Unidade 2: Matrices e determinantes

Programa:

Determinante dunha matriz cadrada

Matrices 2x2: Chamarémoslle determinante dunha matriz cadrada de orde 2x2 ao número obtido pola seguinte expresión:

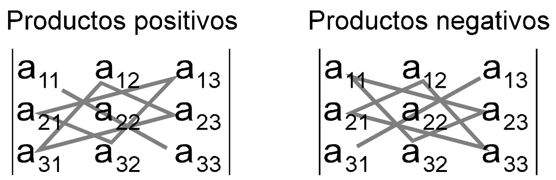
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Matrices 3x3: No caso de matrices 3x3, o determinante é máis complicado:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

Fíxate que en cada produto hai un termo de cada fila, situado en diferente columna. Para lembrar máis facilmente esa expresión utilízase, entre outros recursos, a **Regra de Sarrus**:



Para calcular o determinante só queda sumar os produtos.

Caso xeral: Podemos calcular o determinante dunha matriz desenvolvéndoo polos elementos dunha fila ou dunha columna. Para a columna *k* sería:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik}$$

Onde A_{ik} é o determinante da matriz que resulta ao suprimir a fila *i* e a columna *k* multiplicado por $(-1)^{i+k}$. A_{ik} chámase **adxunto** de a_{ik}.

Determinantes.

O concepto de determinante non é tan "artificioso" como pode parecer.

Queremos atopar un método que nos permita pescudar se unha matriz cadrada ten inversa e, en caso afirmativo, calculala.

Vexamos como para o caso de matrices 2x2:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}=1 \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}=0 \\ a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}=0 \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}=1 \end{matrix}$$

Dividimos ese sistema en dous sistemas 2x2 e resolvémolos por redución:

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}=1 \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}=0 \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}=1 \end{matrix}\right\}$$

1º Sistema:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_{11}=a_{22}$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_{21}=-a_{21}$$
$$x_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$
$$x_{21}=\frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

2º Sistema:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_{12}=-a_{12}$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_{22}=a_{11}$$
$$x_{12}=\frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$
$$x_{22}=\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Queda:

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Para que esa matriz exista, ten que ser $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ (que é o **determinante da matriz A**).

Unha matriz ten inversa cando o seu determinante é distinto de 0.

Propiedades dos determinantes

Por simplificar a notación, escribimos algunhas das propiedades para matrices 2x2 ou 3x3, pero que son válidas para calquera matriz cadrada.

- **O determinante dunha matriz é igual ó da súa trasposta:**

$$\det(A) = \det\left(A^t\right)$$

En consecuencia, tódalas propiedades dos determinantes que fan referencia ás filas, tamén son válidas para as columnas, e viceversa.

- **Multilinealidade:**

1. O determinante dunha matriz que ten unha columna suma doutras dúas, é igual á suma dos determinantes das matrices nas que esa columna está formada por cada un dos sumandos:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2. O determinante dunha matriz cunha columna multiplicada por un número é igual ao determinante da matriz multiplicado por ese número:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ a_{21} & \alpha\cdot a_{22} \end{pmatrix} = \alpha\cdot\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

As seguintes propiedades son consecuencia da multilinealidade dos determinantes:

- **O determinante dunha matriz cunha columna (ou fila) de ceros, é 0:**

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- **O determinante dunha matriz con dúas columnas (ou filas) iguais, é 0:**

$$\det\begin{pmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

- **O determinante dunha matriz que ten unha columna combinación lineal das demais, é 0:**

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha a_{11} + \beta a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha a_{21} + \beta a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha a_{31} + \beta a_{32} \end{pmatrix} = 0$$

Consecuencia desta propiedade é que podemos utilizar os determinantes para estudar a dependencia ou independencia dun conxunto de vectores.

- **O determinante dunha matriz non varía se a unha columna se lle suma unha combinación lineal das demais:**

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + (\alpha a_{11} + \beta a_{12}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + (\alpha a_{21} + \beta a_{22}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + (\alpha a_{31} + \beta a_{32}) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Rango dunha matriz

Podemos considerar as filas dunha matriz *nxm* como un conxunto de *n* vectores de R^m (ou as columnas como *m* vectores de R^n).

O **rango** dunha matriz é o número de filas (consideradas como vectores) linealmente independentes.

Como coincide co número de columnas linealmente independentes, o rango é o número de filas ou columnas independentes.

Exemplo:

Estudio do rango dunha matriz por menores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Eliximos un menor (determinante dunha submatriz) de orde 1 distinto de 0: $|1| \neq 0$

2. Ampliamos ese menor a un de orde 2: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

3. Seguimos ampliando:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}} 0$$

4. Como resultou ser nulo, ampliamos o menor anterior doutro xeito diferente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}} 24 \neq 0$$

Xa non podemos ampliar a un menor de orden 4 (pois ó hai tres filas), o rango é 3 (orde do maior menor non nulo).

Inversa dunha matriz cadrada

Como xa se indicou para as matrices de orde 2x2, unha matriz ten inversa se e só se o seu determinante é distinto de 0.

Existen varios métodos para o cálculo da matriz inversa, aquí só utilizaremos o chamado “por adxuntos”.

A inversa dunha matriz A de orde *nxn* é:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Onde o elemento A_{ij} é o adxunto de a_{ij}

O proceso a seguir é o seguinte:

1. Calcúlase o determinante. Se det(A)=0 a matriz non ten inversa. Se det(A)≠0, continuamos:
2. Obtense a matriz trasposta: A^t.
3. Calcúlase a matriz adxunta, formada polos adxuntos, da matriz trasposta.
4. A inversa é a matriz adxunta da trasposta dividida entre o determinante.

Os pasos 2 e 3 poden intercambiarse.

Exemplo:

1. Cálculo da matriz inversa dunha matriz 3x3.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Comprobamos que o determinante é distinto de 0:

$$|A|=-2\neq 0$$

3. Calculamos a trasposta:

$$A^t=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Calculamo-la adxunta da traspos-ta:

$$\mathrm{Adx}\left(A^t\right)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adx}\left(A^t\right)=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Xa só queda multiplicar polo inverso do determinante:

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Comprobamos:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$