TEMA 2

CÁLCULO INTEGRAL

Boletines y Soluciones

ÍNDICE

Boletín 9. Integrales indefinidas Inmediatas y partes

1. Determina los valores de a, b, c y d para los que $F(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ es una primitiva de la función $f(x)=4x^2-5x+3$

2. Calcula las siguientes integrales "inmediatas"

a) $\int x\cdot(x^2+2)^2\cdot dx$
b) $\int x\cdot\sqrt{2x^2+5}\cdot dx$
c) $\int 4x\cdot\sin(2x^2)\cdot dx$
d) $\int \frac{-4}{9-4x}dx$
e) $\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$
f) $\int x^2\cdot e^{x^3}dx$
g) $\int 4x\cdot 7^{2x^2}dx$
h) $\int \frac{\cos(\ln(2x))}{x}$
i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(4x^2)}}dx$
j) $\int \frac{1}{1+(\ln(x^2+1))^2}\cdot\frac{6x}{x^2+1}dx$

3. Calcula las siguientes integrales por partes

a) $\int e^{2x}\cdot\sin(3x)dx$
b) $\int \arctan(x)dx$
c) $\int \ln(x^5)dx$
d) $\int x^3\cdot\sqrt{x^2-1}dx$
e) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$
f) $\int \frac{(\ln(x)+2)}{x}dx$
g) $\int x^2\cdot\ln(x)dx$
h) $\int \frac{4-2x^2}{x}\cdot\ln(x)dx$

Boletín 10. Integrales racionales y problemas

1. Calcula las siguientes integrales "racionales"

a) $\int \frac{x-3}{x^2-4} \cdot dx$

b) $\int \frac{x}{x^2+6x+5} \cdot dx$

c) $\int \frac{1+x^2}{3x^2-x^3} \cdot dx$

d) $\int \frac{1+x^3}{3x^2-x^3} \cdot dx$

e) $\int \frac{1+x}{4x^2-x^4} \cdot dx$

f) $\int \frac{1}{(x-2)^2(x^2+2)} \cdot dx$

g) $\int \frac{x+3}{4x^3-4x^2+x-1} \cdot dx$

h) $\int \frac{1+3x^2}{x^4-1} \cdot dx$

i) $\int \frac{x-3}{x+1} \cdot dx$

j) $\int \frac{12}{x^3+4x^2+x-6} \cdot dx$

k) $\int \frac{-x^2+x-1}{3-x} \cdot dx$

2. Calcula la primitiva de la función:

$$f(x)=\frac{1-\sin(x)}{2x+2\cos(x)}$$

Sabiendo que pasa por el punto P(0,2)

3. Calcula una función real $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que:

- Tiene un punto de inflexión en el origen de coordenadas
- La recta tangente en el origen de coordenadas es y=5x
- Verifica la condición f´´´(x)=24x-6

4. De una función derivable se sabe que pasa por el punto (-1,-4) y que su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2-x & \text{Si } x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{Si } x>1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de f(x)
b) Determina la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x=2

Boletín 11. Integrales definidas

1. Calcula las siguientes integrales definidas

a) $\int_{1}^{5}(-2x^2+x-1)dx$

b) $\int_{1}^{e}\frac{1}{2x}dx$

c) $\int_{0}^{\pi}-5\,sen(x)\,dx$

d) $\int_{-2}^{2}(2x^3-4x+3)dx$

e) $\int_{0}^{e}\frac{-3x}{x^2+1}dx$

f) $\int_{0}^{\pi}(2\,sen(x)-4x)dx$

g) $\int_{1}^{4}\frac{x-2}{x^2}dx$

2. Calcula el área encerrada entre estas funciones, el eje X y las rectas x=-3 y x=1

a) $f(x)=x^2+4$; b) $g(x)=-x^2+4$; c) $h(x)=-x^2-4$

3. Determina el área encerrada por cada una des estas funciones, el eje de abscisas y las rectas x=-1 y x= 3.

a) $f(x)=4-x^2$; b) $g(x)=x^2-2x-8$

4. Determina el área encerrada por cada una de estas funciones, el eje de abscisas y las rectas x=-2 y x= 1

a) $f(x)=3x^2-5x$; b) $g(x)=2x^3+x^2-x$

5. Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+9$ y $g(x)=(x+1)^2-4$

6. Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-9x$ y $g(x)=12x-20$

7. Calcula la derivada de las siguientes funciones usando el teorema fundamental del cálculo integral.

a) $g(x)=\int_{x}^{0}2t\,dt$ b) $g(x)=\int_{0}^{x}tg(t)\,dt$

8. Halla las derivadas de las siguientes funciones

a) $g(x)=\int_{-x^2}^{x^3} sen(2t)\,dt$ b) $g(x)=\int_{3x-2}^{x^2+x} e^{-t^2}\,dt$ c) $g(x)=\int_{0}^{x} \cos(t^2)\,dt$

