

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Manejar las expresiones algebraicas y calcular su valor numérico.
- Reconocer los polinomios y su grado.
- Sumar, restar y multiplicar polinomios.
- Sacar factor común.
- Conocer y utilizar las identidades notables.

Antes de empezar

1. Monomios y Polinomios pág. 4
Expresiones algebraicas
Expresión en coeficientes
Valor numérico de un polinomio

2. Operaciones con polinomios pág. 6
Suma y diferencia
Producto
Factor común

3. Identidades notables pág. 8
Suma al cuadrado
Diferencia al cuadrado
Suma por diferencia

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

Antes de empezar



8h. 17m. 16s.
 $(8 \cdot 60^2 + 17 \cdot 60 + 16)s.$

12 falanges que se cuentan con el pulgar, dan lugar al sistema de base 12.





Valor

$3^2 + 3 + 17 = 29$

$x^2 + x + 17$



Valor

$7^2 + 7 + 17 = 73$

$x^2 + x + 17$

Expresiones polinómicas y valor numérico

Si el número 235 está dado en **base 10** su expresión polinómica es

$2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$, valor numérico en **10** de la expresión $2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5$.

Para medir ángulos o el tiempo se usa la **base sexagesimal**, así 2 horas 3 minutos 5 segundos es igual a

$2 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60 + 5$ segundos, valor numérico en **60** de $2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5$.

Para expresar la cantidad de color se utiliza el sistema de **base 16** o **hexadecimal**, así 48 en este sistema es igual a

$4 \cdot 16 + 8$ en base 10, valor numérico en **16** de la expresión $4 \cdot x + 8$.

El lenguaje de los ordenadores está basado en el **sistema binario o de base 2**, con solo dos cifras el 0 y el 1; el valor decimal de la expresión binaria 11001 es

$2^4 + 2^3 + 1$, valor numérico en **2** de la expresión $x^4 + x^3 + 1$.

Polinomios

1. Monomios y polinomios

Expresiones algebraicas

Son muchas las situaciones en las que se utilizan expresiones algebraicas (sumas, diferencias, productos cocientes y potencias de números y letras), en la derecha se presentan algunas.

Cuando la expresión algebraica es de estos tipos:

$$3xy^2; 2x^{10}; \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot y^5$$

solo con productos de números y potencias de variables de exponente natural, se denomina **monomio**. La suma de varios monomios es un **polinomio**.

Observa cómo se determinan el **grado** y los **coeficientes** de los ejemplos:

$3xy^4$ es un monomio de dos variables con **coeficiente 3** de **grado 5**, uno por la x y cuatro por la y.

El coeficiente de $\frac{3}{4} x^2 y^5$ es $\frac{3}{4}$ y su **grado 7**.

El polinomio $3x^5 + 4x^2 - 2$ es de **grado 5**, el mayor grado de sus monomios, sus coeficientes son:

3 de grado 5, **0** de 4, **0** de 3, **4** de 2, **0** de 1 y **-2** de 0.

Expresión en coeficientes

Un polinomio se puede definir mediante la expresión en coeficientes que consiste en dar todos sus coeficientes ordenados, empezando por el de grado mayor y terminando por el de grado cero así $x^2 + 2x$ se expresa por **1 2 0**.

Más ejemplos

Polinomio	Coeficientes
$\sqrt{2} x^3$	$\sqrt{2}$ 0 0 0
$2x^3 - \frac{4}{5}$	2 0 0 $-\frac{4}{5}$
$x^3 + 4x^2 + 3x - 2$	1 4 3 -2

Es claro que dos polinomios son iguales si y solo si coinciden sus expresiones en coeficientes.

Valor numérico de un polinomio

La notación numérica que utilizamos tiene mucho que ver con los polinomios. Si en el polinomio de coeficientes **5 2 3**,

$$5x^2 + 2x + 3$$

sustituimos la x por 10, resulta

$$5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 = 523,$$

hemos vuelto a la expresión en coeficientes del polinomio, igual ocurre en el sistema sexagesimal con el que contamos las horas, minutos y segundos, si en el polinomio anterior sustituimos la x por 60

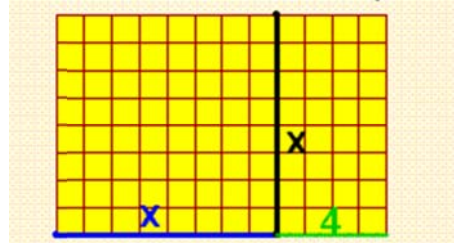
$$5 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 3$$

obtenemos los 18123 segundos que hay en

$$5 \text{ horas } 2 \text{ minutos y } 3 \text{ segundos.}$$

523 es el valor numérico del polinomio en 10 y 18123 es el valor numérico de ese mismo polinomio en 60.

a) Halla la expresión algebraica que da el número de cuadraditos del rectángulo.



b) ¿Qué monomio nos da los km recorridos a una velocidad de x km/h durante t horas?



