}{\sqrt[3]{3^7}} = \frac{6 \sqrt[3]{3^5}}{3} = 2 \sqrt[3]{3^5}$$

Decátate



$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

10.2. Fraccións cun binomio no denominador

Os seus denominadores teñen sumandos que conteñen raíces cadradas.

$$\frac{a}{b + \sqrt{c}} \quad \frac{a}{b - \sqrt{c}} \quad \frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$$

Para eliminalas multiplícase o numerador e o denominador polo conxugado do denominador.

Faino así

COMO RACIONALIZAMOS BINOMIOS CON RAÍCES CADRADAS

Racionaliza e simplifica $\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

PRIMEIRO. Calculamos o conxugado do denominador da fracción.

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} \rightarrow \text{Conxugado: } \sqrt{3} - \sqrt{5}$$

SEGUNDO. Multiplicamos o numerador e o denominador por ese conxugado.

$$\frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5}$$

TERCEIRO. Simplificamos, se é posible, a expresión resultante.

$$\frac{4 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5} = -2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

Lembra



Conxugado dun binomio

O conxugado de $(a + b)$ é $(a - b)$, e reciprocamente, o conxugado de $(a - b)$ é $(a + b)$.

Por exemplo:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Conxugado} & \\ 3 + \sqrt{4} & \xrightarrow{\quad} & 3 - \sqrt{4} \\ & \text{Conxugado} & \\ 2\sqrt{3} - \sqrt{3} & \xrightarrow{\quad} & 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \end{array}$$

ACTIVIDADES

34 Racionaliza as seguintes expresións.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}}$

c) $\frac{2 + \sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}}$

36 Racionaliza e opera.

a) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

b) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 7}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{9 - \sqrt{5}}$

35 Racionaliza e opera.

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{-7}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{4\sqrt{7}}$

37 Racionaliza estas expresións.

a) $\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$

b) $\frac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

11 Logaritmos

Decátate



Pódese considerar que o logaritmo é a operación inversa da exponencial.

$$c \xrightleftharpoons[\log_a b]{a^c} b$$

Dados dous números reais positivos a e b ($a \neq 1$), o **logaritmo en base a de b** é o expoñente ao que hai que elevar a para que o resultado sexa b .

$$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$$

Cando os logaritmos son en base 10 chámanse **logaritmos decimais**, e non se escribe a base.

$$\log 100 = 2 \quad \text{porque } 10^2 = 100$$

$$\log 1.000 = 3 \quad \text{porque } 10^3 = 1.000$$

$$\log 0,1 = -1 \quad \text{porque } 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\log 0,01 = -2 \quad \text{porque } 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Se a base é o número $e = 2,7182\dots$, chámanse **logaritmos neperianos** ou **logaritmos naturais**, e escríbese $\ln b$.

Calculadora



A calculadora científica permítenos obter logaritmos decimais coa tecla **log** e logaritmos neperianos ou naturais coa tecla **ln**.

Exemplo

15 Calcula estes logaritmos.

- a) $\log_2 16$ b) $\log 0,001$ c) $\ln e^3$ d) $\log_5 0,0016$

a) Se $\log_2 16 = x \rightarrow 2^x = 16$

Expresamos 16 como potencia de 2:

$$16 = 2^4 \rightarrow 2^x = 2^4 \rightarrow x = 4$$

$$\log_2 16 = 4$$

b) Se $\log 0,001 = x \rightarrow 10^x = 0,001$

Expresamos 0,001 como potencia de 10:

$$0,001 = \frac{1}{1.000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \rightarrow 10^x = 10^{-3} \rightarrow x = -3$$

$$\log 0,001 = -3$$

c) Se $\ln e^3 = x \rightarrow e^x = e^3 \rightarrow x = 3$

$$\ln e^3 = 3$$

d) Se $\log_5 0,0016 = x \rightarrow 5^x = 0,0016$

Expresamos 0,0016 como potencia de 5:

$$0,0016 = \frac{16}{10.000} = \frac{16}{10^4} = \frac{2^4}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{2^4}{2^4 \cdot 5^4} = 5^{-4} \rightarrow 5^x = 5^{-4} \rightarrow x = -4$$

$$\log_5 0,0016 = -4$$

ACTIVIDADES

38 Calcula, mediante a definición, estes logaritmos.

- | | |
|------------------|------------------|
| a) $\log_2 8$ | e) $\ln e^{33}$ |
| b) $\log_3 81$ | f) $\ln e^{-4}$ |
| c) $\log 1.000$ | g) $\log_4 16$ |
| d) $\log 0,0001$ | h) $\log_4 0,25$ |

39 Calcula, mediante a definición, os seguintes logaritmos.

- | | |
|---------------------|--------------------|
| a) $\log_3 243$ | e) $\ln e^2$ |
| b) $\log_9 81$ | f) $\ln e^{-14}$ |
| c) $\log 1.000.000$ | g) $\log_7 343$ |
| d) $\log 0,00001$ | h) $\log_4 0,0625$ |

Propiedades dos logaritmos

- O logaritmo de 1 é sempre 0, e o logaritmo da base é 1.
 $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$
- O **logaritmo dun produto** é a suma dos logaritmos dos factores.
 $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- O **logaritmo dun cociente** é o logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador.

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

- O **logaritmo dunha potencia** é igual ao expoñente multiplicado polo logaritmo da base da potencia

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

- **Cambio de base** nos logaritmos.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos

- 16** Resolve estas operacións con logaritmos.

a) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\log 0,1 + \log 10 = \log (0,1 \cdot 10) = \log 1 = 0$

c) $\log_4 32 = \log_4 (4^2 \cdot 2) = \log_4 4^2 + \log_4 2 = 2 \cdot \log_4 4 + \log_4 2 = 2 + \log_4 2 =$
 $= 2 + \log_4 \sqrt{4} = 2 + \log_4 4^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

- 17** Calcula, con axuda da calculadora, estes logaritmos.

a) $\log 732$

b) $\log e$

c) $\log_3 2$

a) $732 \text{ (log) (=) } 2,8645\dots$

b) $1 \text{ (SHIFT) (e^x) (log) (=) } 0,43429\dots$

c) $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3010\dots}{0,4771\dots} = 0,6309\dots$

ACTIVIDADES

- 40** Calcula os logaritmos e deixa indicado o resultado.

a) $\log_4 32$

d) $\log_5 32$

b) $\log_2 32$

e) $\log_{32} 4$

c) $\log_3 100$

f) $\log_2 304$

- 41** Sabendo que $\log 2 = 0,3010$; $\log 3 = 0,4771$ e $\log 7 = 0,8451$, determina os logaritmos decimais dos 10 primeiros números naturais. Con estes datos, saberías calcular $\log 3,5$? E $\log 1,5$?