9. Dibuja el recinto encerrado entre las gráficas de las funciones $y=x^2-6x$ e $y = 3x$ y calcula su área

10. Sea la función $F(x)=\int_{1}^{x} (\frac{sen\,t}{t})\,dt$ definida para $x\geq 1$. Halla los valores de x en los que alcanza sus máximos y mínimos relativos

Boletín 12. Repaso integrales

1. (Galicia Sept-2015) Dibuja y calcula el área de la región limitada por las gráficas de la parábola $f(x)= 4x-x^2$ y las rectas tangentes a la gráfica f(x) en los puntos correspondientes a x=0 y x=2.

2. (Galicia Sept-2015) Calcula una primitiva de la función f(x) = xsenx que pase por el punto (π,0)

3. (Galicia Sept-2016) Dibuja y calcula el área de la región limitada por las gráfica de la parábola y= x(x-2), el eje de abscisas y la recta y=x

4. (Galicia Sept-2016) a) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $F(x)=\int_0^x (\frac{(t^2+6)}{(2+e^t)})dt$ en el punto de abscisa x=0

b) Calcula $\int_0^1 xln(1+x)dx$

5. (Galicia Sept-2018). Calcula $\int_1^6 \sqrt{x}\ln(x)dx$

6. (Galicia Sept-2018) Dibuja y calcula el área de la región limitada por las gráfica de la parábola $y= x^2-2x$, y la recta y=x

7. (Galicia Junio-2016). Dada la función f(x)= $\begin{Bmatrix} x+2\,; si\, x<1 \\ 3(x-2)^2; si\, x\geq 1 \end{Bmatrix}$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de f(x) y el eje OX.

8. (Galicia Junio-2018). Calcula $\int_1^6 x\sqrt{(x+1)}dx$

9. (Galicia Junio-2018). Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $f(x)=x^2-4x$ y la recta y=x-4

10. (Galicia Junio-2019). Calcula el área de la región encerrada por el eje X y la recta x= 4 y la gráfica f(x) = $\begin{Bmatrix} lnx\,; si\, x\in(0,\infty] \\ \frac{x}{e}; si\, x\in(e,\infty) \end{Bmatrix}$

11. (Galicia Junio-2019) Calcula $\int x^2 e^{-x} dx$

Boletín 13. Integrales por cambio de variable

1. (Andalucía 2002) Sea ln *x* el logaritmo neperiano de x *y* sea $f : D \to R$ la función definida por $f(x)=\int \left(\frac{1}{(x\cdot(lnx)^2)}\right)dx$. Usa el cambio de variable *t* **=** ln *x* para calcular una primitiva de *f*.

2. (La Rioja-2000) Considera la integral $\int \left(\frac{cosx}{(senx)^3}\right)dx$. Calcularla realizando el cambio de variable t=senx

3. Resuelve utilizando un cambio de variable

a) $\int \frac{2}{4+x^2}\,dx$

b) $\int x(x+5)^{10}\,dx$

c) $\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int x e^{3x^2}\,dx$

e) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

g) $\int tg\,2x\,dx$

h) $\int cotg\,\frac{x}{5}\,dx$

i) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,dx$

j) $\int e^x\sqrt{(e^x+1)^3}\,dx$

4. (Canarias 2007) Resolver la integral definida $\int \left(\frac{dx}{(x+1+\sqrt{x+1})}\right)$

5. (Aragón 2006) Utilizando el cambio de variable t = lnx, calcular $\int \left(\frac{\ln(lnx)}{xlnx}\right)dx$