Soluciones: a) $x^2 + 4x$ b) $x \cdot t$

Polinomio
$3x^4 + 0x^3 + 1x^2 + (-5)x^1 + 3x^0$
Manera usual de escribir el polinomio
$3x^4 + x^2 - 5x + 3$

$$P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2$$

$$Q(x) = x^5 + ax^4 - 2x^3 - 4x^2$$

Si $P(x) = Q(x)$, $a = 2$

$$P(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}$$

Valor de x $\rightarrow -1$

$$P(-1) = -\frac{5}{3}(-1)^3 + \frac{5}{6}(-1)^2 + \frac{3}{4}$$

Valor del polinomio en -1 $\rightarrow \frac{13}{4}$


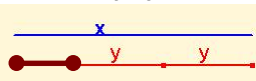
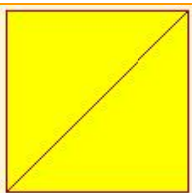
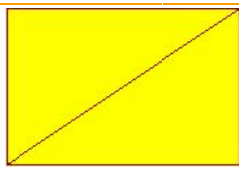


Puedes utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de un polinomio. Recuerda que para realizar la potencia 2^4 se utiliza la tecla x^y ,

$$2 \text{ } x^y \text{ } 4 = \rightarrow 16$$

EJERCICIOS resueltos

1. Halla las expresiones algebraicas asociadas a cada imagen

<p>x</p> <p>Área del rectángulo</p> <p>y</p>	 <p>Volumen, arista=x</p>	<p>Longitud del segmento marrón</p> 	<p>Qué polinomio expresa la media aritmética de dos números x, y</p>
<p>El triple de un número menos cinco</p>	<p>La suma de los cuadrados de dos números</p>	 <p>La diagonal de un cuadrado de lado x</p>	 <p>La diagonal de un rectángulo de base x y altura y</p>

Soluciones

$x \cdot y$ Polinomio de grado 2 y dos variables	x^3 Monomio de grado 3	$x-2y$ Polinomio de grado 1 Dos variables	$0,5x+0,5y$ Polinomio de grado 1 Dos variables
$3x-5$ Polinomio de grado 1 Una variable	x^2+y^2	$\sqrt{2} \cdot x$	$\sqrt{x^2 + y^2}$

- 2.

x **-4** El grado de P(x) es **7**
-5 **-2** El coeficiente de mayor grado es **-2**
+5 **x⁷** El coeficiente de grado 3 es **-5**
x⁵ **x²** El coeficiente de grado 2 es **-3**
x³ **-3** El coeficiente de grado 1 es **5**
 Los demás coeficientes son cero

Solución **$P(x) = -2x^7 - 4x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 5x$**

3. Halla la expresión en coeficientes de los polinomios $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$; $Q(x) = x^3 - 4$; $R(x) = 0,5x^2 + 3x$

Las respectivas expresiones en coeficientes son:

$P(x) \rightarrow 3 \ -2 \ 1$; $Q(x) \rightarrow 1 \ 0 \ 0 \ -4$; $R(x) \rightarrow 0,5 \ 3 \ 0$

4. Escribe las expresiones polinómicas de los polinomios cuya expresión en coeficientes es:

$P(x) \rightarrow 1 \ 0 \ 3 \ -1$; $Q(x) \rightarrow 3 \ 2 \ 0 \ 0$; $R(x) \rightarrow 3/2 \ -3 \ 0 \ 5$

$P(x) = x^3 + 3x - 1$; $Q(x) = 3x^3 + 2x^2$; $R(x) = 3/2 x^3 - 3x^2 + 5$

5. Halla el valor numérico en 1, 0 y -2 de los siguientes polinomios:

POLINOMIO	Valor en 1	Valor en 0	Valor en -2
$x^5 - 2x^3 - x^2$	-2	0	-20
$x^2/5 - 1$	-5/5	-1	-1/5
$-2x^3 + \pi x^2$	$-2 + \pi$	0	$16 + 4\pi$
$-x^3 + 1,2x^2 - 1/5$	0	-1/5	63/5
$-\sqrt{2} x^2 + 1$	$-\sqrt{2} + 1$	1	$-4\sqrt{2} + 1$

