TEMA 1

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Boletines y Soluciones

ÍNDICE

Boletín 1. Límites

1. Halla estos límites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-7)^{2-x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-0.01x^2)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2-6x})$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^{2x}+5e^{-x}}{3e^{2x}-e^{-x}}\right)$: f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\right)$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{x+1}}{3^x+10}$; h); h) $\lim\limits_{x\to-\infty}4^{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}}$; j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+\sqrt{2x}}-\sqrt{2x}\right)$; k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+6}{6x+3x^2}\right)^{-\frac{x}{4}}$

2. Calcula el valor de m para que se cumpla la igualdad:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{mx+2x^2}\right)^{x+2}=\dfrac{1}{e}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{2+5x}\right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}}=\dfrac{7}{10}$

3. Considera la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}$, y calcula:

a) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$;

4. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to5} m(x)=4$; $\lim\limits_{x\to5} n(x)=0$; $\lim\limits_{x\to5} p(x)=+\infty$, calcula si es posible el límite cuando x tiende a 5 de:

a) $m(x)+n(x)+p(x)$ e) $\dfrac{m(x)}{n(x)}$ i) $m(x)^{n(x)}$

b) $m(x)\cdot n(x)-p(x)$ f) $n(x)\cdot p(x)$ j) $m(x)^{p(x)}$

c) $m(x)\cdot p(x)$ g) $\dfrac{p(x)}{m(x)}$ k) $n(x)^{p(x)}$

d) $\dfrac{n(x)}{m(x)}$ h) $\dfrac{n(x)}{p(x)}$ l) $p(x)^{n(x)}$

5. Resuelve los límites de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-x-2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x-8}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}\right)$

6. (Andalucía Septiembre 2014) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\cdot \mathrm{sen}(x)}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite

7. (Andalucía Septiembre 2016) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{m}{2x}\right)$ es finito, calcula m y el valor del límite

8. (Andalucia Junio 2016) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(x+1)-a\,\mathrm{sen}(x)+x\cos(3x)}{x^2}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite

Boletín 2. Límites, continuidad y teoremas

1. Considerando la función f(x), determina el valor de a sabiendo que dicha función tiende a 5 cuando x tiende a -2.

$$f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 + 1}$$

2. Determina el valor de m para que se cumplan las siguientes igualdades

$$a)\ \lim_{x \to 3} \left(\frac{1 + 2x}{x + 4}\right)^{\frac{m}{3-x}} = e \qquad b)\ \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2}{3x - 4}\right)^{\frac{m}{3-x}} = e^2$$

3. A partir de la siguiente función halla los límites indicados

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si } -1 < x < 3 \\ 3x - 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$a)\ \lim_{x \to -2} f(x) \qquad c)\ \lim_{x \to 0} f(x) \qquad e)\ \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$b)\ \lim_{x \to -1} f(x) \qquad d)\ \lim_{x \to 1} f(x) \qquad f)\ \lim_{x \to 3} f(x)$$

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2 - x}$$

a) Determina los puntos en los que la función f(x) es discontinúa e indica el tipo de discontinuidad que presenta

b) Define una nueva función que contenga a f(x) y sea continúa para todos los valores de f(x)

5. Para las siguientes funciones, estudia la continuidad en x= -1, x=0, y x=3, y clasifica los tipos de discontinuidad que presentan

$$a)\ f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$b)\ g(x) = \begin{cases} 5x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x + 6}{x^2} & \text{si } -1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

6. Analiza la continuidad de esta función e indica los tipos de discontinuidad que presenta.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \dfrac{2}{3 - x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

7. Exprese estas funciones como funciones definidas a trozos, y estudia su continuidad

$$a)\ y = |x| \qquad c)\ y = |3 - 2x| \qquad e) = |6 - x^2|$$

$$b) = |x + 5| \qquad d) = |x^2 - x - 6|$$

8. Dada la función f(x), demuestra que existe un punto \`a´ tal que f(a) = 0.

$$f(x) = \sqrt{x} + \ln(x) - 2$$

9. Se considera la función f(x). Demuestra que se anula para algun valor de x y encuentrálo en un intervalo de longitud 1/2.

