Unidade 7: Xeometría métrica do espazo (II)

Programa:

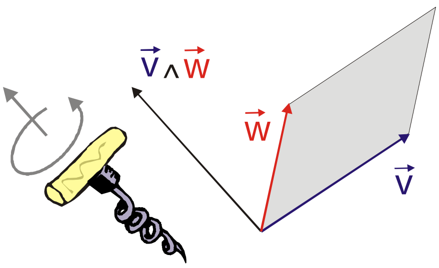
1. Produto vectorial.
    - 1.1. Definición de produto vectorial.
    - 1.2. Propiedades do produto vectorial.
    - 1.3. Interpretación xeométrica.
    - 1.4. Distancia dun punto a unha recta.
2. Produto mixto.
    - 2.1. Definición.
    - 2.2. Interpretación xeométrica.
    - 2.3. Distancia entre dúas rectas.

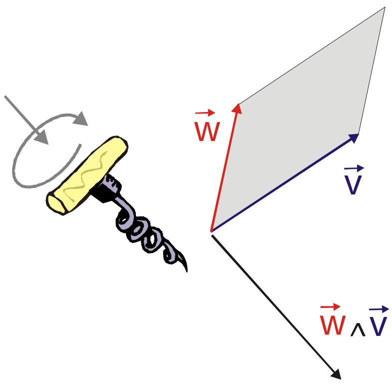
Produto vectorial

Sexa $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ unha base ortonormal de V^3 e sexan vectores $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ dous vectores de V^3.

Definimos o **produto vectorial** de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que se representa por $\vec{v}\wedge\vec{w}$**,** como outro vector que se obtén pola expresión:

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1-\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$





Fíxate que o último determinante non é realmente un determinante (os elementos da 1ª fila non son números), só é unha expresión para lembrar como se calcula o produto vectorial.

O vector produto vectorial ten:

- **Módulo** o produto dos módulos polo seno do ángulo que forman: $|\vec{v}\wedge\vec{w}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot sen(\alpha)$
- **Dirección** perpendicular aos dous vectores e, polo tanto, tamén ao plano que os contén.
- **Sentido** dependendo da orden a que facemos o produto. Un xeito de lembralo é coa "regra do berbequí": facendo xirar un berbequí do primeiro ao segundo vector seguindo o menor ángulo que forman, o sentido do produto vectorial será o de avance do berbequí.

  (se os dous ángulos son iguais: ou 0º ou 180º, non hai ambigüidade, pois resultado será 0)

Exemplo:

Produto vectorial dos vectores (-1,4,3) e (6,3,-2)

Solución:

$$(-1,4,3)\wedge(6,3,-2)=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$(-1,4,3)\wedge(6,3,-2)=(-17,16,-27)$$

Exemplo:

Produto vectorial dos vectores (-2,4,-4) e (3,-6,6)

Solución:

$$(-2,4,-4)\wedge(3,-6,6)=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -2 & 4 & -4\\ 3 & -6 & 6\end{vmatrix}=(0,0,0)$$

Neste caso, o produto vectorial é o vector $\vec{0}$. Observa que os vectores teñen a mesma dirección, as súas compoñentes son proporcionais: $\frac{3}{-2}=\frac{-6}{4}=\frac{6}{-4}$

Propiedades do producto vectorial

1. **Anticonmutativa:** $\forall \vec{v},\vec{w}\in V^3 \quad \vec{v}\wedge\vec{w}=-\vec{w}\wedge\vec{v}$

   Ao cambiar a orde cambia o signo.

2. **Distributiva:** $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V^3 \quad \vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$

   Podemos sumar primeiro e logo multiplicar, ou multiplicar cada un e logo sumar.

3. $\forall \vec{v},\vec{w}\in V^3 \quad \forall \alpha\in R \qquad (\alpha\cdot\vec{v})\wedge\vec{w}=\alpha\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$

   Se temos un número e dous vectores podemos multiplicar o nº vector e este resultado polo 2º, ou multiplicar os vectores e logo multiplicar polo nº.

4. $|\vec{v}\wedge\vec{w}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\text{sen}(\alpha)$

   O módulo do produto escalar de dous vectores é o produto dos módulos polo seno do ángulo que forman.

   Recorda que nos referimos ao menor ángulo.

5. $\vec{v}\wedge\vec{w}$ é perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$:

   $$(\vec{v}\wedge\vec{w})\perp\vec{v} \quad e \quad (\vec{v}\wedge\vec{w})\perp\vec{w}$$

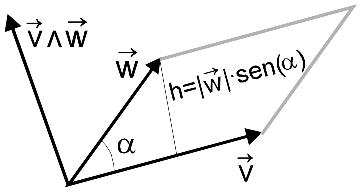
   Lembra que iso significa que $\vec{v}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=\vec{w}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=0$.