6. Integra mediante cambio de variable

a) $\int (x^2\sqrt{x^3+3})\,dx$

b) $\int (x^3 e^{x^4+1})\,dx$

c) $\int \left(\frac{2}{xlnx}\right)dx$

d) $\int \left(\frac{lnx^2}{x}\right)dx$

7. Resuelve utilizando cambio de variable

a) $\int \cos x\, sen^3 x\, dx$

b) $\int x\ln(1+x^2)dx$

c) $\int \frac{\ln 2x}{x}dx$

d) $\int 2x\, senx^2\, dx$

e) $\int x\sqrt{x+1}dx$

f) $\int \frac{2x}{x^2-1}dx$

g) $\int \cos^2 x\, sen\, x\, dx$

h) $\int sen\, x\, e^{\cos x}dx$

i) $\int \cos^2 x\, sen^3 x\, dx$

j) $\int \frac{sen^3 x}{\cos x}dx$

k) $\int (x^2+1)e^{x^3+3x}\,dx$

l) $\int \cos^5 x\, sen^3 x\, dx$

Soluciones Boletín 9. Integrales indefinidas Inmediatas y partes

BOLETIN 9. INTEGRALES INDEFINIDAS E INMEDIATAS

BOL. 9. Pb. 1

$F(x) = a \cdot x^3 + bx^2 + cx + d$ es primitiva de $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$

MODO 1

$\Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x)$

$\int 4x^2 - 5x + 3\,dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C_1$

$\Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{4}{3}}}$

$\underline{\underline{b = \frac{-5}{2}}}$

$\underline{\underline{c = 3}}$

$\underline{\underline{d = C_1}}$ (constante)

MODO 2:

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$

$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$3a = 4 \longrightarrow \underline{\underline{a = \frac{4}{3}}}$

$2b = -5 \longrightarrow \underline{\underline{b = \frac{-5}{2}}}$

$\underline{\underline{c = 3}}$

$\underline{\underline{d \equiv CTE}}$

BOL. 9 Pb 2

a) $\int x \cdot (x^2+2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+2)^2\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+2)^3}{3} + C_1 = \frac{(x^2+2)^3}{6} + C_1$

b) $\int x \cdot \sqrt{2x^2+5}\,dx = \int \frac{4}{4} x \cdot \sqrt{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x\sqrt{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x\,(2x^2+5)^{1/2}\,dx$

$= \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2+5)^{3/2}}{3/2} = \frac{(2x^2+5)^{3/2}}{6} + Cte.$

c) $\int 4x\,\text{sen}(2x^2)\,dx = -\cos(2x^2) + C_1te$

d) $\int \frac{-4}{9-4x}\,dx = \ln|(9-4x)| + Cte$

e) $\int \frac{\cos(x) - \text{sen}(x)}{\cos(x) + \text{sen}(x)}\,dx = \ln|\cos(x) + \text{sen}(x)| + Cte$

— 1 —

f) $\int x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \int \frac{3}{3} x^2 \cdot e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \cdot e^{x^3} dx =$

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + Cte.$ ||

g) $\int 4x \cdot 7^{2x^2} \cdot dx = \frac{7^{2x^2}}{\ln 7} + Cte$

h) $\int \frac{\cos(\ln(2x))}{x} dx = \operatorname{sen}(\ln(2x)) + Cte$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx =$

$= \frac{1}{2} \text{arc. sen}(2x) + Cte$ ||

j) $\int \frac{1}{1+(\ln(x^2+1))^2} \cdot \frac{6x}{x^2+1} dx =$

$= 3 \cdot \int \frac{1}{1+(\ln(x^2+1))^2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx$

$= 3 \text{ arc. taug} (\ln|(x^2+1)|) + Cte.$ ||

BOL. 9 Pb. 3.

a) $I_1 = \int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) + \underbrace{\int \frac{2}{3} e^{2x} \cos(3x)\,dx}_{I_2}$

$u = e^{2x} \longrightarrow du = 2e^{2x}$

$\partial v = \operatorname{sen}(3x)\,dx \to v = -\frac{1}{3}\cos(3x)$

$J_2 = \int \frac{2}{3} e^{2x} \cos(3x)\,dx = \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \cos(3x)\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{3}\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)\,dx\right)$

$u = e^{2x} \longrightarrow du = 2e^{2x}\,dx$

$\partial v = \cos(3x) \quad v = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$

$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{3}\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)\,dx\right)$

$\Rightarrow I_1 = \int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x) - \frac{4}{9}\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)\,dx$

$\Downarrow$

$\frac{13}{9}\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{9} e^{2x} \operatorname{sen}(3x)$

$\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{-3}{13} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{13} e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)$