Polinomios

2. Operaciones

Suma y diferencia

Para sumar o restar polinomios se juntan los monomios de igual grado y se suman o restan

$$\begin{aligned} P(x) &= 5x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\ Q(x) &= 6x^3 + 7x^2 + 5x + 1 \\ P(x) + Q(x) &= 5x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = \\ &= 5x^3 + 6x^3 + 2x^2 + 7x^2 + 3x + 5x + 4 + 1 = \\ &= 11x^3 + 9x^2 + 8x + 5 \end{aligned}$$

Análogamente

$$P(x) - Q(x) = -x^3 - 5x^2 - 2x + 3$$

Para operar con polinomios puede resultar cómodo pasar a su expresión en coeficientes.

$$\text{Suma } P(x) = 8x^4 + x^2 - 5x - 4$$

$$Q(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 2$$

Se suman los coeficientes de igual grado:

P(x) →	8	0	1	-5	-4
Q(x) →		3	1	-3	-2
P(x)+Q(x) →	8	3	2	-8	-6

$$P(x) + Q(x) = 8x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 8x - 6$$

Producto

Los polinomios se multiplican monomio a monomio, aplicando la propiedad distributiva del producto, así si $P(x) = 2x^3 + 3x + 4$ y $Q(x) = x^2 + 5x$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^3 + 3x + 4) \cdot (x^2 + 5x) = \\ &= 2x^3x^2 + 3xx^2 + 4x^2 + 2x^35x + 3x5x + 4 \cdot 5x = \\ &= 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 10x^4 + 15x^2 + 20x \end{aligned}$$

Y ordenamos los monomios según su grado,

$$\begin{aligned} 2x^5 + 10x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 15x^2 + 20x &= \\ = 2x^5 + 10x^4 + 3x^3 + 19x^2 + 20x \end{aligned}$$

$$P(x) = 3x^3 + 5x - 4$$

$$Q(x) = x^2 - x + 2$$

Se multiplican coeficiente a coeficiente:

P(x) →	3	0	5	-4		
Q(x) →			1	-1	2	
		6	0	10	-8	
		-3	0	-5	4	
	3	0	5	-4		
P(x)·Q(x) →	3	-3	11	-9	14	-8

$$P(x) \cdot Q(x) = 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 9x^2 + 14x - 8$$

Factor x^n

Dos monomios pueden tener como factor común una potencia de x y un factor de sus coeficientes. Los monomios del siguiente polinomio

$$6x^5 + 15x^2$$

tienen en común la potencia x^2 pues $x^5 = x^3 \cdot x^2$

$$6x^3x^2 + 15x^2 = (6x^3 + 15)x^2$$

y sus coeficientes, 6 y 15 tienen como factor común el número 3 pues $6 = 2 \cdot 3$ y $15 = 5 \cdot 3$,

$$(6x^3 + 15)x^2 = (2 \cdot 3 \cdot x^3 + 5 \cdot 3)x^2 = (2x^3 + 5)3x^2$$

$$\text{Diferencia } P(x) = 3x^3 + x^2 + 5x + 4$$

$$Q(x) = 3x^3 + 3x + 2$$

Se restan los coeficientes de igual grado:

P(x) →	3	1	5	4
Q(x) →	3	0	3	2
P(x)-Q(x) →		1	2	2
P(x)-Q(x) =		x^2	$+ 2x$	$+ 2$

Observa el grado del resultado:
 $\text{gr}(P \pm Q) \leq \max(\text{gr}(P), \text{gr}(Q))$

Para multiplicar el paréntesis por 4 hay que multiplicar los dos monomios.

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x) \cdot 4 &= \\ (x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4) &= \end{aligned}$$

$$\text{gr}(P \cdot Q) = \text{gr}(P) + \text{gr}(Q)$$

$$\begin{aligned} 2x^9 + x^6 - 3x^4 &= \\ = 2x^4 \cdot x^5 + x^4 \cdot x^2 - 3 \cdot x^4 &= \end{aligned}$$

x^4 está en todos los sumandos.

$$\begin{aligned} 2x^9 + x^6 - 3x^4 &= \\ = x^4 \cdot (2x^5 + x^2 - 3) &= \end{aligned}$$

Se ha sacado factor común una potencia de x .