- 42** Calcula, sen axuda da calculadora, $\log_2 5$ e $\log_5 2$. Comproba que o seu produto é 1.

- 43** Obtén o valor de x nas seguintes igualdades.

a) $\log_x 256 = -8$

c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$

b) $\log_3 x = \frac{2}{3}$

d) $\log_x 3 = 2$

- 44** Calcula canto vale $\log_a b \cdot \log_b a$.

Números racionais

1. COMO SE REALIZAN OPERACIÓNS COMBINADAS CON POTENCIAS

18 Realiza as operacións.

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Comézasase coas operacións que están dentro das parénteses.

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2} &= \\ = \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} &= \end{aligned}$$

SEGUNDO. Continúase operando coas potencias.

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \frac{16}{49} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - 64$$

TERCEIRO. Efectúanse as operacións coas fraccións; primeiro realízanse as multiplicacións e as divisións na orde en que aparecen e, despois, as sumas e restas de esquerda a dereita.

$$\frac{16}{49} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - 64 = \frac{-80}{147} - 64$$

m.c.m. (147, 9) = 441

$$\frac{-80}{147} - 64 = \frac{-80 - 9.408}{147} = \frac{-9.488}{147}$$

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2} = \frac{-9.488}{147}$$

2. COMO SE OPERA CON NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS

19 Efectúa $12,\widehat{6} + 7,\widehat{3}$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Exprésanse os números decimais en forma de fracción.

$$12,\widehat{6} = \frac{126 - 12}{9} = \frac{114}{9} = \frac{38}{3}$$

$$7,\widehat{3} = \frac{73 - 7}{9} = \frac{66}{9} = \frac{22}{3}$$

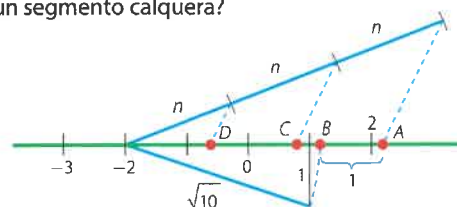
SEGUNDO. Realízanse as operacións indicadas.

$$12,\widehat{6} + 7,\widehat{3} = \frac{38}{3} + \frac{22}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

Números reais

1. COMO SE DETERMINA O VALOR DUN NÚMERO REPRESENTADO SOBRE A RECTA REAL

20 Que números representan A, B, C e D se n é un segmento calquera?



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Se o punto vén determinado pola hipotenusa dun triángulo rectángulo, calcúlase a lonxitude dos seus catetos e aplícase o teorema de Pitágoras.

$$1^2 + 3^2 = h^2 \rightarrow h = \sqrt{10}$$

O punto B é $-2 + \sqrt{10}$.

Por tanto, $A = B + 1 = -1 + \sqrt{10}$.

SEGUNDO. Se o punto vén determinado por rectas paralelas que dividen a un segmento en tres partes iguais, os segmentos que se forman sobre a recta real tamén son iguais.

Os segmentos $-2D$, DC e CA son iguais (teorema de Tales). Estes segmentos dividen en tres partes iguais a distancia entre -2 e A : $1 + \sqrt{10}$

$$D = -2 + \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \text{ e } C = -2 + 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$

2. COMO SE APROXIMAN NÚMEROS CON FRACCIÓNS

21 Obtén unha aproximación de π con 4 cifras decimais exactas, mediante un número racional en que o denominador sexa 784.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Exprésase o número pedido como fracción e acótase mediante as aproximacións.

Pídese un número $x = \frac{n}{784}$, tal que $n \in \mathbb{N}$.

Como $\pi = 3,141592\dots$, o número x cumpre:

$$3,1415 < x < 3,1416 \quad 3,1415 < \frac{n}{784} < 3,1416$$

SEGUNDO. Resólvese a inecuación.

Multiplicando por 784 obtense:

$$2.462,936 < n < 2.463,0144$$

$$n = 2.463 \text{ e } x = \frac{2.463}{784} = 3,141581\dots$$

Intervalos

1. COMO SE CALCULAN INTERVALOS ENCAIXADOS QUE CONTEÑAN A UN NÚMERO

22 Escribe os 5 primeiros intervalos encaixados onde se calcula $\sqrt{20}$, e indica o erro que cometes en cada un.

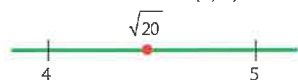
SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculase, coa calculadora, a expresión decimal do número.

$$\sqrt{20} = 4,4721359\dots$$

SEGUNDO. Os extremos de cada intervalo son as aproximacións por defecto e por exceso do número decimal.

$$4 < \sqrt{20} < 5 \longrightarrow (4, 5)$$



$$4,4 < \sqrt{20} < 4,5 \longrightarrow (4,4; 4,5)$$



$$4,47 < \sqrt{20} < 4,48 \longrightarrow (4,47; 4,48)$$



$$4,472 < \sqrt{20} < 4,473 \longrightarrow (4,472; 4,473)$$



$$4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722 \longrightarrow (4,4721; 4,4722)$$



TERCEIRO. O erro máximo, tomando como aproximación un punto do intervalo, é menor ca a súa lonxitude.

$$(4, 5) \longrightarrow \text{Erro} < 5 - 4 = 1$$

$$(4,4; 4,5) \longrightarrow \text{Erro} < 4,5 - 4,4 = 0,1$$

$$(4,47; 4,48) \longrightarrow \text{Erro} < 4,48 - 4,47 = 0,01$$

$$(4,472; 4,473) \longrightarrow \text{Erro} < 4,473 - 4,472 = 0,001$$

$$(4,4721; 4,4722) \longrightarrow \text{Erro} < 4,4722 - 4,4721 = 0,0001$$

Realmente non se está calculando o erro ao tomar como aproximación calquera dos extremos, senón a cota de erro cometido.

A cota de erro cometido é da orde da aproximación, é dicir:

- Se os extremos do intervalo son aproximacións ás décimas, a cota de erro é unha décima.
- Se son aproximacións ás centésimas, a cota é unha centésima, e así sucesivamente.