$$f(x) = e^{x-2} + x - 5$$

10. Justifica que la funcion f(x) toma el valor 6 para algun valor x Є (1,5)

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

11. Demuestra que f(x) alcanza un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo [0,5]

$$(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln(x) + 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

12. Demuestra que la función f(x) = x+1 tiene al menos un punto de corte con las funciones:

a) e^{x-1} c) $\ln(x) + 3$

b) $x^3 + 3x$ d) $\text{sen}(x)$

Calcula con un error menor que una décima, la abscisa de uno de los puntos de corte de cada una

13. Estudia la continuidad de estas funciones segun valores de a.

$$a)\, f(x) = \begin{cases} |-1 + 2x| & \text{si } x < 3 \\ a^x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$b)\, f(x) = \begin{cases} |3x - 4| & \text{si } x < 2 \\ a^x - x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$c)\, f(x) = \begin{cases} |4 - 5x| & \text{si } x < 1 \\ a - 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$d)\, f(x) = \begin{cases} |x - 4| & \text{si } x < a \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$$

$$e)\, f(x) = \begin{cases} \text{sen}^2(x) & \text{si } x \leq a \\ -\cos^2(x) + x & \text{si } x > a \end{cases}$$

Boletín 3. Derivadas 1

1. Calcula mediante la definción, la derivada de las siguientes funciones, en el punto x=-1.
a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = 2\cdot x^{-1}$

2. Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=x^3-2$ en el punto de abscisa x=1.

3. Determina la ecuación de la recta normal a la función f(x) en el punto de abscisa x=1.

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

4. Calcula las derivadas laterales de f(x) en x= -2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ -\dfrac{4}{x} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

5. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f(x) en el punto x= 3

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 3 \\ 12x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

6. Demuestra usando la definición de derivada que:

$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$$

7. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$a)\ f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad c)\ f(x) = e^x\cdot \operatorname{sen}(x)$$

$$b)\ f(x) = \frac{\cos(x)}{x-1} \qquad d)\ f(x) = e^{2x}$$

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

$$a)\ f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2} + \frac{1}{2} \qquad b)\ f(x) = e^{2\operatorname{sen}(x)} + 3$$

$$c)\ f(x) = \cos^2(x^2+1) \qquad d)\ f(x) = \operatorname{arc.cos}(x^2) - \frac{2}{3}$$

9. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando cuando sea posible

$$a)\ f(x) = \ln(1-3x) \qquad b)\ f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)$$

$$c)\ f(x) = \ln\left(\sqrt{5x+3}\right) \qquad d)\ f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}}\right)$$

10. Calcula la derivada de estas funciones

$$a)\ f(x) = x^2\cdot\sqrt[3]{x} \qquad b)\ f(x) = x^2\cdot e^{x+2}$$

$$c)\ f(x) = 2x^4\cdot\cos(x) \qquad d)\ f(x) = \sqrt{\cos(x)}\cdot \operatorname{sen}(x)$$

Boletín 4. Derivadas 2

1. Dada la parábola y =x^2-2x+5, se considera la recta r que une los puntos de esa parábola de abscisa x=1 y x=3. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a r.

2. Halla los valores del parámetro k para que las rectas tangentes a la curva f(x)=kx^3-x^2+7kx-18 en los puntos de abscisas x=1 y x=2 sean paralelas.

3. Determina el área de la región delimitada por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la función f(x) = 3+ln(tg(x)) en el punto de abscisa

$$x = \frac{r}{4}$$

4. Decide si esta función es continua y derivable.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x + 6 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 - \dfrac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \dfrac{5}{4} + 2 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

5. Halla los valores que deben tener a y b para que la siguiente función sea derivable en x=0

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + \operatorname{sen}(x)) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