$$P(x) = 18x^6 + 27x^4$$

$$\text{Factor común} \rightarrow 9x^4$$

$$P(x) = (2x^2 + 3)9x^4$$

EJERCICIOS resueltos

6. Halla $P(x)+Q(x)$ y $3\cdot P(x)-Q(x)$

$$P(x)=x^4+2x^3+3x \quad Q(x)=2x^3+x^2-3x+5$$

$$\begin{array}{rcccccc} P(x) \rightarrow & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ Q(x) \rightarrow & & 2 & 1 & -3 & 5 \\ P(x)+Q(x) \rightarrow & 1 & 4 & 1 & 0 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{rcccccc} 3\cdot P(x) \rightarrow & 3 & 6 & 0 & 9 & 0 \\ Q(x) \rightarrow & & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3\cdot P(x)-Q(x) \rightarrow & 3 & 4 & -1 & 12 & -5 \end{array}$$

$$P(x)+Q(x)=x^4+4x^3+x^2+5$$

$$3\cdot P(x)-Q(x)=3x^4+4x^3-x^2+12x-5$$

7. Multiplica $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$ por $Q(x)=x^3+3x^2+5x-2$

$P(x) \rightarrow$	<u>1</u>	6	4	-6				
$Q(x) \rightarrow$	<u>1</u>	3	5	-2				
					-2	-12	-8	12
						5	30	20
							3	18
								12
$P(x)\cdot Q(x) \rightarrow$	1	9	27	34	-10	-38	12	

$$P(x)\cdot Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12$$

8. Suma $P(x)$ y $Q(x)$

Multiplica $P(x)$ y $Q(x)$

$$\begin{array}{l} P(x)=5x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{5}x \\ Q(x)=x^3-\frac{5}{2}x \\ P(x)-Q(x)=4x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{17}{10}x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P(x)=-5x^{10}+2x^8 \\ Q(x)=-5x^9+x^8 \\ P(x)\cdot Q(x)=25x^{19}-5x^{18}-10x^{17}+2x^{16} \end{array}$$

9. Sacar factor común

$P(x)=4x^{13}-4x^{11}-6x^5-3x^4$	$P(x)=x^4\cdot(4x^9-4x^7-6x-3)$
$P(x)=-8x^{10}+6x^9-2x^3-4x^2$	$P(x)=-2x^2\cdot(4x^8-3x^7+x+2)$
$P(x)=6x^5+x^2-4x$	$P(x)=x\cdot(6x^4+x-4)$

EJERCICIOS resueltos

10. Observa cómo se aplican las identidades notables

Para desarrollar $(x+5)^2$

Cuadrado del $1^0 \rightarrow x^2$. Doble del 1^0 por el $2^0 \rightarrow 2 \cdot x \cdot 5 = 10x$. Cuadrado del $2^0 \rightarrow 5^2 = 25$
por tanto $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

Para descomponer el polinomio $x^2 - 8x + 16$ se intenta ver uno de los miembros de una identidad notable, al ser los signos de los coeficientes alternativos, + - +, se compara con la diferencia al cuadrado.

$$16 = 4^2 \text{ y } 8x = \text{doble de } x \text{ por } 4 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$$

Para descomponer el polinomio $4x^2 - 9$ se intenta ver si es una identidad notable, al ser 0 el coeficiente de grado uno se compara con la diferencia de cuadrados

$$4x^2 = (2x)^2; 9 = 3^2 \rightarrow 4x^2 - 9 = (2x+3) \cdot (2x-3)$$

11. Desarrolla las siguientes expresiones

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$(x+1)^2$	$x^2 + 2x + 1$	$(x-1)^2$	$x^2 - 2x + 1$
$(2x+1)^2$	$4x^2 + 4x + 1$	$(3-2x)^2$	$4x^2 - 12x + 9$
$(3x/2+5)^2$	$9x^2/4 + 15x + 25$	$(x/3-2)^2$	$x^2/9 - 4x/3 + 4$
$(\sqrt{2}x+2)^2$	$2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4$	$(x-\sqrt{3})^2$	$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

12. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Productos	Solución	Productos	Solución
$(x+2) \cdot (x-2)$	$x^2 - 4; 1 \quad 0 \quad -4$	$(x-1/4) \cdot (x+1/4)$	$1 \quad 0 \quad -1/16$
$(3x+7) \cdot (3x-7)$	$9 \quad 0 \quad -49$	$(1+\sqrt{2}x) \cdot (1-\sqrt{2}x)$	$-2 \quad 0 \quad 1$

13. Resuelve aplicando las identidades notables la ecuación $x^2 + 10x + 9 = 0$

Se compara la primera parte, $x^2 + 10x$, con una identidad notable, con $(x+5)^2$
Pues $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$, por tanto, $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$
y el primer miembro de la ecuación es $x^2 + 10x + 9 = (x+5)^2 - 25 + 9$,

$$(x+5)^2 - 16 = 0 \rightarrow (x+5)^2 - 4^2 = 0 \rightarrow (x+5+4) \cdot (x+5-4) = 0 \rightarrow \text{Soluciones } x = -9 \text{ y } x = -1$$