Notación científica

1. COMO SE SUMAN E RESTAN NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

23 Calcula.

$$9,76 \cdot 10^3 + 2,43 \cdot 10^2 - 3,1 \cdot 10^{-1}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Iguálense as ordes de magnitude dos sumandos. Para iso, elíxese o maior dos expoñentes, e multiplícase ou divídese por potencias de 10 o resto dos sumandos.

$$9,76 \cdot 10^3 = 9,76 \cdot 10^3$$

$$2,43 \cdot 10^2 = 0,243 \cdot 10^3$$

$$3,1 \cdot 10^{-1} = 0,00031 \cdot 10^3$$

$$9,76 \cdot 10^3 + 2,43 \cdot 10^2 - 3,1 \cdot 10^{-1} = 9,76 \cdot 10^3 + 0,243 \cdot 10^3 - 0,00031 \cdot 10^3$$

SEGUNDO. Súmanse ou réstanse as mantisas, e mantense a mesma orde de magnitude.

$$(9,76 + 0,243 - 0,00031) \cdot 10^3 = 10,00269 \cdot 10^3$$

TERCEIRO. Transfórmase o resultado en notación científica, se fixese falta.

$$10,00269 \cdot 10^3 = 1,000269 \cdot 10^4$$

Por tanto, resulta que:

$$9,76 \cdot 10^3 + 2,43 \cdot 10^2 - 3,1 \cdot 10^{-1} = 1,000269 \cdot 10^4$$

2. COMO SE MULTIPLICAN E DIVIDEN NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

24 Resolve esta operación e expresa o resultado en notación científica.

$$(2,1 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2 \cdot 10^4) : (8 \cdot 10^3)$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Agrúpanse as operacións coas mantisas e faise o mesmo coas potencias de 10.

$$(2,1 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2 \cdot 10^4) : (8 \cdot 10^3) = (2,1 \cdot 3,2 : 8) \cdot (10^{-2} \cdot 10^4 : 10^3)$$

SEGUNDO. Realízanse as operacións indicadas en cada unha das parénteses.

$$(2,1 \cdot 3,2 : 8) \cdot (10^{-2} \cdot 10^4 : 10^3) = (6,72 : 8) \cdot 10^{-2+4-3} = 0,84 \cdot 10^{-1}$$

TERCEIRO. Transfórmase o resultado en notación científica, se fixese falta.

$$0,84 \cdot 10^{-1} = 8,4 \cdot 10^{-2}$$

Polo tanto, resulta que o resultado da operación en notación científica é:

$$(2,1 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2 \cdot 10^4) : (8 \cdot 10^3) = 8,4 \cdot 10^{-2}$$

Radicais

1. COMO SE EXPRESAN CERTAS EXPRESIÓNS MEDIANTE UN SÓ RADICAL

Opera con estas expresións ata convertelas nun só radical.

a) $3^{-\frac{2}{5}}$

b) $\sqrt[3]{4\sqrt{23}}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Escríbese a expresión como unha potencia de expoñente fraccionario, de modo que o expoñente teña signo positivo.

a) $3^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{5}}}$

b) $\sqrt[3]{4\sqrt{23}} = (\sqrt[3]{23})^{\frac{1}{3}} = ((23)^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = 23^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = 23^{\frac{1}{12}}$

SEGUNDO. Exprésase a potencia de expoñente fraccionario como un radical.

a) $\frac{1}{3^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{3}$
Racionalizando

b) $23^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{23}$

2. COMO SE INTRODUCEN FACTORES NUN RADICAL

Introduce dentro do signo radical todos os factores destas expresións.

a) $6ab\sqrt{3}$

b) $2a\sqrt[3]{2ab^2}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Introdúcese cada un dos factores que están fóra da raíz, dentro da raíz co índice da raíz como expoñente.

a) $6ab\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot 3}$

b) $2a\sqrt[3]{2ab^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 \cdot 2 \cdot a \cdot b^2}$

SEGUNDO. Simplifícase a expresión resultante, se se pode.

a) $\sqrt{6^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot 3} = \sqrt{108a^2b^2}$

b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 \cdot 2 \cdot a \cdot b^2} = \sqrt[3]{2^4 \cdot a^4 \cdot b^2} = \sqrt[3]{16a^4b^2}$

Racionalización

1. COMO SE RACIONALIZAN FRACCIÓNS CUN PRODUTO DE RADICAIS NO DENOMINADOR

Racionaliza esta expresión: $\frac{2}{\sqrt[3]{2} \cdot (2 - \sqrt{3})}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Multiplícanse o numerador e o denominador polas expresións necesarias para eliminar as raíces.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2} \cdot (2 - \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{\sqrt[3]{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{2 \cdot (2^2 - 3)} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{2 \cdot 1}$$

SEGUNDO. Simplifícase, se é posible, e resólvense as operacións.

$$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{2 \cdot 1} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{2} = \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3}) = 2^{\frac{2}{3}} \cdot (2 + 3^{\frac{1}{2}}) = 2^{\frac{2}{3} + 1} + 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{3}} + 2^{\frac{4}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[3]{2^5} + \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{32} + \sqrt[6]{432}$$

2. COMO SE RESOLVEN OPERACIÓNS ENTRE FRACCIÓNS CON RADICAIS

Resolve $\frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Racionalízase cada unha das fraccións con radicais no denominador.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{5-2} = \frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

SEGUNDO. Opérase coas fraccións racionalizadas.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{5}+1-2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2}$$

Logaritmos

1. COMO SE RESOLVEN AS EXPRESIÓNS DO TIPO $\log_a x = c$

29 Calcula o valor de x nestes logaritmos para que as igualdades sexan certas.

a) $\log_5 x = 4$ b) $\log(x-1) = 2$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícase a definición de logaritmo.

$$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$$

a) $\log_5 x = 4 \rightarrow 5^4 = x$

b) $\log(x-1) = 2 \rightarrow 10^2 = x-1$

SEGUNDO. Resólvese a ecuación resultante.

a) $x = 5^4 = 625$

b) $x-1 = 10^2 \rightarrow x = 100 + 1 = 101$

TERCEIRO. Compróbase o resultado.

a) $\log_5 x = 4 \xrightarrow{x=625} \log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$
O resultado é correcto.

b) $\log(x-1) = 2 \xrightarrow{x=101} \rightarrow \log(101-1) = \log 100 = 2$
O resultado é correcto.

