Boletín 17. Producto escalar distancias y ángulos 1.

1. Considera los vectores $\vec{u}=(-3,2,1),\vec{v}=(0,2,3),\vec{w}=(-1,5,-2)$ expresados en el sistema de referencia canónico. Calcula

a) $\vec{u}+\vec{v}$ c) $-\vec{u}-\vec{w}$ e) $3\vec{v}-\vec{w}$

b) $\vec{v}-\vec{w}$ d) $2\vec{u}+3\vec{v}$ f) $4\vec{u}-3\vec{w}$

2. Dados los puntos: $A=(1,2,3),B=(-2,3,1),C=(3,0,-2)$. Obtén las coordenadas de los siguientes vectores.

a) $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ c) $2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$

b) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{CB}$ d) $-\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BA})$

3. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

a) $A=(1,-1,1),B=(-3,5,6)$ b) $A=(-3,7,9),B=(-1,5,8)$

4. Determina un vector cuyo módulo sea 9 y que tenga la misma dirección que $\vec{v}=(2,5,-1)$ pero sentido contrario.

5. Encuentra un vector $\vec{t}$ que verifique que $2\vec{u}-3\vec{v}=2\vec{t}-\vec{w}$, siendo:

$$\vec{u}=(8,-1,3),\vec{v}=(2,0,-6),\vec{w}=(-6,2,4)$$

6. Expresa el vector $\vec{x}=(7,-2,0)$ como combinación lineal de los vectores:

$$\vec{u}=(1,1,-2),\vec{v}=(1,0,3),\vec{w}=(-2,5,0)$$

7. Demuestra que los vectores $\vec{u}=(2,-1,0),\vec{v}=(-1,3,5),\vec{w}=(5,-5,5)$ son linealmente dependientes

8. Determina para que valores de m son linealmente independientes los vectores:

$$\vec{u}=(2,1,-3),\vec{v}=(2,m+3,-4),\vec{w}=(-2,2,m-1)$$

9. ¿Existe algún valor de m para el que los vectores:

$$\vec{u}=(3,m,-2m),\vec{v}=(6,2m-1,0),\vec{w}=(6,2m,2)$$

sean linealmente dependientes?

10. Sean los vectores $\vec{u}=(1,1,2),\vec{v}=(2,1,3),\vec{w}=(-1,-a,-1)$:

a) Determina para que valores del parámetro a los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ forman base del espacio tridimensional

b) Para a=2, determina las coordenadas del vector $\vec{x}=(-1,5,0)$

11. Considera los puntos $A=(2,3,1),B=(0,1,-5),C=(3,5,a)$. Determina el valor de a para que los puntos a, b y c estén alineados

12. ¿Qué relación deben cumplir a y b para que los tres vectores sean paralelos?

$$\vec{u}=(a,2,b),\vec{v}=(3,a,5),\vec{w}=(1,-b,-1)$$

13. Determina producto escalar y ángulo que forman cada par de vectores siguiente:

a) $\vec{u}=(-2,1,\frac{1}{3}),\vec{v}=(0,2,-3)$ b) $\vec{u}=(-1,2,\sqrt{\frac{1}{2}}),\vec{v}=(3,\frac{1}{2},-\sqrt{2})$

c) $\vec{u}=(\frac{3}{4},\sqrt{3},-5),\vec{v}=(\frac{2}{3},-\sqrt{3},\frac{-1}{2})$

14. Sabiendo que $|\vec{u}|=3$ y $|\vec{v}|=5$ determina el producto escalar de los vectores $\vec{u}\,y\,\vec{v}$

15. Determina módulo, producto escalar y el ángulo de los vectores $\vec{u}\,y\,\vec{v}$ en los siguientes casos:
a) $\vec{u}=(2,1,-3),\vec{v}=(0,2,0)$ b) $\vec{u}=(-3,5,2),\vec{v}=(1,1,-1)$

16. ¿Dados los puntos M (2,3-4) y N (5,0,-1) determina un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{MN}$

17. Determina los valores de m para los que son perpendiculares los vectores:

$$\vec{u}=(m,-1,m),\vec{v}=(m,4,-3)$$

18. ¿Que valor debe tomar t para que los vectores $\vec{u}=(3,t,5)\,y\,\vec{v}=(2,-7,t)$ sean perpendiculares?¿Y para que sean paralelos?

19. Demuestra que los vectores $\vec{u}=(m^3,-1,m^2-1)\,y\,\vec{v}=(2,-3,1-2m)$ no son perpendiculares para ningún valor del parámetro m.

20. ¿Cuanto debe valer m para que los puntos A (5,m,7), B (3,-1,4) y C(6,5,4) formen un triángulo rectángulo con angulo recto en B.