6. Calcula las derivadas de estas funciones:

$$a)\ y = 4^x; \qquad b)\ y = \frac{8}{x^2 - 4}$$

$$c)\ y = \frac{2x - 1}{x - x^2}; \quad d)\ y = 7\sqrt{x} + 8\sqrt[3]{x}$$

$$e)\ y = x \cdot e^x$$

7. Encuentra las derivadas de estas funciones

$$a)\ y = \operatorname{sen}(2x) \cdot e^{\cos(2x)} \quad b)\ y = \operatorname{tg}^2(1 - 5x)$$

$$c)\ y = \cos(2x - 1)^3 \quad d)\ y = \cos^3(2x - 1)$$

8. Utilizando la técnica de derivación logarítmica, calcula la derivada de las siguientes funciones

$$a)\ y = (\sqrt{x})^x \qquad b)\ y = x^{\sqrt{x}}$$

$$c)\ y = (x - \operatorname{sen}(x))^{\sqrt{x}} \qquad d)\ y = (\operatorname{sen}(x))^{2x}$$

$$e)\ y = \sqrt[x]{\cos x} \qquad f)\ y = (\operatorname{arcsen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}$$

9. Encuentra la derivada de las siguientes funciones definidas de forma implícita.

$$a)\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad b)\ x^3 + y^3 + xy = 0$$

$$c)\ y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1 \quad d)\ (2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$$

10. Halla las derivadas de las siguientes funciones

$$a)\ y = \sqrt[4]{5x^3 + 1}$$

$$b)\ y = 2x \cdot \operatorname{arcsen}(x)$$

$$c)\ y = \sqrt[3]{(5x - 2)^2}$$

Boletín 5. Aplicación derivadas 1

1. Prueba que la función $f(x)=x^3+x^2-x-1$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-1,1], y calcula el punto del intervalo cuya existencia asegura su tesis.

2. Cada una de las funciones siguientes toma el mismo valor en los extremos del intervalo [-2,2], pero no hay ningún valor c€(-2,2) en el que la derivada se anule. Justifica en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle

$$a)\ f(x) = \frac{1}{x^4};\quad b)\ g(x) = 2 - |x|$$

3. Comprueba que la función $f(x)=3\cdot\cos^2(x)$ verifica las hipotesis del teorema de Rolle en el intervalo

$$\left|\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right|$$

Calcula también el valor al que se refiere la tesis del teorema

4. Calcula el valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [-√2, 2] a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a-1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Encuentra el punto que asegura la tesis e indica si se trata de un máximo, o un mínimo relativo. Representa gráficamente la función en ese intervalo para el valor de a obtenido

5. Calcular el valor de a, b y c para que la función f(x) cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-2,c]. Determine en ese caso el valor que asegura la tesis del teorema.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 1 \\ a(x^2 + b(x-1)) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x)=-x^2+2x-8$ en el intervalo [-3,3], e interpretarlo geométricamente.

7. Razona si es aplicable el teorema del valor medio a la función f(x) en el intervalo [0,e]

$$f(x) = \begin{cases} x\cdot\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En caso afirmativo, halla el valor al que se refiere el teorema

8. Determina los valores de los parámetros a y b para los que se puede aplicar a f(x) el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [-1,π/2]

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 0 \\ a^2 - \text{sen}(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

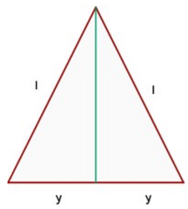
Para estos valores, determina el punto que verifica la tesis

9. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 20cm, halla las dimensiones de aquel cuya área sea máxima. Determina su área

10. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de 6cm. de radio

Boletín 6. Aplicación derivadas 2

1. Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Que valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?
$(Nota: Volumen\ del\ cono = \frac{1}{3}\cdot r\cdot r^2\cdot h)$



Triangulo Isósceles

2. Se tiene un alambre de 1m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado.
Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima

3. Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular, sabiendo que su volumen ha de ser de 9m^2, su altura 1m. y el coste de su construcción por m^2 es de 50€ para la base, 60€ para la tapa y 40 € para cada tapa lateral

4. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2(x+1)$
b) $f(x) = 3x^3 - 7x + 2$
c) $f(x) = |x^2 - 2|$
d) $f(x) = |-x^2 + 6x - 9|$
e) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
f) $f(x) = \frac{40 - 5x}{10 - x}$
g) $f(x) = \ln(x) - 2$
h) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
i) $f(x) = x - \text{sen}(x)$
k) $f(x) = (x-4)e^x$
l) $f(x) = x\cdot 2^x$