2. COMO SE RESOLVEN AS EXPRESIÓNS DO TIPO $\log_x b = c$

30 Calcula o valor de x nestes logaritmos para que se cumpran as igualdades.

a) $\log_x 32 = 5$ b) $\log_x 0,1 = -1$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícase a definición de logaritmo.

$$\log_a b = c \rightarrow a^c = b$$

a) $\log_x 32 = 5 \rightarrow x^5 = 32$

b) $\log_x 0,1 = -1 \rightarrow x^{-1} = 0,1$

SEGUNDO. Despéxase x .

a) $x^5 = 32 \rightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$

b) $x^{-1} = 0,1 \rightarrow \frac{1}{x} = 0,1 \rightarrow 1 = 0,1 \cdot x$
 $\rightarrow x = 1 : 0,1 = 10$

TERCEIRO. Compróbase o resultado.

a) $\log_x 32 = 5 \xrightarrow{x=2} \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$
O resultado é correcto.

b) $\log_x 0,1 = -1 \xrightarrow{x=10} \rightarrow \log 0,1 = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$
O resultado é correcto.

3. COMO SE RESOLVEN AS EXPRESIÓNS DO TIPO $\log_a b^x = c$

31 Determina o valor de x .

a) $\log_2 4^x = 6$

b) $\log 10^{x-1} = 2$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícase a propiedade dos logaritmos.

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

a) $\log_2 4^x = 6 \rightarrow x \cdot \log_2 4 = 6$

b) $\log 10^{x-1} = 2 \rightarrow (x-1) \cdot \log 10 = 2$

SEGUNDO. Resólvese a ecuación resultante.

a) $x \cdot \log_2 4 = 6 \rightarrow x \cdot 2 = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

b) $(x-1) \cdot \log 10 = 2 \rightarrow (x-1) \cdot 1 = 2$
 $\rightarrow x = 2 + 1 = 3$

TERCEIRO. Compróbase o resultado.

a) $\log_2 4^x = 6 \xrightarrow{x=3} \log_2 4^3 = \log_2 (2^2)^3 = \log_2 2^6 = 6$

O resultado é correcto.

b) $\log 10^{x-1} = 2 \xrightarrow{x=3} \log 10^{3-1} = \log 10^2 = 2$
O resultado é correcto.

4. COMO SE RESOLVEN AS EXPRESIÓNS DO TIPO $a^x = b$

32 Calcula o valor de x .

a) $4^x = 1.024$

b) $3^{x-1} = 27$

SOLUCIÓN:

PRIMEIRO. Tómanse logaritmos en que a base é a base da potencia, en ambos os membros da igualdade.

a) $4^x = 1.024 \rightarrow \log_4 4^x = \log_4 1.024$

b) $3^{x-1} = 27 \rightarrow \log_3 3^{x-1} = \log_3 27$

SEGUNDO. Aplícase a propiedade: $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

a) $\log_4 4^x = \log_4 1.024 \rightarrow x \cdot \log_4 4 = \log_4 1.024$

b) $\log_3 3^{x-1} = \log_3 27 \rightarrow (x-1) \cdot \log_3 3 = \log_3 27$

TERCEIRO. Cálculanse os logaritmos e despéxase x .

a) $x \cdot \log_4 4 = \log_4 1.024 \rightarrow x \cdot 1 = 5 \rightarrow x = 5$

b) $(x-1) \cdot \log_3 3 = \log_3 27 \rightarrow (x-1) = 3$
 $\rightarrow x = 4$

CUARTO. Compróbase o resultado.

a) $4^x = 1.024 \xrightarrow{x=5} 4^5 = 1.024$
O resultado é correcto.

b) $3^{x-1} = 27 \xrightarrow{x=4} 3^{4-1} = 3^3 = 27$
O resultado é correcto.

Números racionais e irracionais

45 Calcula a fracción irreductible de:

•••

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| a) $\frac{5}{200}$ | e) $\frac{12}{400}$ |
| b) $\frac{-1.080}{432}$ | f) $\frac{72}{243}$ |
| c) $\frac{26}{130}$ | g) $\frac{88}{176}$ |
| d) $\frac{-702}{1.053}$ | h) $\frac{104}{216}$ |

46 Indica cales das seguintes fraccións son irreductibles.

•••

$$\frac{3}{15} \quad \frac{15}{18} \quad \frac{10}{13} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{18}{7} \quad \frac{15}{12} \quad \frac{2}{8}$$

47 Cantos números racionais hai no seguinte grupo?

•••

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{-1}{5} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{-4}{20} \quad \frac{4}{24} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{25}{100} \quad \frac{150}{200}$$

48 Calcula x para que as fraccións sexan equivalentes.

•••

$$\text{a) } \frac{3}{5} = \frac{6}{x} = \frac{9}{x} = \frac{21}{x} \quad \text{b) } \frac{-5}{2} = \frac{x}{8} = \frac{10}{x} = \frac{25}{x}$$

49 Podes escribir unha fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ en que o denominador sexa 10? Por que?

•••

50 Realiza estas operacións.

•••

$$\text{a) } \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{b) } \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

51 Cales dos seguintes números son racionais e cales non? Razona a resposta.

•••

- | | |
|-------------|---------------------|
| a) 2,555... | c) 2,5255555... |
| b) 2,525 | d) 2,52552255222... |

52 Indica o tipo de decimal, en cada caso, e calcula se é posible a súa fracción xeratriz.

•••

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------|
| a) 15,3222... | c) 15,32 | e) 15,333 |
| b) 15,233444... | d) 15,323232... | f) 15 |

53 Calcula a fracción xeratriz dos seguintes números decimais.

•••

- | | | |
|----------------------|------------------------|------------------------|
| a) 0,2 | d) 8,0002 | g) 0,01 |
| b) $3,\overline{5}$ | e) $42,\overline{78}$ | h) $5,\overline{902}$ |
| c) $2,3\overline{7}$ | f) $10,5\overline{23}$ | i) $0,01\overline{57}$ |

54 Efectúa, utilizando as fraccións xeratrizes.

•••

- | | |
|--|---|
| a) $1,\overline{3} + 3,4$ | d) $4,\overline{5} + 6,\overline{7}$ |
| b) $10,2\overline{5} - 5,\overline{7}$ | e) $3,4\overline{6} + 4,2\overline{95}$ |
| c) $1,3\overline{6} + 8,2\overline{5}$ | f) $3,2\overline{1} + 4,3\overline{12}$ |

55 Realiza as seguintes operacións.

•••

- | | |
|--|---|
| a) $1,25 \cdot 2,\overline{5}$ | c) $3,7\overline{6} \cdot 4,\overline{8}$ |
| b) $0,0\overline{3} : 2,9\overline{2}$ | d) $1,25 : 2,2\overline{5}$ |