$\boxed{\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{e^{2x}}{13}\left(2\operatorname{sen}(3x) - 3\cos(3x)\right)}$

b) $\int \text{arc.}\tan(x)\, dx = I_1$

$u = \text{arc.}\tan x \longrightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\partial v = \partial x \longrightarrow v = x$

↓ Aplicamos partes

$\Rightarrow$

$$I_1 = x \cdot \text{arc.}\tan(x) - \frac{2}{2}\int \frac{1 \cdot x}{1+x^2}\, dx = x\cdot\text{arc.}\tan(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C_1$$

c) $\int \ln(x^5)\, dx = I_1$

$u = \ln(x^5) \longrightarrow du = \dfrac{1}{x^5} \cdot 5x^4 = \dfrac{5}{x}$

$\partial v = \partial x \longrightarrow v = x$

↓ Aplicamos partes

$$I_1 = \int \ln(x^5)\, dx = x \cdot \ln(x^5) - \int x \cdot \frac{5}{x}\, dx = x \cdot \ln|(x^5)| - 5x + Cte$$

d) $\int x^3 \cdot \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \dfrac{x^2}{2} \cdot 2x \cdot (x^2-1)^{1/2}\, dx$

$= \dfrac{1}{2}\int x^2 \cdot 2x \cdot (x^2-1)^{1/2}\, dx =$

$u = x^2 \longrightarrow du = 2x\, dx$

$\partial v = 2x(x^2-1)^{1/2} dx \longrightarrow v = \dfrac{(x^2-1)^{3/2}}{3/2} = \dfrac{2}{3}(x^2-1)^{3/2}$

↓ Aplicamos partes

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{3}(x^2-1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x^2-1)^{3/2} \cdot 2x \cdot dx\right)$$

$$= \frac{x^2}{3}(x^2-1)^{3/2} - \frac{1}{3}\,\frac{(x^2-1)^{5/2}}{5/2} = \frac{x^2}{3}(x^2-1)^{3/2} - \frac{2}{15}\cdot(x^2-1)^{5/2} + Cte$$

también se puede sacar factor común

$$= \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3}\left(x^2 - \frac{2}{15}(x^2-1)\right) + Cte$$

Soluciones Boletín 10. Integrales racionales y problema

Bol. 10. Pb.1.

a) $\int \frac{x-3}{x^2-4}\,dx \Rightarrow \frac{x-3}{x^2-4} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} \Rightarrow \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$(x^2-4) = (x+2)(x-2)$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 2A-2B=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{-1}{4};\quad B=\frac{5}{4}$$

$$\int \frac{x-3}{x^2-4}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{4}}{(x-2)}\,dx + \int \frac{\frac{5}{4}}{(x+2)}\,dx = -\frac{1}{4}\ln|x-2| + \frac{5}{4}\ln|x+2| + Cte$$

b) $\int \frac{x}{x^2+6x+5}\,dx$; $\frac{x}{x^2+6x+5} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+5)} \Rightarrow \frac{A(x+5)+B(x+1)}{(x+1)(x+5)}$

$x^2+6x+5 = (x+1)(x+5)$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 5A+B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-1/4 \\ B=5/4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+6x+5}\,dx = \int \frac{-1/4}{(x+1)}\,dx + \int \frac{5/4}{(x+5)}\,dx = -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{5}{4}\ln|x+5| + Cte$$

c) $\int \frac{1+x^2}{3x^2-x^3}\,dx \Rightarrow \frac{1+x^2}{3x^2-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{3-x} \Rightarrow \frac{Ax(3-x)+B(3-x)+Cx^2}{x^2(3-x)}$

$3x^2-x^3 = x^2(3-x)$ $\qquad 3Ax - Ax^2 + 3B - Bx + Cx^2 = 1+x^2$

$$\left\{\begin{array}{l} C-A=1 \\ 3A-B=0 \\ 3B=1 \longrightarrow B=\frac{1}{3};\ A=\frac{1}{9};\ C=\frac{10}{9} \end{array}\right.$$

$$\int \frac{1+x^2}{3x^2-x^3}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{10}{9}\int \frac{1}{3-x}\,dx =$$

$$\boxed{I = \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} + \frac{10}{9}\ln|3-x| + Cte}$$

-1-

d) $\int \frac{1+x^3}{3x^2-x^3}\,dx = I_1$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 & -x^3+3x^2 \\ -x^3 \quad +3x^2 & -1 \\ \hline \quad\quad 3x^2+1 & \end{array}$$

