

Boletín 18. Producto escalar distancias y ángulos 2.

1. Halla el ángulo que forman la recta r , que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(0, 0, 0)$, y la recta $s: (x, y, z) = (-1, 2, 3) + \lambda(1, 2, -3)$.

2. Calcula el ángulo que forman la recta $r: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1)$ y el plano de ecuación $\pi: x + y - 3z + 2 = 0$.

3. Calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de planos.

- a) $\pi_1: 3x - 2y + z - 3 = 0$ $\pi_2: x - y - 25 = 0$
b) $\pi_1: x + y + z = 0$ $\pi_2: x + 2y + 3z - 2 = 0$
c) $\pi_1: 2y + 2z - 3 = 0$ $\pi_2: -y - z + 2 = 0$

4. Encuentra la proyección de los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(0, 2, 0)$ sobre la recta r .

a) $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ b) $r: \begin{cases} x+2z=3 \\ y-z=0 \end{cases}$

5. Calcula la proyección de los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(0, 2, 0)$ sobre el plano π , determinado por las rectas:

$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ $s: \begin{cases} x+2z=3 \\ y-2z=0 \end{cases}$

6. Calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π

$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$

$\pi: \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = 2 - \lambda + 3\mu \\ z = 3 + 2\lambda - 2\mu \end{cases}$

7. Obtén el punto simétrico de $P(0,0,1)$ respecto de $Q(1, -2, 1)$

8. Halla el simétrico del punto $P(-1,2,3)$ respecto a la recta $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$

9. Halla el simétrico del punto $P(0,1,-3)$ respecto al plano $\pi: x+y+z-2=0$

10. Halla la distancia del punto $P(1,1,-1)$ a la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$

11. Halla la distancia del punto $P(2,1,0)$ al plano π

$\pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 3\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 2\mu \end{cases}$

12. Calcula la altura trazada desde el vértice D del tetraedro determinado por los puntos:

$A(2, 0, 0) B(-1, 3, 2) C(1, -4, -1) D(0, 0, 0)$

Halla el plano determinado por los puntos A , B y C , y obtén la distancia del punto D a este plano.

13. Halla la distancia entre los planos

$\pi: 2x - 2y + 3z = 0$
 $\pi': 4x - 4y + 6z = 12$

14. Calcula la distancia entre la recta r y el plano π :

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1} ; \pi: x+2y-3z-1=0$$

15. Calcula la distancia entre los siguientes pares de rectas

$$a) r: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1} \quad s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-1}$$

$$b) r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-1} \quad s: \begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$$

16. Halla la ecuación de la recta perpendicular $r: \frac{x-2}{3} = y+1 = \frac{z+7}{-2}$ y que a corte en el punto $P(5,0,-9)$

17. Dados los planos $\pi: mx + y + 2z - 7 = 0$ y $\pi': 3x + 4y + z + 1 = 0$, halla m para que los planos:

- a) Sean paralelos.
- b) Sean perpendiculares.

18. Sea $r: (x, y, z) = (0, 3, 3) + t(0, 1, 1)$. Demuestra que:

- a) r está contenida en el plano $\pi: 3x + 2y - 2z = 0$.
- b) r es paralela al plano $\pi': 3x + y - z - 5 = 0$.

19. Sean las rectas

$$r: \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 4z - 3 = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + 5z + 12 = 0 \\ x - 2y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

Encuentra la ecuación de un plano que contenga a r y sea perpendicular a s

20. Investiga si existe un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular a la recta s . En caso afirmativo, calcula la ecuación del plano.

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

21. Se consideran los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

- a) Halla la ecuación general del plano π que los contiene.
- b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el origen de coordenadas. Halla también el punto de intersección de la recta con el plano.

22. Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0} \quad r_2: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 1, 1)$$

23. Sean las rectas

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

- a) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores
- b) Hallar la perpendicular común a las rectas r y s .

24. Halla la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, y $(0,0,3)$.

Halla los puntos de la recta $r: x=y=z$ que están a distancia $1/7$ de este plano

Soluciones

1) $\alpha = 90^\circ$

2) $\alpha = 58,52^\circ$

3)

a. $19,07^\circ$

b. $22,21^\circ$

c. 0°

4)

a) A pertenece a r. $\text{Proy.}(B) = (0,0,0)$ $\text{Proy.}(C) = (6/7, 4/7, 2/7)$

a) $\text{Proy.}(A) = (9/7, 12/7, 6/7)$. $\text{Proy.}(B) = (1/7, 20/7, 10/7)$ $\text{Proy.}(C) = (5/7, 16/7, 8/7)$

5)

$\text{Proy.}(A) = A$. A pertenece al plano

$\text{Proy.}(B) = (-1, 6/5, 3/5)$

$\text{Proy.}(C) = (0, 8/5, 4/5)$

6)

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y &= \frac{19}{2} - \frac{5}{2}\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\}$$

7) $P' = (2, -4, -3)$

8) $P' = (47/17, -20/17, -99/17)$

9) $P' = (8/3, 11/3, -1/3)$

10) $d = \frac{\sqrt{266}}{14}$

11) $d = 0$. El punto pertenece al plano

12)

$\pi: x - y + 3z - 2 = 0$

Altura = $\frac{2\sqrt{11}}{11}$

13) $d = \frac{6\sqrt{17}}{17}$

14) $d = \frac{3\sqrt{14}}{14}$

15)

a) $d = \frac{\sqrt{118}}{118}$

b) $d = 0$

16) $\pi: 3x + y - 2z - 33 = 0.$

17)

a) No existe ningún valor de m que haga que sean paralelos

b) $m = -2$

18)

a) r está contenida en π

b) r es paralela a π'

19) No existe porque los vectores directores de las rectas no son perpendiculares

20) $\pi: 5x - 2y + 2z - 17 = 0.$

21)

a) $\pi: 2x + 3y + 6z - 6 = 0$

b) $r: (2\lambda, 3\lambda, 6\lambda). P(12/49, 18/49, 36/49)$

22)

$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

23)

a)

$$r: \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ -x + 8y - 5z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ -x - 15y + 18z + 23 = 0 \end{cases}$$

24)

Plano $\pi: 6x + 3y + 2z = 0$

Los puntos buscados son $P_1(7/11, 7/11, 7/11)$ y $P_2(5/11, 5/11, 5/11)$