56 Utilizando as fraccións xeratrizes, comproba se son verdadeiras ou falsas as igualdades.

•••

- | | |
|--|--|
| a) $1,\overline{9} = 2$ | c) $1,8\overline{9} + 0,1\overline{1} = 2$ |
| b) $1,\overline{3} : 3 = 0,\overline{4}$ | d) $0,\overline{3} + 0,\overline{6} = 1$ |

57 Escribe a expresión decimal de tres números racionais e outros tres irracionais. Explica como o realizas.

•••

58 Ordena os seguintes números decimais, de menor a maior.

•••

$$2,999 \quad 2,95 \quad 2,955 \quad 2,59 \quad 2,599 \quad 2,559$$

59 Ordena estes números decimais, de menor a maior.

•••

- | | | | | |
|-----------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| a) $2,9\overline{95}$ | $2,\overline{9}$ | $2,9\overline{5}$ | $2,95\overline{9}$ | $2,9\overline{5}$ |
| b) $4,75$ | $4,\overline{75}$ | $4,7\overline{5}$ | $4,775$ | $4,75\overline{7}$ |

60 Dá un número racional e outro irracional comprendidos entre:

•••

- | | | |
|--|----------------------------|--|
| a) 3,4 e $3,400\overline{23}$ | c) 1 e 2 | e) $-2,6\overline{8}$ e $-2,\overline{68}$ |
| b) $2,5\overline{2}$ e $2,\overline{52}$ | d) 5,6 e $5,\overline{68}$ | f) 0,2 e $0,25$ |

61 É certo que $3,\overline{2} = 3,222$? Se non o é, escribe dous números, un racional e outro irracional, situados entre eles.

•••

62 Clasifica en racionais e irracionais as raíces cadradas dos números naturais menores ca 20.

•••

63 Indica cales dos seguintes números son racionais e cales son irracionais.

•••

$$\frac{\sqrt{4}}{2} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \frac{\sqrt{9}}{3} \quad \frac{\sqrt{16}}{5} \quad \frac{\sqrt{36}}{3}$$

64 Deduce cales destes números son racionais e cales son irracionais.

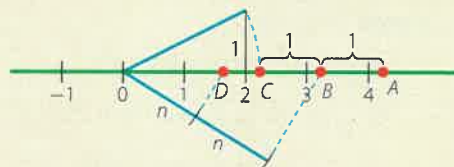
•••

$$1 + \sqrt{2} \quad 3 + \sqrt{4} \quad 5 - \sqrt{9} \quad 8 + \sqrt{10} \quad 3\sqrt{16} \quad 5\sqrt{49}$$

Números reais

65 Que números representan sobre esta recta numérica os puntos A, B, C e D, onde n é un segmento calquera?

•••



66 Representa na recta real.

•••

- | | | | |
|---------------|----------------|---------------|----------------|
| a) $\sqrt{2}$ | c) $\sqrt{10}$ | e) $\sqrt{3}$ | g) $\sqrt{14}$ |
| b) $\sqrt{5}$ | d) $\sqrt{18}$ | f) $\sqrt{7}$ | h) $\sqrt{30}$ |

67 Ordena e representa, de forma exacta ou aproximada, os seguintes números reais.

•••

$$1,65 \quad \sqrt{3} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad 1 + \sqrt{2} \quad 1,65\overline{7}$$

68 Representa estes números na recta real.

•••

$$\sqrt{5} \quad 1+\sqrt{2} \quad 2+\sqrt{2} \quad 1+\sqrt{5} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{5}}{3}$$

69 Ordena e representa os seguintes números.

•••

$$-\frac{3}{2} \quad 0,5 \quad \sqrt{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2$$

70 Opera e classifica o tipo de número real.

•••

a) $\sqrt{2,7}$ b) $\sqrt{4,9}$ c) $\sqrt{\frac{1,3}{3}}$

Intervalos

71 Describ e representa os seguintes intervalos.

•••

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $(0, 10)$ | e) $[5, 10)$ |
| b) $(3, 7]$ | f) $[-4, +\infty)$ |
| c) $(-\infty, -2]$ | g) $(-\infty, 6]$ |
| d) $[2, 5]$ | h) $(100, +\infty)$ |

72 Escribe o intervalo que corresponde a estas desigualdades.

•••

- | | |
|-------------------|------------------------|
| a) $1 < x < 3$ | c) $5 \leq x < 9$ |
| b) $6 < x \leq 7$ | d) $10 \leq x \leq 12$ |

73 Escribe o intervalo que corresponde a:

•••

- | | | |
|----------------|---------------|----------------|
| a) $x \leq -2$ | c) $x > -3$ | e) $x < -9$ |
| b) $x < 5$ | d) $x \geq 7$ | f) $x \geq -6$ |

74 Representa, mediante intervalos, os números:

•••

- Maiores ou iguais ca 5.
- Menores ou iguais ca -8.
- Maiores ca -2.
- Maiores ca 2 e menores ca 4.
- Maiores ca -5 e menores ca -2.
- Comprendidos entre 0 e 10, incluídos estes.

75 Representa $(-\infty, 8)$ e $[2, +\infty)$ na mesma recta, e sinala mediante un intervalo os puntos que están en ambos.

•••

76 Representa os intervalos $(0, 5)$ e $(-2, 3)$ na mesma recta, e sinala o intervalo intersección.

•••

77 Escribe dous intervalos cuxa intersección sexa o intervalo $[-1, 1]$.

•••

Aproximación e erros

78 Opera e redondea o resultado ás décimas.

•••

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $3,253 + 8,45$ | e) $13,5 \cdot 2,7$ |
| b) $52,32 - 18,93$ | f) $40,92 : 5,3$ |
| c) $4,72 + 153,879$ | g) $62,3 - 24,95$ |
| d) $7,8 \cdot 12,9$ | h) $100,45 : 8,3$ |

79 Calcula a aproximación por redondeo ata as dez milésimas para cada caso.

•••

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ | c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ |
| b) $\frac{6}{7} + \sqrt{7}$ | d) $\frac{4}{15} + \sqrt{8}$ |

80 Que erro absoluto cometemos ao aproximar o resultado de $45,96 + 203,7 + 0,823$ polo número 250,49?

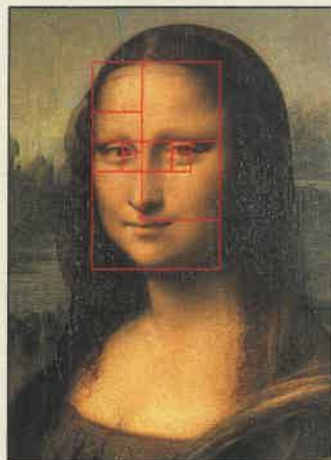
•••

81 Se aproximamos 10,469 por 10,5, que erro absoluto se comete? E se o aproximamos por 10,4? Cal é a mellor aproximación? Razóao.