GRADO NUM. = GRADO DEN.

$$\frac{1+x^3}{3x^2-x^3} = -1 + \frac{3x^2+1}{\underbrace{-x^3+3x^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x^2+1}{-x^3+3x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(3-x)}$$

$-x^3+3x^2 = x^2(-x+3)$

$$\frac{3x^2+1}{-x^3+3x^2} = \frac{Ax(3-x)+B(3-x)+Cx^2}{x^2(3-x)}$$

$$-A+C = 3 \rightarrow C = 3+A = 3+\frac{1}{9} = \frac{28}{9}$$

$$3A - B = 0$$

$$3B = 1 \rightarrow B = 1/3;\ A = 1/9;$$

$$I_1 = \int -1\,dx + \int \frac{1/9}{x}\,dx + \int \frac{1/3}{x^2}\,dx + \int \frac{28/9}{3-x}\,dx$$

$$I_1 = -x + \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} + \frac{28}{9}\ln|3-x| + Ce.$$

e) $\int \frac{1+x}{4x^2-x^4}\,dx = I$; $\quad \frac{1+x}{4x^2-x^4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{2-x} + \frac{D}{2+x}$

$$\left.\begin{aligned} 4x^2-x^4 &= x^2(4-x^2) \\ &= x^2(2-x)(2+x) \end{aligned}\right\} \quad \frac{Ax(2-x)(2+x)+B(2-x)(2+x)+Cx^2(2+x)+Dx^2(2-x)}{4x^2-x^4}$$

$$\left.\begin{aligned} -A+C-D&=0 \\ -B+2C+2D&=0 \\ 4A&=1 \\ 4B&=1 \end{aligned}\right\} \quad A=1/4;\quad C=\frac{3}{16}$$

$$B=1/4;\quad D=-\frac{1}{16}$$

$$I=\int\frac{1+x}{4x^2-x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2}\,dx+\frac{3}{16}\int\frac{1}{2-x}\,dx-\frac{1}{16}\int\frac{1}{2+x}\,dx$$

$$\boxed{I=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4x}+\frac{3}{16}\ln|2-x|-\frac{1}{16}\ln|2+x|+C}$$

f) $\int \frac{1}{(x-2)^2(x^2+2)}\,dx \Rightarrow$

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2+2)} = \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Mx+N}{(x^2+2)} \Rightarrow$$

$$A(x-2)(x^2+2)+B(x^2+2)+(Mx+N)(x-2)^2 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} A+M&=0 \\ -2A+B-4M+N&=0 \\ 2A+4M-4N&=0 \\ -4A+2B+4N&=1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &N=1/14 \\ &A=-1/7 \qquad B=11/14 \\ &M=1/7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{7}\cdot\ln|x-2|+\frac{11}{14}\cdot\frac{(-1)}{(x-2)}+\underbrace{\int\frac{\frac{1}{7}x+\frac{1}{14}}{x^2+2}\,dx}_{I2?}$$

~~$J_2 = \int \frac{1}{}$~~

$$\int \frac{\frac{1}{7}x + \frac{1}{14}}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{14}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{14}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{14}\int \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x^2}{2}+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{14}\cdot \ln|x^2+2| + \frac{1}{28}\cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{14}\ln|x^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{28}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{14}\ln|x^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{28}\cdot \text{arc. tang}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + Ge.$$

Integral COMPLETA $= \frac{-1}{7}\ln|x-2| - \frac{11}{14}\cdot\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{14}\ln|x^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{28}\cdot \text{arc tang}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + Ge$

g) $\int \frac{x+3}{4x^3-4x^2+x-1}$; $\frac{x+3}{4x^3-4x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{(4x^2+1)}$

$\Downarrow$

$A(4x^2+1) + (Mx+N)(x-1) = x+3$

	4	-4	1	-1
1		4	0	1
	4	0	1	0

$4x^3-4x^2+x-1 = (x-1)\cdot(4x^2+1)$

$$\left.\begin{aligned} x^2 &\to 4A + M = 0 \\ x &\to -M + N = 1 \\ I &\to A - N = 3 \end{aligned}\right\} \quad N = \frac{1}{5} \quad M = -\frac{4}{5} \quad A = \frac{4}{5}$$

$$I = \frac{4}{5}\int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{\frac{-4}{5}x + \frac{1}{5}}{(4x^2+1)}\,dx = \frac{4}{5}\ln|x-1| - \frac{4}{5}\int \frac{x}{4x^2+1}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx$$