5. Comprueba que la función $y=x^5+mx+2$ es creciente para cualquier valor positivo del parámetro m

6. Dada la función $y=ax^2+bx+c$, determina los coeficientes a,b, y c sabiendo que la gráfica de esta función pasa por los puntos (1,2) y (2,6) y que, en este último punto, la recta tangnete a la curva tiene como ecuación $7x-y-8=0$. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, asi como su extremo relativo

7. Dada la función $y=x\cdot e^{ax}$**,** determina el valor de la constante a, sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto x=1

8. Se ha comprobado que el rendimiento de una máquina de hielo industrial durante un tiempo de funcionamiento de 20 horas, medido en %, puede describirse mediante la función $R(t)=A\cdot t\cdot(B-t)$, con $0<t<20$.
a) Determina el valor de los parametros Ay B sabiendo que el rendimiento máximo del 100% se alcanza a las 10 horas de funcionamiento
b) ¿A que hora alcanza la máquina un rendimiento del 64%?

9. Estudia la curvatura de las siguientes funciones

a) $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

b) $y = x^4 - 6x^2$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = \sqrt{4 + x^2}$

f) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$

g) $y = 1 - 2\ln(x)$

h) $y = \ln(x^2 - x)$

i) $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$

j) $y = (x - 1)e^x$

k) $y = \dfrac{x}{e^x}$

l) $y = 1 + 2\operatorname{sen}(x)$

m) $y = \cos(2x)$

n) $y = \operatorname{sen}^2(x)$

10. Demuestra que la función $y=x^4+3x^2-5x+6$ no tiene ningún punto de inflexión

11. Calcula los valores de los parámetros a y b para los que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+7$ tenga un punto de inflexión en x=1, y que además en ese punto la recta tangente a la curva forma 45º con el eje OX.

Boletín 7. Representación de funciones 1

1. Halla las simetrías y las periodicidades de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = sen\ x + 1/2\ (sen\ 2x)$

f) $y = \sqrt[3]{cos\ x + 5}$

2. Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$
b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$
c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$
d) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$
e) $y = x^3 - 3x$
f) $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

3. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 3x^2$
b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$
c) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10$
d) $y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}$
e) $y = x^5 - 5x^3$
f) $y = (x - 1)^3 - 3x$
g) $y = x^4 - 4x^2$
h) $y = 1 - (x - 1)^3$

a) $y = x^3 + 3x^2$

4. Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Represéntalas gráficamente:

a) $y = 3 + (2 - x)^3$
b) $y = 2 - (x - 3)^4$
c) $y = (x + 1)^6 - 5$
d) $y = 3 - (1 - x)^3$
e) $y = x(x - 1)(x + 3)$
f) $y = (x - 2)^2 (x + 1)\, x^3$

5. En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

a) $y = \dfrac{1}{x^2}$
b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
e) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
f) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$
g) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$
h) $y = \dfrac{x^3}{(1 - x)^2}$
i) $y = \dfrac{4x^2}{1 + x^4}$

6. Representa:

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$
b) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$
c) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$
d) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

7. Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, ramas infinitas y extremos relativos.

a) $y = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 3)}$
b) $y = \dfrac{(x - 1)}{x(x - 3)(x + 4)}$
c) $y = \dfrac{8 - 2x}{x(x - 2)}$
d) $y = \dfrac{x^2 (2x - 1)}{(x - 2)(x + 1)}$

8. Representa las siguientes funciones racionales:

a) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$
b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
c) $y = \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$
d) $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x^3}$
e) $y = \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2}$
f) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x}$

Boletín 8. Representación de funciones 2

1. Representa estas funciones con radicales.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-10x}$
b) $f(x)=\sqrt{2x+1}$
c) $f(x)=\sqrt{x^2+3x}-2x$

2. Representa estas funciones exponenciales

a) $f(x)=e^{-x^2}$
b) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$
c) $f(x)=x\cdot e^x$
d) $f(x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}$

3. Representa estas funciones logarítmicas

a) $f(x)=\ln(x^2-9)$
b) $f(x)=x\cdot ln(x)$
c) $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$