82 Desde a antigüidade aparece con frecuencia o número de ouro, Φ , en proporcións da natureza, así como nas medidas de construcións, ou en obras de arte como *La Gioconda*.

•••

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$$



- Escribe a aproximación por redondeo ata as centésimas do número de ouro.
- Podes calcular os erros absoluto e relativo?

83 Un truncamento de 8,56792 é 8,56. Calcula o erro absoluto e o erro relativo.

•••

84 Aproxima o número $\frac{1}{7}$ para que o erro sexa menor ca unha centésima.

•••

85 Aproxima o número 12,3456 de forma que o erro absoluto sexa menor ca 0,001.

•••

86 Escribe os 5 primeiros intervalos encaixados dentro dos cales se atopa $\sqrt{32}$, e indica que erro máximo cometes en cada un.

•••

87 Pódese escribir $\pi = \frac{355}{113}$? Xustifica a resposta e di cal é a orde de erro cometido.

•••

88 Para que número sería 5.432,723 unha aproximación ás milésimas por defecto? E a resposta única? Cantas respostas hai?

Notación científica

89 Indica cales dos números están escritos en notación científica.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $54 \cdot 10^{12}$ | e) $7,2 \cdot 10^{-2}$ |
| b) $0,75 \cdot 10^{-11}$ | f) $0,5 \cdot 10^{14}$ |
| c) 243.000.000 | g) $0,01 \cdot 10^{-30}$ |
| d) 0,00001 | h) $18,32 \cdot 10^4$ |

90 Escribe en notación científica os seguintes números, e indica a súa mantisa e a súa orde de magnitude.

- | | |
|-------------------|------------------|
| a) 15.000.000.000 | e) 4.598.000.000 |
| b) 0,00000051 | f) 0,0967254 |
| c) 31.940.000 | g) 329.000.000 |
| d) 0,0000000009 | h) 111.000 |

91 Desenvolve estes números escritos en notación científica.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $4,8 \cdot 10^8$ | c) $6,23 \cdot 10^{-18}$ |
| b) $8,32 \cdot 10^{-11}$ | d) $3,5 \cdot 10^{-12}$ |

92 Realiza as operacións.

- $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
- $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
- $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
- $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
- $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$

93 Calcula o resultado destas operacións.

- $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4$
- $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2$
- $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6}$
- $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2$
- $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

94 Efectúa as seguintes operacións.

- $7,3 \cdot 10^4 \cdot 5,25 \cdot 10^{-3}$
- $8,91 \cdot 10^{-5} \cdot 5,7 \cdot 10^{14}$
- $8,3 \cdot 10^6 : 5,37 \cdot 10^2$
- $9,5 \cdot 10^{-6} : 3,2 \cdot 10^3$

95 Simplifica o resultado destas operacións.

- $\frac{6,147 \cdot 10^{-2} \cdot 4,6 \cdot 10^3}{7,9 \cdot 10^8 \cdot 6,57 \cdot 10^{-5}}$
- $\frac{3,92 \cdot 10^4 \cdot 5,86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9,2 \cdot 10^{13}}$

Radicais

96 Calcula o valor numérico destes radicais.

- | | |
|-------------------------|---------------------|
| a) $\sqrt[4]{81}$ | d) $\sqrt[3]{-216}$ |
| b) $\sqrt[3]{-27}$ | e) $\sqrt[4]{625}$ |
| c) $\sqrt[5]{-100.000}$ | f) $\sqrt{-128}$ |

97 Indica os radicais equivalentes.

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|---------------------|
| $\sqrt[4]{2^3}$ | $\sqrt[5]{3^2}$ | $\sqrt[3]{7^2}$ | $\sqrt[8]{2^6}$ |
| $\sqrt[12]{7^8}$ | $\sqrt[10]{3^4}$ | $\sqrt[12]{2^9}$ | $\sqrt[20]{2^{15}}$ |

98 Simplifica os seguintes radicais.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| a) $\sqrt[3]{16}$ | e) $\sqrt{75}$ |
| b) $\sqrt[3]{54}$ | f) $\sqrt[5]{128}$ |
| c) $\sqrt[4]{32}$ | g) $\sqrt[6]{27}$ |
| d) $\sqrt{27}$ | h) $\sqrt[8]{625}$ |

99 Escribe como potencias de expoñente fraccionario estes radicais.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------|
| a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ | e) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ |
| b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ | f) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$ |
| c) $\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$ | g) $(\sqrt{a})^3$ |
| d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$ | h) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$ |

100 Expresa mediante un só radical.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| a) $\sqrt[3]{3\sqrt{5}}$ | d) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ |
| b) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3/2}}$ | e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$ |
| c) $\sqrt{\sqrt{3}}$ | f) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$ |

101 Extrae os factores que poidas da raíz.

- | | |
|----------------|----------------------|
| a) $\sqrt{8}$ | e) $\sqrt{12}$ |
| b) $\sqrt{18}$ | f) $\sqrt{75}$ |
| c) $\sqrt{50}$ | g) $\sqrt[3]{1.000}$ |
| d) $\sqrt{98}$ | h) $\sqrt[3]{40}$ |

102 Extrae factores dos radicais.

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| a) $\sqrt[3]{8a^5}$ | d) $\sqrt[4]{a^6b^5c^9}$ |
| b) $\sqrt[4]{16a^7}$ | e) $\sqrt[5]{a^6b^{10}}$ |
| c) $\sqrt{2^6a^4b^8}$ | f) $\sqrt[3]{15.625x^4y^3}$ |

103 Simplifica as seguintes expresións.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a) $\sqrt[3]{\frac{a^{12}}{a^{18}}}$ | d) $\frac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}}$ |
| b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}}$ | e) $\sqrt[6]{729a^7b^{-12}}$ |
| c) $\sqrt[3]{\frac{8a^4}{81b^3}}$ | f) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$ |

104 Introduce os factores baixo o radical.

•••

- a) $2\sqrt[3]{5}$ f) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$
 b) $4\sqrt[4]{20}$ g) $2\sqrt[3]{7}$
 c) $3\sqrt[5]{15}$ h) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$
 d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ i) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$
 e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ j) $\frac{1}{7}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

105 Introduce os factores dentro do radical, se é posible.

•••

- a) $a \cdot \sqrt{\frac{4a-1}{2a}}$ d) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$
 b) $\frac{4ab}{c} \cdot \sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}$ e) $5 + \sqrt{2}$
 c) $\frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ f) $-a^2\sqrt[3]{a}$