21. Considera los puntos A(m,2,1), B(1,0,-1) y C((3,4,-2m). ¿Existe algún valor de m para el cual el triángulo ABC sea rectángulo en el vértice B? Determina en ese caso la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos.

Soluciones

1)

a) $\vec{u}+\vec{v}=(-3,2,1)+(0,2,3)=(-3,4,4)$

b) $\vec{v}-\vec{w}=(0,2,3)-(-1,5,-2)=(1,-3,5)$

c) $-\vec{u}-\vec{w}=-(-3,2,1)-(-1,5,-2)=(4,-7,1)$

d) $2\vec{u}+3\vec{v}=(-6,4,2)+(0,6,9)=(-6,10,11)$

e) $3\vec{v}-\vec{w}=(0,6,9)-(-1,5,-2)=(1,1,11)$

f) $4\vec{u}-3\vec{w}=(-12,8,4)-(-3,15,-6)=(-9,-7,10)$

2)

$\overline{AB}=(-3,1,-2)$ $\quad$ $\overline{BC}=(5,-3,-3)$ $\quad$ $\overline{AC}=(2,-2,-5)$ $\quad$ $\overline{CB}=(-5,3,3)$ $\quad$ $\overline{BA}=(3,-1,2)$

a) $\overline{AB}-2\overline{BC}=(-3,1,-2)-(10,-6,-6)=(-13,7,4)$

b) $2\overline{AB}-\overline{AC}-3\overline{CB}=(-6,2,-4)-(2,-2,-5)-(-15,9,9)=(7,-5,-8)$

c) $2\overline{BC}-3\overline{AC}=(10,-6,-6)-(6,-6,-15)=(4,0,9)$

d) $-\overline{AC}-\left(\overline{CB}+2\overline{BA}\right)=-(2,-2,-5)-(1,1,7)=(-3,1,-2)$

3)

a) $\left.\begin{array}{l}A=(1,-1,1)\\ B=(-3,5,6)\end{array}\right\}\rightarrow \overline{AB}=(-4,6,5)$

Las coordenadas del vector $\overline{AB}$ son $(-4,6,5)$.

$|\overline{AB}|=\sqrt{(-4)^2+6^2+5^2}=\sqrt{77}$.

El módulo del vector $\overline{AB}$ es $\sqrt{77}$.

b) $\left.\begin{array}{l}A=(-3,7,9)\\ B=(-1,5,8)\end{array}\right\}\rightarrow \overline{AB}=(2,-2,-1)$

Las coordenadas de $\overline{AB}$ son $(2,-2,-1)$.

$|\overline{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

El módulo del vector $\overline{AB}$ es 3.

4)

$$\vec{u}=\left(-\frac{3\sqrt{30}}{5},-\frac{3\sqrt{30}}{2},\frac{3\sqrt{30}}{10}\right)$$

5)

$\vec{t}=(2,0,14)$

6)

$\vec{x}=3\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$

7)

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -5\\ 5 & -5 & 5\end{vmatrix}=0$$

Entonces, un vector se puede poner como combinación lineal de los otros dos

8)

$\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes para $m\neq 1+\sqrt{6}$ y $m\neq 1-\sqrt{6}$

9) Los vectores son linealmente dependientes para m=-1/2

10)
a) Para a≠0 forman base
b) Las coordenadas respecto a la nueva base serían (5,-4,-2)

11) a=-1

12) No existen valores de a y b que hagan que los tres vectores sean paralelos

13)

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-2,1,\frac{1}{3}\right)\cdot(0,2,-3)=1 \quad \rightarrow \alpha = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{598}}\right)=82,935^{\circ}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-1,2,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(3,\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)=-3 \quad \rightarrow \alpha = arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{110}}\right)=112,42^{\circ}$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\frac{3}{4},\sqrt{3},-5\right)\cdot\left(\frac{2}{3},-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \rightarrow \alpha = arccos(0)=90^{\circ}$

14)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{15}{2}$

15)

a) $|\vec{u}|=\sqrt{14}$ y $|\vec{v}|=2$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,1,-3)\cdot(0,2,0)=2$

$cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{14}} \rightarrow \alpha = arc\,cos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)=74,5^{\circ}$

b) $|\vec{u}|=\sqrt{38}$ y $|\vec{v}|=\sqrt{3}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3,5,2)\cdot(1,1,-1)=0$

$cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{0}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = arc\,cos(0)=90^{\circ}$

16)

$\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

17) m=-4 y m=1

18) Perpendiculares: t=3
No existe ningún valor de t que haga que los vectores sean paralelos

19) Se resuelve planteando producto escalar e igualando a cero. Se demuestra que no hay solución real para m que verifique dicha igualdad

20) m=-2

21) Rectángulo para m=4. Longitud de lados AB=4,12; AC= 9,27; BC=8,3. Ang(A)=63,6º. Ang(b)=26,4º