

Boletín 14. Matrices y determinantes

1. Escribe matrices que cumplan estas condiciones.

a) Diagonal de orden 3.

b) Triangular superior con tres columnas, de forma que los elementos distintos de 0 cumplan que $a_{ij} = i + j$.

2. Clasifica las matrices y determina su dimensión

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

3. Realiza las siguiente operación con matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Haz la siguiente operación con matrices

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Realiza los productos que sean posibles entre las matrices A, B y C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Comprueba si se cumple que $A \cdot (B+C) = B \cdot A + C \cdot A$, siendo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si no es cierto, aplica correctamente la propiedad

7. Realiza esta operación con matrices

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t \right]$$

8. a) Estudia si la matriz $A+B$ es simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$$

9. (La Rioja 2000) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$ siendo las matrices A y B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

10. Determina el rango de las siguientes matrices

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

11. Calcula el rango utilizando el método de Gauss

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Calcula, si es posible, la inversa de estas matrices utilizando la definición

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Halla por el método Gauss-Jordan, la inversa de las matrices

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}; \text{b) } \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}; \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. (Asturias 2001) Sea A una matriz $m \times n$.

a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

c) Busca una matriz B tal que $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. (Cataluña 2006) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule AB y BA

b) Compruebe que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

16. (Madrid 2006) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar $(A-I)^2$

b) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior

17. (Galicia 2019). Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA+B=C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA+B=C$ si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

18. (Galicia 2019). Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A+I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A-X=AX$.

b) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; calcula X tal que $A-X=AX$.

19. (Galicia 2018).

a) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; calcula los valores de m para que la matriz inversa de M sea $\frac{1}{4} \cdot M$

b) Dadas las matrices $A = (-1 \ 0 \ 1)$, $B = (3 \ 0 \ 1)$ y $C = (4 \ -2 \ 0)$, calcula la matriz X que verifica: $B^T \cdot A \cdot X + C^T = X$, siendo B^T y C^T las traspuestas de B y C respectivamente.

20. (Galicia 2018). Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Que relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^T ?

b) Estudia, según los valores de λ , el rango de $A-\lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden

3. Calcula las matrices X que verifican $AX+X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

21). (Galicia 2016). Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha-2 & 1 \\ \alpha-1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, según los valores de α , el rango de A . Calcula, si existe, la inversa de A cuando $\alpha = 0$

b) Para $\alpha = 0$ calcula la matriz B que verifica $ABA^{-1} - A = 2I$

c) Para $\alpha = 1$, calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

22). (Galicia 2016).

a) Calcula todas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$; de rango 2 tales que su inversa sea $A-2I$ es decir, $A^{-1}=A-2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2.

b) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$

i) Calcula, según los valores de m el rango de M

ii) Para el valor $m = -1$, calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $MX=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

23. Sean I y A las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Calcular, escribiendo las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^5

b) Los números reales a y b para los que se verifica $(I+A)^3 = a \cdot I + b \cdot A$

24. Calcula el rango de A y B según los valores del parámetro k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & k \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

25. Razona si existe la matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y en caso afirmativo, halla B^{-1} .

Resuelve la ecuación matricial $BX + 2B = I$, donde I es la matriz identidad

26. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6,$$

Determina sin desarrollar los siguientes determinantes

$$a) \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d/3 & e/3 & f/3 \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 2b & c+3a & a/5 \\ 2e & f+3d & d/5 \\ 2h & i+3g & g/5 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix}$$

27. Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene de determinante n , averigua el valor del determinante de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

28. A , B y C son tres matrices cuadradas tales que $\det(A) = 5$, $\det(B) = 4$ y $\det(C) = 2$. Calcula razonadamente el valor de los determinantes de las siguientes matrices

a) A^T b) B^{-1} c) $A \cdot B^{-1}$ d) $A^{-1} \cdot B$ e) $(BC)^{-1}$ f) $C^{-1}B^T$

Soluciones

1)

$$\begin{matrix} & a & & b \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2)

- A. Matriz fila de dimensión 1x3
- B. Matriz columna de dimensión 3x1
- C. Matriz cuadrada de orden 3
- D. Matriz diagonal de orden 2
- E. Matriz identidad de orden 2
- F. Matriz triangular inferior de orden 3
- G. Matriz rectangular de dimensión 2x3
- H. Matriz triangular superior de orden 3
- I. Matriz triangular inferior de orden 2

3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

5) No son posibles los productos A·C y B·C

$$\begin{matrix} A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -13 & 11 \end{pmatrix} & B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -8 \\ 8 & -3 & 13 \end{pmatrix} \\ B \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 7 & 0 \\ -11 & 2 \end{pmatrix} & C \cdot A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -14 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

6)

$$A \cdot (B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} ; B \cdot A + C \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; AB+AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot (B+C) = AB+AC$ es la igualdad correcta

7)

$$\begin{pmatrix} -6 & 60 \\ 27 & 33 \end{pmatrix}$$

8)

- a) No es simétrica
- b) $a = 0$, $b = -2$, $c = -1$, $d = 3$, $e = 0$.

9)

$$A \cdot B = -4$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

10)

a) Rango = 2

b) Rango = 1

11)

a) Rango = 3

b) Rango = 2

12)

a) No existe matriz inversa

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

13)

$$a) \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-2}{6} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}; c) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

14)

a) Para que BA sea una matriz fila, la matriz B tiene que ser una matriz de dimensión $1 \times m$, y la dimensión del producto es $1 \times n$.

b) El número de filas de la matriz AB no depende de la matriz B, sino que es igual al número de filas de la matriz A, que es m. Solo es posible obtener una matriz fila si A es también una matriz fila.

c) $B = (0 \ 0 \ c); c \in \mathbb{R}$

15)

$$a) AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Se desarrolla el cuadrado $(A+B)^2$

16)

$$a) a)(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; b)(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

17)

$$a) X = (C-B) \cdot A^{-1}$$

$$b) X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

18)

$$a) X = (A+I)^{-1} \cdot A$$

$$b) X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

19)

$$a) m = -1$$

$$b) X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

20)

$$a) A^T = A^{-1}$$

$$b) \text{ Si } \lambda = -1 \text{ rango } (A - \lambda I) = 2. \text{ Si } \lambda \neq -1 \text{ rango } (A - \lambda I) = 3. \quad X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

21)

$$a) \text{ Si } \alpha = 1 \text{ rango } (A) = 2. \text{ Si } \alpha \neq 1 \text{ rango } (A) = 3. \text{ Si } \alpha = 0, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

22)

$$a) A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$i) \text{ Si } m = -1 \text{ o } m = -3, \text{ Rango } (M) = 2. \text{ Si } m \neq -1 \text{ o } m \neq -3; \text{ Rango } (M) = 3$$

$$ii) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

23)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^5 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix};$

b) $a = 2; b = -2$

24)

Matriz A. Si $k = 4$, $\text{rango}(A) = 1$. Si $k \neq 4$, $\text{rango}(A) = 2$

Matriz B. Si $k = \frac{-1 + \sqrt{61}}{6}$ o $k = \frac{-1 - \sqrt{61}}{6}$, $\text{rango}(B) = 2$.

Si $k \neq \frac{-1 + \sqrt{61}}{6}$ y $k \neq \frac{-1 - \sqrt{61}}{6}$, $\text{rango}(B) = 3$.

25) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

26)

a) 4. b) 6. c) $12/5$

27)

$\det(B) = 36n$

28)

a) 5 b) $1/4$ c) $5/4$ d) $4/5$ e) $1/8$ f) 2