106 Opera e simplifica.

•••

- a) $(3\sqrt{2} - 5) \cdot (4\sqrt{2} - 3)$
 b) $(2\sqrt{7} + 3\sqrt{2}) \cdot (5 - 2\sqrt{2})$
 c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$
 d) $(5\sqrt{2} - 3) \cdot (5\sqrt{2} + 3)$
 e) $(7\sqrt{5} + 4) \cdot (5\sqrt{5} - 3\sqrt{6})$
 f) $(7\sqrt{2} - 3) \cdot (5\sqrt{3} + 2)$
 g) $(6\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot (6\sqrt{7} - \sqrt{5})$
 h) $(2\sqrt{5} - \sqrt{10}) \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{10})$

107 Calcula.

•••

- a) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^4}$
 b) $\sqrt[3]{3a^2b} \cdot \sqrt{2ab^3}$
 c) $\sqrt[5]{2a^3b^4} : \sqrt[3]{4ab^2}$
 d) $\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt{a\sqrt[3]{b}}$



108 Efectúa e simplifica.

•••

- a) $(2 + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})$
 b) $(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) + (2 - 4\sqrt{5}) \cdot (2 + 4\sqrt{5})$
 c) $(\sqrt{3} + \sqrt{5} - 4\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5} + 4\sqrt{7})$

109 Calcula o resultado.

•••

- a) $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$
 b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3} - 1} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3} + 1}$
 c) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

110 Efectúa e simplifica.

•••

- a) $\frac{\sqrt[4]{2^3} \cdot 2^{-4} \cdot \sqrt[3]{2}}{2^2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-\frac{5}{2}}}$ c) $(\sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt[4]{81}}})^{-\frac{1}{2}}$
 b) $\left(81^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right) : \sqrt{3}$ d) $\left(\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}\right)^{-2}$

111 Expresa o resultado como potencia.

•••

- a) $(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})^6$ c) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}}$
 b) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}$ d) $\sqrt[3]{8\sqrt[5]{81}}$

Racionalización

112 Racionaliza e simplifica.

•••

- a) $\frac{6\sqrt{6} - 6}{\sqrt{6}}$ f) $\frac{7 + \sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$
 b) $\frac{-5}{2\sqrt{5}}$ g) $\frac{6\sqrt{6} - 6}{\sqrt[3]{6}}$
 c) $\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ h) $\frac{9}{5\sqrt[4]{5^5}}$
 d) $\frac{5\sqrt{3} - 4}{\sqrt[5]{-3^2}}$ i) $\frac{5\sqrt{3} - 4}{\sqrt[3]{3^2}}$
 e) $\frac{-6}{2\sqrt[4]{7}}$ j) $\frac{7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3^5}}$

113 Elimina as raíces do denominador.

•••

- a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ d) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{5}}$
 b) $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ e) $\frac{7}{\sqrt{11} - 3}$
 c) $\frac{-5}{\sqrt{3} - 2}$ f) $\frac{-5}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$

114 Racionaliza as seguintes expresións.

•••

- a) $\frac{-1}{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}$ c) $\frac{8}{5 \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})}$
 b) $\frac{5}{3 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})}$ d) $\frac{-7}{9 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{3})}$

115 Racionaliza e simplifica o resultado.

•••

- a) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$ c) $\frac{5\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$
 b) $\frac{1}{1 - \sqrt{5} + \sqrt{7}}$ d) $\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

ACTIVIDADES

116 Racionaliza as seguintes expresións.

•••

a) $\frac{3}{(3\sqrt{2}-5) \cdot (4\sqrt{2}-3)}$

b) $\frac{-2}{\sqrt[3]{4} \cdot (5\sqrt{3}-1)}$

c) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt{125}+2)}$

d) $\frac{-4}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{2}}$

117 Realiza estas operacións.

•••

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

118 Efectúa as operacións.

•••

a) $\frac{1}{\sqrt{5}+5} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

Logaritmos

119 Calcula, mediante a definición, os logaritmos.

•••

a) $\log_3 243$

e) $\ln e^2$

b) $\log_9 81$

f) $\ln e^{-14}$

c) $\log 1.000.000$

g) $\log_7 343$

d) $\log 0,00001$

h) $\log_4 0,0625$

120 Sabendo que $\log_3 2 = 0,63$, calcula $\log_3 24$ mediante as propiedades dos logaritmos.

•••

121 Calcula $\log_4 128$, utilizando as propiedades dos logaritmos, e intenta dar un resultado exacto.

•••

122 Calcula o resultado das expresións, mediante as propiedades dos logaritmos.

•••

a) $2 \log_4 16 + \log_2 32 - 3 \log_7 49$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

123 Desenvolve as seguintes expresións.

•••

a) $\log_3 \frac{a^2 \cdot b^5 \cdot c}{d^2}$

c) $\log_{10} \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2} \cdot z^3}$

b) $\log_2 \frac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$

d) $\ln \frac{e^3 \cdot \sqrt[4]{a^6}}{1.000}$

124 Determina, utilizando a calculadora.

•••

a) $\log_5 36^2$

c) $\log_6 100$

b) $\log_2 \sqrt{31}$

d) $\log_4 31^5$

125 Se $\log e = 0,4343$; canto vale $\ln 10$? E $\ln 0,1$?

•••

126 Calcula o valor dos logaritmos decimais, tendo en conta que $\log 2 = 0,3010$.

•••

a) $\log 1.250$

d) $\log 0,04$

b) $\log 0,125$

e) $\log 1,6$

c) $\log 5$

f) $\log 0,2$

127 Calcula o valor de x.

•••

a) $\log_3 x = 5$

e) $\log_3 (x-2) = 5$

b) $\log_5 x = 3$

f) $\log_5 (x+2) = 3$

c) $\log_2 x = -1$

g) $\log_2 (2-x) = -1$

d) $\log_{2/3} x = 4$

h) $\log_{2/3} (3+x) = 4$

128 Calcula canto vale x.

•••

a) $\log_x 3 = -1$

c) $\log_x 3 = -2$

b) $\log_x 5 = 2$

d) $\log_x 2 = 5$

129 Calcula o valor de x.

•••

a) $\log_3 9^x = 2$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$

f) $\log 2^{x/2} = \frac{3}{2}$

c) $\ln 3^x = -1$

g) $\ln 3^{x+6} = 3$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

130 Determina o valor de x.

•••

a) $8^x = 1.024$

e) $8^{x-2} = 1.024$

b) $3^{x^2} = 27$

f) $(3^x)^2 = 27$

c) $3^{x^2-6} = 27$

g) $3^{x^2} + 18 = 27$

d) $10^{x-1} = 10^3$

h) $2^{x^2-2x+1} = 1$

Problemas con números reais

131 Indica se son verdadeiras ou falsas as seguintes afirmacións. Razona a resposta.

•••

a) Todos os números decimais pódense escribir en forma de fracción.

b) Todos os números reais son racionais.

c) Calquera número irracional é real.

d) Hai números enteiros que son irracionais.

e) Existen números reais que son racionais.

f) Todo número decimal é racional.

g) Cada número irracional ten infinitas cifras decimais.

h) Todos os números racionais teñen infinitas cifras decimais que se repiten.

i) Todos os números racionais pódense escribir mediante fraccións.