   O vector produto vectorial de dous vectores é perpendicular a cada un deses vectores.

6. ***Dous vectores teñen a mesma dirección se, e só se, o seu produto vectorial é*** $\vec{0}$.

Se v e w non son nulos, pero éo o seu produto, como $|\vec{v}\wedge\vec{w}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot sen(\alpha)=0$ tería que ser $sen(\alpha)=0$. Polo que o ángulo é 0º ou 180º.

Interpretación xeométrica



O módulo do produto vectorial de dous vectores é igual á área do paralelogramo que determinan.

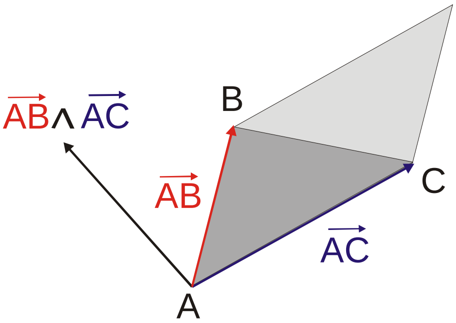
Para comprobalo só debemos ter en conta que o módulo do produto vectorial é o produto dos módulos por o seno do ángulo e que a área dun paralelogramo calcúlase multiplicando a base pola altura:

- **Base: o** módulo dun dos vectores $|\vec{v}|$.
- **Altura:** tendo en conta que se forma un triángulo rectángulo co outro vector como hipotenusa, a altura será

$$h = \left||\vec{w}| \cdot sen(\alpha)\right|$$

Obtemos pois que a área será: $|\vec{v}| \cdot h = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot sen(\alpha) = |\vec{v} \wedge \vec{w}|$

Exercicio:



Calcula a área do triángulo de vértices A(2,-3,1), B(-5,1,2) e C(4,-2,-3)

Solución:

Tendo en conta que o módulo do produto vectorial de dous vectores coincide coa área do paralelogramo que determinan, podemos simplemente calcular os vectores que van dun deses puntos aos outros. A área do triángulo será a metade da do paralelogramo que forman.

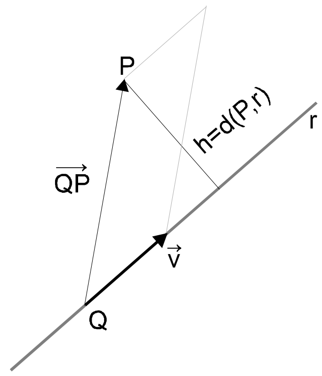
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-7,4,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,1,-4)\end{array}\right\} \quad \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(-17)^2 + (-26)^2 + (-15)^2}}{2} = 17'25$$

Distancia dun punto a unha recta

Definimos a distancia dun punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a unha recta r como a distancia de P á súa proxección ortogonal sobre a recta.

Para calculala basta ter en conta que a distancia de P a r coincide coa altura do paralelogramo formado polos vectores $\overrightarrow{QP}$ (Q un punto calquera da recta) e $\vec{v}$.

A altura do paralelogramo é igual á súa área dividida entre a base:



$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

Producto mixto de tres vectores

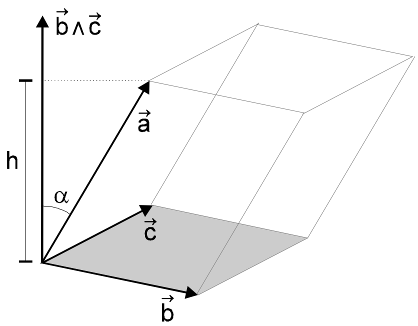
Dados $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, vectores de V^3. Definimos o seu **produto mixto** como o produto escalar de $\vec{a}$ polo produto vectorial de $\vec{b}$ e $\vec{c}$:

Tendo en conta como se calcula o produto escalar e o produto vectorial de tres vectores, podemos escribir;

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

O produto mixto de tres vectores calcúlase como o determinante da matriz formada coas súas compoñentes.