4

$$I = \frac{4}{5}\ln|x-1| - \frac{4}{8\cdot 5}\int\frac{8x}{4x^2+1} + \frac{1}{5\cdot 2}\int\frac{1\cdot 2}{(2x)^2+1}\,dx$$

$$I = \frac{4}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln|4x^2+1| + \frac{1}{10}\,\text{arc.tan}\,(2x) + Cte.$$

h) $\int \frac{1+3x^2}{x^4-1}\,dx \Rightarrow \frac{1+3x^2}{x^4-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$

$(x^4-1) = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

$A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Mx+N)(x^2-1) = 1+3x^2$

$x^3 \rightarrow A+B+M=0$

$x^2 \rightarrow A-B+N=3$

$x \rightarrow A+B-M=0$

$I \rightarrow A-B-N=1$

$2M=0 \Rightarrow M=0$

$2N=2 \Rightarrow N=1$

$A=1$

$B=-1$

$$I = \int\frac{1}{(x-1)}\,dx - \int\frac{1}{(x+1)}\,dx + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$I = \ln|x-1| - \ln|x+1| + \text{arc.tang}\,(x)$$

i) $\int \frac{x-3}{x+1}\,dx = \int 1\,dx + \int\frac{-4}{x+1}\,dx = x - 4\ln|x+1| + Cte$

$$\begin{array}{r|l} x-3 & x+1 \\ \hline -x-1 & 1 \\ \hline -4 & \end{array}$$

-5-

j) $\int \frac{12}{x^3+4x^2+x-6}\,dx \Rightarrow \frac{12}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$12 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ 5A+2B+C=0 \\ 6A-3B-2C=12 \end{array}\right\}$$

$x^3+4x^2+x-6 = (x-1)(x^2+5x+6)$

$= (x-1)(x+2)(x+3)$

$\boxed{A=1}$, $B=-4$; $C=3$

$J = \int \frac{1}{(x-1)}\,dx - 4\int \frac{1}{(x+2)}\,dx + 3\int \frac{1}{(x+3)}\,dx$

$J = \ln|x-1| - 4\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + \text{Constante}$

k) $\int \frac{-x^2+x-1}{3-x}\,dx = \int (x+3)\,dx + \int \frac{-10}{-x+3}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{10}{-x+3}\,dx$

$$\begin{array}{rrr|l} -x^2 & +x & -1 & -x+3 \\ \cline{4-4} +x^2 & -3x & & x+3 \\ \cline{1-3} 0 & -2x & -1 & \\ & 3x & -9 & \\ \cline{2-3} & & -10 & \end{array}$$

$J = \frac{x^2}{2} + 3x - 10\ln|-x+3|\,dx$

Bol. 10. Pb. 2

Hacemos la integral de la función $f(x)$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{2x+2\cos(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{x+\cos(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x+\cos(x)| + Cte$$

Como la función pasa por $P(0,2) \Rightarrow$

$$F(0) = 2 = \underbrace{\frac{1}{2} \ln|0+\underbrace{\cos(0)}_{1}|}_{0} + Cte$$

$$\Rightarrow Cte = 2$$

La primitiva que buscamos es: $F(x) = \frac{1}{2} \ln|0+\cos(0)| + 2$

Bol. 10. Pb. 3

Si $f'''(x) = 24x-6 \Rightarrow f''(x) = \int (24x-6)\,dx = 12x^2 - 6x + Cte\ 1$

Como el enunciado nos dice que en $x=0$ hay un pto. de inflexion $\Rightarrow$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow Cte\ 1 = 0$$

Si la recta tangente en $x=0$ es $y=5x \Rightarrow$ la pendiente de esta recta es igual a la 1ª derivada de la función en $x=0 \Rightarrow$ como tenemos la $f''(x)$ calculada. $\Rightarrow$

$$\int (12x^2-6x)\,dx = 4x^3 - 3x^2 + Cte.2$$

$$\Rightarrow Cte\ 2 = 5$$

-7-

El último dato será que el origen de coordenadas pertenece a la función. (⟶ para dar una única primitiva.

$$\int 4x^3 - 3x^2 + 5\,dx = x^4 - x^3 + \frac{5x^2}{2} + Ge3$$

PRIMITIVAS ORIGEN

Si entendemos que $(0,0) \in$ funcion buscada $\Rightarrow$ Despejamos $F(x)$ en 0, por lo que nos quedará de $Ge.3 = 0$.