4. Representa estas funciones trigonométricas

a) $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$
b) $f(x)=x^2-(\sin(x))^2$

5. Representa estas funciones con valor absoluto

a) $f(x)=|x^2-x-2|$
b) $f(x)=\ln(|x^2-4|)$
c) $f(x)=e^{|x|}$

6. Sabiendo que la función $f(x)=x+a\ln(x)$ alcanza un extremo relativo para x=3, decide si es un máximo o un mínimo y encuentra los intervalos de monotonía y curvatura de la función

7. Considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Se sabe que f(x) tiene un extremo relativo en P(1,0) y un punto de inflexión para $x=\frac{4}{3}$. Indica en que intervalos de f(x) es creciente y en cuales es decreciente, y estudia su curvatura

8. Considera la función $f(x)=\begin{matrix} 1-\sqrt{2-x} & si\,x\leqslant 1 \\ \frac{2x^2}{x-m} & si\,x>1 \end{matrix}$

a) Determina el valor de m para que la recta y=2x+6 sea asíntota oblicua de la función
b) Para m=3, realiza el estudio completo de la función y representa

Soluciones Boletín 1. Límites

1.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
0	- 3	3	- 3	1/3	2	3	+3	2	1/2	$\sqrt{e}$

2.

a	b
m=2	$m=\frac{1}{5\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$

3.

a	b	c
5	-3	$\frac{7}{\sqrt{6}}$

4.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
+3	- 3	+3	0	+3	Indetermin.	+3	0	1	+3	0	Indetermin.

5.

a	b	c	d
1/3	0	0	+3

6. a= 1; Límite = -5

7. m=2; Límite = -1/2

8. a=2; Límite = -1/2

Soluciones Boletín 2. Límites continuidad y teoremas

1. a=9

2.

a	b
m=-7	m=4

3.

a	b	c	d	e	f
-3	0	1	√2	√3	2

4.

a	Discontinuidad evitable en x= 2
b	Función por partes fijando f(2) =-3

5.

a	Continua en x=-1 Discontinuidad salto finito en x= 0 y en x=3
b	Discontinuidad salto infinito en x= 0 y en x=-1 Continua en x=3

6. Discontinuidad de salto finito en x=0 y x=2. Discontinuidad de salto infinito en x=3

7.

a	Continua en x=0 y en todo R
b	Continua en x=-5 y en todo R
c	Continua en x=3/2 y en todo R
d	Continua en x=3 y x=-2 y en todo R
e	Continua en x=-√6 y x=0√6 y en todo R

8. Existe por teorema de Bolzano

9. Existe por teorema de Bolzano. Intervalo (5/2,3)

10. Se cumple aplicando teorema de Darboux en el intervalo (3,5)

11. Se cumplen las condiciones de Weirestrass.

12.

a	Si. 2,1
b	Si. 0,4
c	Si. 0,2
d	Si. -1,9

13.

a	Continua en x=1/2, continua en x=3 si a= 2, y en todo R
b	Continua en x=4/3, continua en x=2 si a= 2, y en todo R
c	Continua en x=4/5, continua en x=1 si a= 1 o a=3, y en todo R
d	Continua si a= 4 o a=1
e	Continua si a= 1

Soluciones Boletín 3. Derivadas 1

1.

a	b
0	-2

2.
y=3x-4

3.
y= (√2)(3-2x)

4.

Derivada por la izquierda	Derivada por la derecha
-(∞) entonces no existe	-4

5. La función en el punto x= 3 no es continúa y por lo tanto no es derivable en el punto x=3

6. Realizar demostración partiendo de definición de derivada

7.

a	$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
b	$f'(x) = \frac{-sen(x)}{(x-1)} - \frac{cos(x)}{(x-1)^2}$
c	$f'(x) = e^x(sen(x) + cos(x))$
d	$f'(x) = 2e^{2x}$

8.

a	$f'(x) = 2x(e^{x^2} - e^{-x^2})$
b	$f'(x) = 2cos(x) \cdot e^{2sen(x)}$
c	$f'(x) = -2x \cdot 2 \cdot cos(x^2+1) \cdot sen(x^2+1) = -2x \cdot sen(2x^2+2)$
d	$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