Interpretación xeométrica

O valor absoluto do produto mixto de tres vectores é igual ó volume do paralelepípedo que determinan eses vectores:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{base} \cdot h.$$

Lembra que:

- O módulo do produto vectorial de dous vectores coincide coa área do paralelogramo que determinan: $A_{base} = \left|\vec{b} \wedge \vec{c}\right|$
- A altura é a proxección do vector $\vec{a}$ sobre un vector perpendicular a base, por exemplo o vector produto escalar dos outros dous: $h = prox_{\vec{b}\wedge\vec{c}}(\vec{a}) = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha)$

Obtemos polo tanto, que o valor absoluto produto mixto de tres vectores coincide co volume do paralelepípedo que forman:

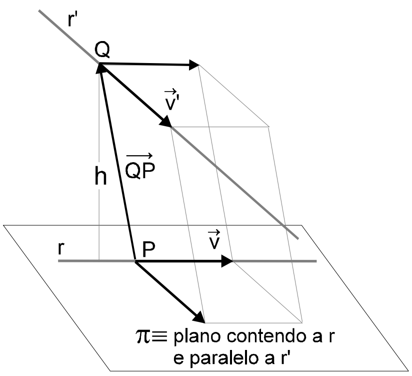
$$\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b} \wedge \vec{c}\right| \cdot \cos(\alpha) = h \cdot \left|\vec{b} \wedge \vec{c}\right| = h \cdot A_{base} = V$$

Distancia entre dúas rectas

Rectas que se cortan ou coincidentes: A distancia é 0.

Rectas paralelas: A distancia será igual á distancia dun punto calquera dunha das rectas á outra.

Rectas que se cruzan: A distancia entre elas será a distancia mínima entre os seus puntos.



Un xeito de calculala é atopar a ecuación do plano que contén a unha das rectas e é paralelo á outra. A distancia desa recta ó plano coincide coa distancia entre as rectas.

Un segundo método é semellante ó correspondente á distancia dun punto a unha recta pero utilizando o produto mixto.

A distancia entre as rectas r e r' é igual á altura do paralelepípedo que determinan os vectores $\overrightarrow{QP}$ (P e Q puntos de r e r'), $\vec{v}$ (vector de dirección de r) e $\vec{v}'$ (vector de dirección de r') e, polo tanto, é o volume do paralelepípedo dividido entre área da base:

$$d(r,r') = \left| \frac{\left[\overrightarrow{QP},\vec{v},\vec{v}'\right]}{\left|\vec{v} \wedge \vec{v}'\right|} \right|$$

Observa que o determinante do numerador da fórmula permite coñecer a posición relativa das rectas pois:

- Se é 0 significa que os vectores non nulos $\overrightarrow{QP}$, $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ teñen que estar contidos nun mesmo plano, cousa que só pode suceder si:
    - o As rectas son paralelas. Nese caso, as compoñentes de $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ son proporcionais.
    - o As rectas son coincidentes. As compoñentes de $\overrightarrow{QP}$, $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ son proporcionais.
    - o As rectas córtanse. Un dos vectores $\overrightarrow{QP}$, $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ é combinación dos demais pero $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ non teñen a mesma dirección (as súas compoñentes non son proporcionais).
- Se o produto mixto é distinto de 0, indica que os vectores $\overrightarrow{QP}$, $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ non están no mesmo plano, algo que só pode acontecer se as rectas se cruzan sen cortarse.

Exemplo:

Calcular a distancia entre as seguintes rectas que se cruzan:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2} \quad \text{e} \quad r' \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

Calculamos a ecuación do plano contendo a r e paralelo a r':

P(1,-2,3) un punto, $\vec{v}(1,1,2)$ e $\vec{v}'(-1,1,-1)$ vectores de dirección:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = -2 + \alpha + \beta \\ z = 3 + 2\alpha - \beta \end{array}\right\} 3x + y - 2z = -5$$

Distancia de r' ó plano: por seren paralelos é a distancia de calquera dos puntos da recta ao plano. Tomamos o que facilita a propia ecuación de r´:

$$d(r',\pi) = \left|\frac{3\cdot 0 + 1\cdot 4 - 2\cdot 1 + 5}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

En xeral, será necesario estudar antes a posición relativa para comprobar que efectivamente son rectas que se cruzan.

O método que emprega o produto mixto evita ter que facer esa comprobación.

Exemplo:

Calcular a distancia entre as seguintes rectas que se cruzan:

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{3} \quad \text{e} \quad r' \equiv \frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{5}$$

Solución:

A distancia entre as rectas ven dada por: $d(r,r') = \left| \frac{\left[\overrightarrow{QP}, \vec{v}, \vec{v}'\right]}{\left|\vec{v} \wedge \vec{v}'\right|} \right|$

Necesitamos:

- Un vector de dirección de cada recta: $\vec{v} = (-2,1,3)$ e $\vec{v}' = (4,-2,5)$.
- Un punto de cada recta: P(2,-1,4) e P’(0,0,-4) proporcionan o vector $\overrightarrow{PP'} = (2,-1,8)$

A distancia entre as rectas será:

$$d(r,r') = \left| \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\sqrt{11^2 + (-22)^2 + 0^2}} \right| = 0$$

A distancia entre as rectas é 0: son rectas que se cortan nun punto (están contidas no mesmo plano e non son paralelas pois teñen dirección distintas).