132 Por que a raíz cadrada de calquera número terminado en 2 é un número irracional? Existe outro conxunto de números con esta característica?

•••

133 Escribe en notación científica as seguintes cantidades.

- ooo a) Distancia Terra-Lúa: 384.000 km
- b) Distancia Terra-Sol: 150.000.000 km
- c) Diámetro dun átomo: 0,0000000001 m
- d) Superficie da Terra: 500 millóns de km^2
- e) Lonxitude dun virus (gripe): 0,0000000022 m
- f) Peso dun estafilococo: 0,0000001 g
- g) Un ano luz: 9.500.000.000.000 km
- h) Distancia á galaxia máis afastada: 13.000 millóns de anos luz



134 Con axuda das propiedades dos números reais, proba que o produto de cero por calquera número real dá como resultado cero. En cada caso, indica a propiedade que estás utilizando.

135 Que tipo de decimal se obtén da fracción $\frac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, sendo a un número enteiro?

136 Existe algún caso en que a aproximación por exceso e por defecto coincidan?

E se consideramos o redondeo, pode coincidir coa aproximación por exceso ou por defecto?

137 Razoa como se racionalizan as fraccións do tipo:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$$

138 Racionaliza as seguintes expresións.

- a) $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$
- b) $\frac{2}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{4}}$
- c) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6} - 5\sqrt{5} - 6\sqrt{3}}$

139 Indica un procedemento xeral para racionalizar expresións do tipo:

$$\frac{1}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \dots + \sqrt{b_n}}$$

tendo en conta que $b_1, b_2, \dots, b_n$ son números reais.

140 Considera que A, B, C e D son catro vilas. A distancia medida entre A e B foi de 48 km, cun erro de 200 m, e a distancia entre C e D foi de 300 m, cun erro de 2,5 m. Que medida é mellor? Por que?



141 Comproba as seguintes igualdades.

- ooo a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n+m]{a \cdot b}$
- c) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
- d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$
- e) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{a \cdot b}$
- f) $a\sqrt{b+c} = \sqrt{ab+ac}$
- g) $\sqrt[4]{a^8b^2} = a\sqrt{b}$
- h) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

142 Escribe 2^{500} en notación científica.

- ooo a) Sabendo que $\log 2 = 0,3010$ e que $\sqrt{10} = 3,1622$.
- b) Poderías facelo cunha calculadora científica?
- c) Expresa 5^{500} en notación científica, tendo en conta o primeiro apartado.

143 As unidades de medida con que se mide a cantidade de información son:

Byte = 2^8 bits Megabyte = 2^{10} Quilobytes
Quilobyte = 2^{10} bytes Xigabyte = 2^{10} Megabytes



Expresa, en forma de potencia e en notación científica, as seguintes cantidades de información en bits e bytes.

- a) Disco duro de 120 Xb.
- b) Tarxeta de memoria de 512 Mb.
- c) Disquete de 1,44 Mb.
- d) CD-Rom de 550 Mb.

PARA FINALIZAR...

Reflexiona sobre a teoría

144 Se $\frac{a}{b}$ é unha fracción irredutible:

- Cando é $\frac{a+1}{b+1}$ equivalente a $\frac{a}{b}$?
- E cando é $\frac{a+b}{b+b}$ equivalente a $\frac{a}{b}$?

145 Se unha fracción $\frac{a}{b}$ é irredutible, son as fraccións $\frac{a+b}{a \cdot b}$ e $\frac{a-b}{a \cdot b}$ irredutibles?

IDEA CLAVE

Se $\frac{a+b}{a}$ é reducible $\rightarrow a$ e b teñen divisores comúns.

Os divisores de a máis b son os divisores comúns de a e b .

146 Demuestra a seguinte igualdade.

$$\sum_{k=1}^{99} \log \sqrt{\frac{1+k}{k}} = 1$$

147 Demuestra estas igualdades.

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

IDEA CLAVE

Como $\log_a b = p \rightarrow b = a^p$

$\log_a c = q \rightarrow c = a^q$

Entón, cúmprese que:

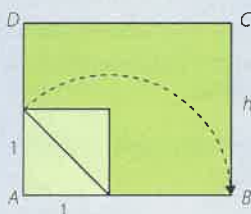
$$b \cdot c = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

148 Demuestra a seguinte igualdade.

$$\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$$

Pensa un pouco máis

149 Se a área desta figura é 10 cm², cal é a súa altura?



Análise do enunciado

O raio da circunferencia trazada sobre a base é a hipotenusa dun triángulo rectángulo de catetos 1 cm e 1 cm.

Deseño da resolución

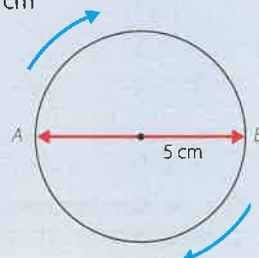
A base do triángulo multiplicada pola súa altura é igual a 10.

Clave para resolver o problema

A lonxitude da base mide 1 cm máis ca o raio da circunferencia.

150 Dúas pezas móbiles dunha máquina desprázanse á mesma velocidade. A primeira peza describe unha circunferencia de raio 5 cm e a segunda desprázase dun extremo ao outro do diámetro desa circunferencia.

Se ambas as pezas parten do mesmo punto, coincidirán nalgún momento?



Análise do enunciado

Se ambas as pezas parten de A, unha xirará arredor da circunferencia, mentres que a outra se moverá ao longo do diámetro. Se se encontran, farano nos puntos A ou B.

Deseño da resolución

Como ambas as pezas se moven á mesma velocidade, encontraranse se nalgún momento a distancia percorrida pola primeira peza coincide coa distancia que percorre a segunda.

Clave para resolver o problema

Recorda que o número π é irracional.