9.

a	$f'(x) = -\frac{3}{1-3x}$
b	$f'(x) = \frac{2}{2x+1} + \frac{2}{1-2x} = \frac{4}{1-4x^2}$
c	$f'(x) = \frac{5}{10x+6}$
d	$f'(x) = \frac{2}{1-4x^2}$

10.

a	$f'(x) = \frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$
b	$x(x+2)e^{x+2}$
c	$(x) = 2x^3(4cos(x) - xsen(x))$
d	$f'(x) = \frac{2cos^2(x) + sen^2(x)}{2\sqrt{cos(x)}}$

Soluciones Boletín 4. Derivadas 2

1. y=2x+a

2. k=2/9

3.
$$\text{Área} = \frac{(6-r)^2}{16}$$

4.
Si $x < -1$ → Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, -1)$.
Si $-1 < x < 0$ y $0 < x < 2$ → Función continua y derivable en $(-1, 0) \cup (0, 2)$.
Si $x > 2$ → Función exponencial continua y derivable en $(2, +\infty)$.
Si $x = -1$ → Función continua y derivable
Si $x = 0$ → Función NO continua y NO derivable
Si $x = 2$ → Función continua y NO derivable
En resumen, la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

5. a=1/e

6.

a	$y' = 4^x \cdot \ln(4)$
b	$y' = -\frac{16x}{(x^2-4)^2}$
c	$y' = \frac{2x^2-2x+1}{(x-1)^2 x^2}$
d	$y' = \frac{7}{2\sqrt{x}} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$
e	$y' = e^x(x+1)$

7.

a	$y' = -2e^{\cos(2x)} \cdot \mathrm{sen}^2(2x) + 2\cos(2x) \cdot e^{\cos(2x)}$
b	$y' = -10\frac{\mathrm{sen}(1-5x)}{\cos^3(1-5x)}$
c	$y' = -6(2x-1)^2 \cdot \mathrm{sen}(2x-1)^3$
d	$y' = -6\cos^2(2x-1) \cdot \mathrm{sen}(2x-1)$

8.

a	$y' = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^x(2\ln(\sqrt{x}) + 1)$
b	$y' = \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$
c	$-\frac{1}{2}(x - \mathrm{sen}x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{2\sqrt{x}(\cos(x)-1)}{x-\mathrm{sen}(x)} - \frac{\ln(x-\mathrm{sen}(x))}{\sqrt{x}}\right)$
d	$2(\mathrm{sen}(x))^{2x}\left(\frac{x\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} + \ln(\mathrm{sen}(x))\right)$
e	$y' = \sqrt[x]{\cos(x)}\left(\frac{-\ln(\cos(x))}{x^2} - \frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\right)$
f	$y' = (\mathrm{arcsen}\, x)^{\mathrm{sen}\, x}\left(\cos(x) \cdot \ln(\mathrm{arcsen}\, x) + \frac{\mathrm{sen}(x)}{\sqrt{1-x^2} \cdot \mathrm{arcsen}\, x}\right)$

9.

a	$y' = -\frac{x}{4y}$
b	$-\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x}$
c	$\frac{3 + 2y}{3y^2 - 2x}$
d	$\frac{15x^2 - 3}{12y(2y^2 + 3)^2}$

10.

a	$y' = \frac{15x^2}{4\sqrt[4]{(5x^3 + 1)^3}}$
b	$y' = 2\operatorname{arcsen}(x) + \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$
c	c)$y' = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x - 2}}$

Soluciones boletín 5. Aplicación Derivadas 1

1. *f* (x)= es continua y derivable (por ser función polinómica).
Ademas, $f(1)=0=f(-1) \rightarrow f(x)$ satisface el teorema de Rolle en $[-1,1]$.
En este caso, el punto que verifica que el teorema se satisface es $x=1/3$

2.
a) La función no es continua en el intervalo
b) La función no es derivable en el intervalo