BOL.10 Pb. 4

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como la funcion es derivable $\Rightarrow$ ES CONTINUA, por lo tanto puedo hacer

$$f(x) = \begin{cases} \int (2-x)\,dx = 2x - \frac{x^2}{2} + C_1' & \text{si } x \le 1 \\ \ln x + C_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Por ser continua $f(1) = 2 - \frac{1}{2} + C_1' = C_2$

$$\frac{3}{2} + C_1 = C_2$$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

Por ser derivable

~~$2-x$~~ $= 1$

Si pasa por el punto $(-1,-4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2(-1) - \frac{1}{2} + C_1' = -4$$

$$-\frac{5}{2} + C_1 = -4 \qquad \boxed{C_1 = -\frac{3}{2}}$$

-8-

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & x \leq 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

b) En $\underline{\underline{x = 2}}$ $\longrightarrow f(2) = \ln(2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

Ecuacion de la recta tangente

$$\Rightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow \boxed{y = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2)}$$

Soluciones Boletín 11. Integrales definidas

1a) $\frac{-224}{3}$; 1b) $\frac{1}{2}$; 1c) -10; 1d) 12; 1e) $\frac{-3}{2}\ln|e^2+1|$; 1f) $4-2\pi^2$;

1g) $\ln(4)-\frac{3}{2}$

2a) $\frac{76}{3}$; 2b) $\frac{34}{3}$; 2c) $\frac{76}{3}$

3a) $\frac{34}{3}$; 3b) 30,666…

4a) $\frac{39}{2}$; 4b) $\frac{71}{16}$

5) $\frac{125}{3}$

6) $\frac{999}{4}$

7a) -2x ; 7b) tg(x)

8a) $3x^2 sen(2x^3)+2x sen(-2x^2)$; 8b) $(2x+1)e^{-(x^2+x)^2}-3e^{-(3x-2)^2}$ 8c) $\cos(x)^2$

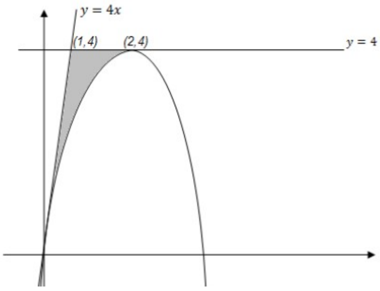
9) 121.5

10) $F'(x)=\frac{senx}{x}$ Esta derivada se anula si sen(x) =0, es decir, si x=π+kπ con k= 0,1,2,…

Es máximo para k= 0,2,4… y mínimo para k= 1,3,5,...

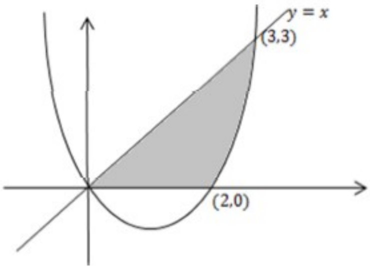
Soluciones Boletín 12. Repaso integrales

1) Área = $\frac{2}{3}$



2) f(x)=-xcosx + senx – π

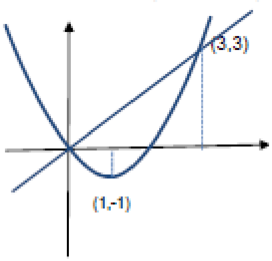
3) Área = $\frac{19}{6}$



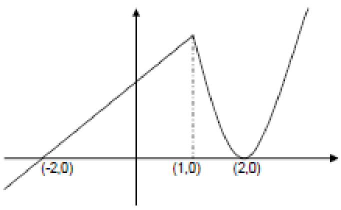
4) a) Recta tangente y=2x
   b) Integral definida = ¼

5) Integral definida = $\frac{2}{9}3^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}$

