Determinante dunha matriz cadrada

Matrices 2x2: Chamarémoslle determinante dunha matriz cadrada de orde 2x2 ao número obtido pola seguinte expresión: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

Matrices 3x3: o determinante é:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

Para lembrar esa expresión utilízase a **Regra de Sarrus**:

Productos positivos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Productos negativos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Para calcular o determinante só queda sumar os produtos.

Propiedades dos determinantes

- **determinante dunha matriz é igual ó da súa trasposta:** $\det(A)=\det\left(A^t\right)$ En consecuencia, tódalas propiedades dos determinantes que fan referencia ás filas, tamén son válidas para as columnas, e viceversa.
- **Multilinealidade:**
  - O determinante dunha matriz que ten unha columna suma doutras dúas, é igual á suma dos determinantes das matrices nas que esa columna está formada por cada un dos sumandos:
  $$\det\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
  - O determinante dunha matriz cunha columna multiplicada por un número é igual ao determinante da matriz multiplicado polo número: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ a_{21} & \alpha\cdot a_{22} \end{pmatrix}=\alpha\cdot\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

As seguintes propiedades son consecuencia da multilinealidade dos determinantes:

- **O determinante dunha matriz cunha columna (ou fila) de ceros, é 0:** $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}=0$
- **O determinante dunha matriz con dúas columnas (ou filas) iguais, é 0:** $\det\begin{pmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{pmatrix}=0$
- **O determinante dunha matriz que ten unha columna combinación lineal das demais, é 0:**
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha a_{11}+\beta a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha a_{21}+\beta a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha a_{31}+\beta a_{32} \end{pmatrix}=0$$
- Consecuencia destas propiedades é que podemos utilizar os determinantes para estudar a dependencia ou independencia dun conxunto de vectores: **determinante dunha matriz non varía se a unha columna se lle suma unha combinación lineal das demais:**
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\left(\alpha a_{11}+\beta a_{12}\right) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\left(\alpha a_{21}+\beta a_{22}\right) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\left(\alpha a_{31}+\beta a_{32}\right) \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Rango dunha matriz

O **rango** dunha matriz é o número de filas (consideradas como vectores) linealmente independentes.
Como coincide co número de columnas linealmente independentes, o rango é o número de filas ou columnas independentes.

Inversa dunha matriz cadrada

- Unha matriz ten inversa se e só se o seu determinante é distinto de 0.
- Cálculo da matriz inversa "por adxuntos": a inversa dunha matriz A de orde *nxn* é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ onde A_{ij} é o adxunto de a_{ij}

O proceso a seguir é o seguinte:

- Calcúlase o determinante: Se det(A)=0 a matriz non ten inversa. Se det(A)≠0, continuamos:
- Obtense a matriz trasposta: A^t.
- Calcúlase a matriz adxunta, formada polos adxuntos, da matriz trasposta.
- A inversa é a matriz adxunta da trasposta dividida entre o determinante.