3.
La función verifica las condiciones de teorema de Rolle, y el valor que lo verifica es $x=\pi$

4.
a=3
El punto que verifica el teorema de Rolle es x=0, y es un máximo de la función

5.
$a=-1$; $b=5$; $c=(5+3\sqrt{5})/2$
El valor que verifica el teorema de Rolle es $x=5/2$

6.
$f(x)$ continua en $[-3, 3]$ y derivable $(-3, 3)$ por ser polinómica $\rightarrow f(x)$ cumple el *T.V.M.* $\rightarrow$
El punto para el que se verifica es $x=0$.
Geométricamente: existe un punto en el interior del intervalo cuya recta tangente es paralela a la recta que une los puntos $(-3, f(-3))$ y $(3, f(3))$.

7.
f(x) cumple hipótesis de teorema de valor medio en [0,e], el punto que verifica el teorema es x=1

9.
Cateto 1 = Cateto 2 = 10cm
Área = $50cm^2$

10.
Los rectángulos de lados $l_1=l_2=6\sqrt{2}$cm son los que maximizan el área. Es decir, un cuadrado de lado $6\sqrt{2}$cm

8.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x<0 \\ a^2-sen\,x & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \to f'(x)\begin{cases} 2ax+b & \text{si } x<0 \\ -cos\,x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$f(X)$ continua y derivable en el intervalo dado, salvo tal vez en $X=0$:

$f(X)$ continua en $X=0$ si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(X)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(X) \to a^2=1 \to a=\pm 1$

$f(X)$ derivable en $X=0$ si $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(X)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(X) \to b=-1$

• Caso 1: $a=1, b=-1$

$$f'(c)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(-1)}{\frac{\pi}{2}+1}=\frac{1-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-(1-1+1)}{\frac{\pi}{2}+1}=-\frac{3}{\frac{\pi}{2}+1}=-\frac{6}{\pi+2}$$

Si $c\geq 0 \to f'(c)=-cos\,c \to cos\,c=\frac{6}{\pi+2} \to c=arc\,cos\left(\frac{6}{\pi+2}\right) \to$ Imposible. No existe *c*.

Si $c<0 \to f'(c)=2c-1=-\frac{6}{\pi+2} \to c=\frac{\pi-4}{2(\pi-2)}<0$

Así, $c=\frac{\pi-4}{2(\pi-2)}$ verifica el *T.V.M.* generalizado para $f(X)$ en $\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$.

• Caso 2: $a=-1, b=-1$

$$f'(c)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(-1)}{\frac{\pi}{2}-(-1)}=\frac{1-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-(-(-1)^2+1+1)}{\frac{\pi}{2}+1}=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}=-\frac{2}{\pi+2}$$

Si $c\geq 0 \to f'(c)=-cos\,c \to cos\,c=\frac{2}{\pi+2} \to c=arc\,cos\left(\frac{2}{\pi+2}\right)=1{,}17$

Si $c<0 \to f'(c)=-2c-1=-\frac{2}{\pi+2} \to c=\frac{-\pi}{2(\pi+2)}<0$

Así, $c=\frac{-\pi}{2(\pi+2)}$ y $c=1{,}17$ verifican el *T.V.M.* generalizado para $f(X)$ en $\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soluciones Boletín 6. Aplicación Derivadas 2

1. Base =12 cm

2.
Longitud círculo=0.439m.
Longitud cuadrado= 0.561m.

3.
Base de contenedor (x,y)=(3,3)m.

4.

a) $f(x) = x^2(x+1)$ $\qquad$ $\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(3x+2) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$f'(-1) = 1 > 0 \qquad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0 \qquad f'(1) = 5 > 0$$

La función es creciente en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

Tiene un máximo relativo en $x = -\frac{2}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

b) La función es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{7}{3}}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, +\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

Tiene un máximo relativo en $+\sqrt{\frac{7}{3}}$, y un mínimo relativo en $-\sqrt{\frac{7}{3}}$

c) La función es creciente en $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(+\sqrt{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, +\sqrt{2}\right)$

Tiene mínimos relativos en $x = -\sqrt{2}$ y $x = +\sqrt{2}$, y un máximo relativo en $x = 0$

d) La función es creciente en $(3, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 3)$ y tiene un minimo relativo en $x = 3$

e) En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ se tiene $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