6) Área = $\frac{9}{2}$

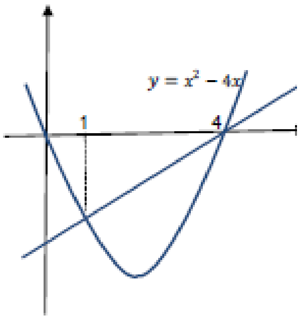


7) Área = $\frac{11}{2}$

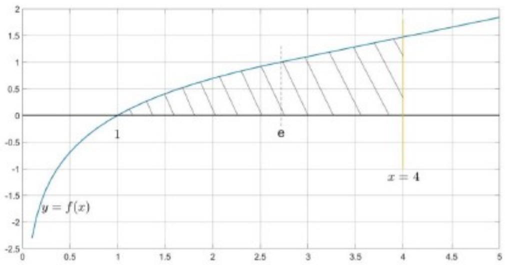


8) Integral definida = $\frac{116}{15}$

9) Área = $\frac{9}{2}$



10) Área = $\frac{2e+16-e^2}{2e} = 2{,}5839(aprox)$



11) I= $(-x^2-2x+2)e^{-x}$ + Cte

Soluciones Boletín 13. Integrales por cambio de variable

1) $F(x)=\frac{-1}{lnx}+Cte$.

2) $F(x)=\frac{-1}{2(senx)^2}+Cte$.

3)
a) Cambio de variable t=x/2; F(x) = arc.tg(x/2) +Cte.
b) Cambio de variable t=x+5; $F(x)=\frac{(x+5)^{12}}{12}-5\frac{(x+5)^{11}}{11}+Cte$.
c) Cambio de variable $t=\sqrt{x}$; $F(x)=-2\ln|\sqrt{x}|+Cte$.
d) Cambio de variable t=3x^2; $F(x)=e^{3x^2}+Cte$.
e) Cambio de variable t=x^2; $F(x)=\frac{1}{2}arcsen\,x^2+Cte$.
f) Cambio de variable t=1-x^2; $F(x)=-\sqrt{1-x^2}+Cte$.
g) Cambio de variable t=cos 2x; $F(x)=\frac{-1}{2}\ln|\cos 2x|+Cte$.
h) Cambio de variable t=sen(x/5); $F(x)=5\ln\left|sen\frac{x}{5}\right|+Cte$.
i) Cambio de variable t=x^5; $F(x)=\frac{1}{5}arcsen\,x^5+Cte$.
j) Cambio de variable t=e^x+1; $F(x)=\frac{2}{5}\sqrt{(e^x+1)^5}+Cte$.

4)
Cambio de variable $t=\sqrt{x+1}$; $F(x)=2\ln|\sqrt{x+1}+1|+Cte$.

5)
$F(x)=\frac{(\ln(lnx))^2}{2}+Cte$.

6)
a) Cambio de variable t=x^3+3; $F(x)=\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+3)^3}+Cte$.
b) Cambio de variable t=x^4+1; $F(x)=\frac{1}{4}e^{x^4+1}+Cte$.
c) Cambio de variable $t=\ln x$; $F(x)=2\ln|lnx|+Cte$.
d) Cambio de variable $t=\ln x$; $F(x)=\ln^2 x+Cte$.

7)
a) Cambio de variable t=sen x; $F(x)=\frac{sen^4 x}{4}+Cte$.
b) Cambio de variable t=x^2+1; $F(x)=\frac{1}{2}((1+x^2)\ln(1+x^2)-(1+x^2))+Cte$.
c) Cambio de variable t=ln (2x); $F(x)=\frac{\ln^2(2x)}{2}+Cte$.
d) Cambio de variable t=x^2; $F(x)=-\cos^{x^2}+Cte$.

e) Cambio de variable $t=\sqrt{x+1}$; $F(x)=\sqrt{x+1}(2\frac{(x+1)^2}{5}-2\frac{(x+1)}{3})+Cte$.

f) Cambio de variable t=x^2-1; $F(x)=\ln|x^2-1|+Cte$.

g) Cambio de variable t=cos x; $F(x)=\frac{-\cos^3 x}{3}+Cte$.

h) Cambio de variable t=cos x; $F(x)=-e^{cosx}+Cte$.

i) Cambio de variable t=cos x; $F(x)=\frac{-\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+Cte$.

j) Cambio de variable t=cos x; $F(x)=\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|cosx|+Cte$.

k) Cambio de variable t=x^3+3x; $F(x)=\frac{e^{x^3+3x}}{3}+Cte$.

l) Cambio de variable t=cos x; $F(x)=\frac{\cos^8 x}{8}-\frac{\cos^6 x}{6}+Cte$.