14. Aplica las identidades notables para descomponer en factores los siguientes polinomios

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$4x^2 + 12x + 9$	$(2x+3)^2$ o $9(2x+1)^2$	$49x^2 - 36$	$(7x+6) \cdot (7x-6)$
$36x^2 + 36x + 9$	$(6x+3)^2$ o $9(2x+1)^2$	$25x^2 - 9/4$	$(5x+3/4) \cdot (5x-3/4)$
$6x^5 - 12x^4 + 6x^3$	$6x^2(x-1)^2$	$4x^2 - 3$	$(2x + \sqrt{3}) \cdot (2x - \sqrt{3})$

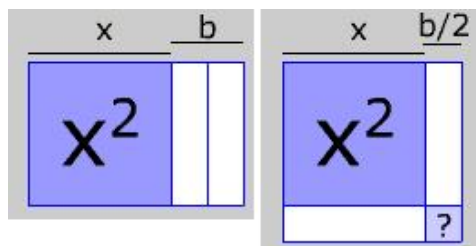
15. Escribe 7^2 como la diferencia de los cuadrados de dos números naturales.

49 es la suma de dos números consecutivos, por tanto, $49 = 25^2 - 24^2$.



Para practicar

- Halla la expresión algebraica de un número de cuatro cifras, $xyzt$, sabiendo que la cifra de las unidades es tres veces la cifra de las decenas.
- De lunes a jueves camino x Km. diarios y de viernes a domingo, 6 Km. cada día. Halla la expresión algebraica que da los Km. que camino en z semanas
- Si practico ciclismo a una velocidad media de 45 Km./h. Durante t horas al mes. ¿Cuántos Km. hago al cabo de un año?
- Mi sueldo mensual es de 1400€. Cada año aumenta un $x\%$. Calcula el sueldo mensual dentro de dos años.
- $2 \cdot \pi \cdot \text{radio}$ es la expresión que define la longitud de la circunferencia en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿la longitud para un radio de 3 cm?
- $\pi \cdot \text{radio}^2$ es la expresión que define el área del círculo en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el área para un radio de 12 cm?
- $4 \cdot \pi \cdot \text{radio}^2$ es la expresión que define el área de la esfera en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el área para un radio de 15 cm?
- $4 \cdot \pi/3 \cdot \text{radio}^3$ es la expresión que define el volumen de la esfera en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el volumen para un radio de 6 cm?
- ¿Cuál es el grado del polinomio $-4x^3 - 6x^2$? ¿Cuál es su coeficiente de grado dos? ¿y el de grado uno? Calcula su valor numérico en $x = -1$
- ¿Qué fracción de hora son 51 minutos y 14 segundos? ¿Sabes expresarla como el valor numérico de un polinomio de 2º grado?
- ¿Cuántos segundos hay en 5h. 35min. y 53 seg.? ¿Sabes expresarlos como el valor numérico de un polinomio de 2º grado?
- ¿Cuántas unidades hay en 5 masas, 8 gruesas y 6 docenas? ¿Sabes expresarlas como el valor numérico de un polinomio de tercer grado?
Una masa = 12 gruesas, una gruesa = 12 docenas, una docena = 12 unidades.
- Halla los coeficientes de $P(x) \cdot 3 \cdot Q(x)$
 $P(x) = -7x^3 + 2x^2 - x - 2$
 $Q(x) = 6x^3 - 2x^2 + x - 2$
- Halla los coeficientes de $P(x) \cdot Q(x)$
 $P(x) = 7x^2 + 5x$ $Q(x) = -4x^3 + 7x^2 - x - 3$
- Saca factor común en el polinomio $4x^{12} + 24x^7$
- ¿Cuántas unidades tienes que añadir a $x^2 + 16x$ para convertir este binomio en el cuadrado de otro binomio?



- Calcula a) $(x+6)^2$ b) $(-2x+5)^2$
c) $(2x-3/2) \cdot (2x+3/2)$
- Calcula mentalmente $32^2 - 31^2$ y $19 \cdot 21$
- Halla la expresión algebraica que define el producto de tres números enteros consecutivos. Toma como x el número central.
- Simplifica las fracciones
a) $\frac{x^2 + 4x + 4}{3x + 6}$ b) $\frac{4x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1}$
c) $\frac{4x^2 + 4x + 1}{8x^2 - 2}$ d) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x^2 - 2y^2}$