En $(0,1) \cup (1,2)$ se tiene $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

Así, $f(x)$ tiene un maximo relativo en $x = 0$ y un minimo relativo en $x = 2$

f) $f(x) < 0$, entonces es decreciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos relativos

g) $f(x) > 0$, entonces es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos relativos

h) La función es creciente en $(0, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$ y tiene un máximo relativo en $x = e$

i) $f(x) > 0$, entonces es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos relativos

k) En $(-\infty, 3)$ se tiene $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

En $(3, +\infty)$ se tiene $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

Así, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 3$

l) En $\left(-\infty, -\frac{1}{\ln 2}\right)$ se tiene $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

En $\left(-\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right)$ se tiene $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

Así, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{\ln 2}$

5. Inmediato. Se deriva y se comprueba que es siempre creciente

6. En $(-\infty, \frac{5}{6})$ se tiene $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

En $(\frac{5}{6}, +\infty)$ se tiene $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

Así, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = \frac{5}{6}$

7. a=-1

8. a) A=1; B=20
b) Se alcanza un rendimiento del 64% para t=4 y t=16

9.

a) $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \rightarrow y' = 3x^2 + 6x - 5 \rightarrow y'' = 6x + 6$

$y''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

$\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $(-1, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

b) $y''(x) = 0 \Rightarrow x = +1; x = -1$

$y''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow$ y es cóncava

$y''(x) < 0$ en $(-1, 1) \Rightarrow$ y es convexa

c) $y''(x) \neq 0 \ \forall x \in R - \{1, -1\}$

$y''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow$ y es cóncava

$y''(x) < 0$ en $(-1, 1) \Rightarrow$ y es convexa

d) $y''(x) < 0 \ \forall x \in R - \{0\} \Rightarrow$ y es convexa en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

e) $y''(x) \neq 0 \ \forall x \in R \Rightarrow$ y es cóncava en todo R

f) $y''(x) \neq 0 \ \forall x \in (-2, +2)$

$y''(x) < 0$ en $(-2, 2) \Rightarrow$ y es convexa

g) $y''(x) \neq 0 \ \forall x \in (0, +\infty)$

$y''(x) > 0$ en $(0, +\infty) \Rightarrow$ y es cóncava

h) $y''(x) \neq 0 \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$y'' < 0$ en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \Rightarrow$ y es convexa en todo su dominio

i) $y''(x) = 0 \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

$y''(x) > 0$ en $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty) \Rightarrow$ y es cóncava

$y''(x) < 0$ en $(0, e^{\frac{3}{2}}) \Rightarrow$ y es convexa

j) "(x) = 0 " x = - 1

y"(x) > 0 en (- 1, + 3) " y es cóncava

y"(x) < 0 en (- 3 , - 1) " y es convexa

k) y"(x) = 0 " x = 2

y"(x) > 0 en (2, + 3) " y es cóncava

y"(x) < 0 en (- 3 ,2) " y es convexa

l) y"(x) = 0 " x = 0

y"(x) > 0 en (- r ,0) " y es cóncava

y"(x) < 0 en (0, r) " y es convexa

m) y"(x) = 0 " x = $-\frac{r}{4}$; x = $+\frac{r}{4}$

y"(x) > 0 en ($-\frac{r}{2}$, $-\frac{r}{4}$)U($\frac{r}{4}$, $+\frac{r}{2}$) " y es cóncava

y"(x) < 0 en ($-\frac{r}{4}$, $+\frac{r}{4}$) " y es convexa

n) y"(x) = 0 " x = $-\frac{r}{4}$; x = $+\frac{r}{4}$

y"(x) > 0 en ($-\frac{r}{4}$, $+\frac{r}{4}$) " y es cóncava

y"(x) < 0 en ($-\frac{r}{2}$, $-\frac{r}{4}$)U($\frac{r}{4}$, $+\frac{r}{2}$) " y es convexa

10. Inmediato. Se deriva 2 veces y se comprueba que no se anula nunca (es siempre mayor que cero)

11. a=-3; b=4