# Unidade 1: Matrices

## Programa:

1 **Matrices nxm.**

- **1.1 Definición de matriz nxm.**
- **1.2 Tipos de matrices. Matrices cadradas**
- **1.3 Suma de matrices.**
- **1.4 Produto dunha matriz por un número.**

2 **Produto de matrices.**

- **2.1 Definición de produto de matrices.**
- **2.2 Propiedades do produto de matrices.**
- **2.3 Inversa dunha matriz cadrada.**

# Matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2'5 & 0 & -6 \\ \frac{1}{3} & 7 & \sqrt{3} \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Unha matriz é un conxunto de números agrupados en filas e columnas.

Esta matriz ten 4 filas e 3 columnas (diremos que é de **orde** 4x3). Cada elemento da matriz queda determinado pola súa colocación (o número -6 é o elemento (2,3): 2ª fila, 3ª columna).

En xeral, un elemento dunha matriz designarémolo por $a_{ij}$ onde ***i*** indica a fila e ***j*** a columna. Por exemplo, na matriz anterior:

$$a_{21} = 2'5 \quad \text{e} \quad a_{42} = 5.$$

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 4 \\ 2'5 & \mathbf{0} & -6 \\ \frac{1}{3} & 7 & \boldsymbol{\sqrt{3}} \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Unha matriz representarémola, de xeito abreviado, por $\left(a_{ij}\right)_{nxm}$ onde ***n*** é o número de filas e ***m*** o de columnas. A matriz anterior será $\left(a_{ij}\right)_{4x3}$.

Chamaremos **diagonal** dunha matriz aos elementos que teñen iguais os índices do lugar que ocupan: Na matriz A, do primeiro exemplo, a diagonal está formada polo 1, 0 e $\sqrt{3}$:

1 (elemento 1,1), 0 (elemento 2,2) e $\sqrt{3}$ (elemento 3,3).

# Tipos de matrices

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Cadradas:** Cando teñen tantas filas coma columnas.

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 5'5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz fila:** Cando só teñen unha fila.

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -4'66 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz columna:** Formada por unha soa columna.

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** A que ten tódolos elementos iguais a 0 agás os da diagonal. Un caso especial de matriz diagonal é chamaremos matriz identidade.

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular superior:** Aquela na que ten tódolos elementos situados por debaixo da diagonal son 0.

- **Matriz triangular inferior:** Aquela na que ten tódolos elementos situados por enriba da diagonal son 0.

$$\boldsymbol{TE}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz trasposta:** A trasposta dunha matriz é outra matriz que se obtén cambiando as filas polas columnas.

# Matrices e números

**Suma de dúas matrices:** A suma de dúas matrices $\left(a_{ij}\right)_{nxm}$ e $\left(b_{ij}\right)_{nxm}$ é outra matriz, $\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{nxm}$, na que cada elemento novo é a suma dos elementos correspondentes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Para poder sumar dúas matrices, teñen que ser da mesma orde. A matriz suma terá tamén esa orde.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

**Produto dunha matriz por un escalar (número):** Para multiplicar unha matriz $\left(a_{ij}\right)_{nxm}$ por un número $\alpha$, multiplícase cada elemento da matriz polo número, $\alpha\cdot\left(a_{ij}\right)_{nxm} = \left(\alpha\cdot a_{ij}\right)_{nxm}$:

$$\alpha\cdot\left(a_{ij}\right) = \alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \dots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \dots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -9 \\ -15 & -12 \end{pmatrix}$$

As anteriores operacións, suma de matrices e produto por escalares, teñen as mesmas propiedades que nos vectores (de feito son un tipo particular de vectores):

**Asociativa da suma:**

$$\left(a_{ij}\right)_{nxm} + \left[\left(b_{ij}\right)_{nxm} + \left(c_{ij}\right)_{nxm}\right] = \left(a_{ij}\right)_{nxm} + \left(b_{ij}+c_{ij}\right)_{nxm}$$

$$\left(a_{ij}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right)_{nxm} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{asociativa dos n}^{\text{os}}\text{ reais}}}{=} \left(\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}\right)_{nxm} =$$

$$\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{nxm} + \left(c_{ij}\right)_{nxm} = \left[\left(a_{ij}\right)_{nxm} + \left(b_{ij}\right)_{nxm}\right] + \left(c_{ij}\right)_{nxm}$$

**Conmutativa da suma:**

$$\left(a_{ij}\right)_{nxm} + \left(b_{ij}\right)_{nxm} = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{nxm} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conmutativa da} \\ \text{suma de n}^{\text{os}}\text{ reais}}}{=} \left(b_{ij}+a_{ij}\right)_{nxm} = \left(b_{ij}\right)_{nxm} + \left(a_{ij}\right)_{nxn}$$

**Neutro da suma:** O neutro da suma de matrices é a matriz que ten todos os seus elementos nulos:

$$\left(a_{ij}\right)_{nxm} + \left(0\right)_{nxm} = \left(a_{ij}+0\right)_{nxm} = \left(a_{ij}\right)_{nxm}$$

**Toda matriz ten oposta:** A oposta dunha matriz $\left(a_{ij}\right)_{nxm}$ é a matriz que ten por elementos os opostos correspondentes $\left(-a_{ij}\right)_{nxm}$:

$$\left(a_{ij}\right)_{nxm}+\left(-a_{ij}\right)_{nxm}=\left(a_{ij}+\left(-a_{ij}\right)\right)_{nxm}=\left(0\right)_{nxm}$$

**Distributiva da suma de matrices en relación ao produto por escalares:**

$$\alpha\cdot\left[\left(a_{ij}\right)_{nxm}+\left(b_{ij}\right)_{nxm}\right]=\alpha\cdot\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{nxm}=\left(\alpha\cdot\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\right)_{nxm}\underset{\text{distributiva da suma de n}^{\text{os}}\text{ reais}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$\left(\alpha\cdot a_{ij}+\alpha\cdot b_{ij}\right)_{nxm}=\left(\alpha\cdot a_{ij}\right)_{nxm}+\left(\alpha\cdot b_{ij}\right)_{nxm}=\alpha\cdot\left(a_{ij}\right)_{nxm}+\alpha\cdot\left(b_{ij}\right)_{nxm}$$

**Distributiva da suma de números en relación ao produto dunha matriz por un número:**

$$\left(\alpha+\beta\right)\cdot\left(a_{ij}\right)_{nxm}=\left(\left(\alpha+\beta\right)\cdot a_{ij}\right)_{nxm}\underset{\text{distributiva da suma de n}^{\text{os}}\text{ reais}}{\underset{\uparrow}{=}}\left(\alpha\cdot a_{ij}+\beta\cdot a_{ij}\right)_{nxm}$$

$$\left(\alpha\cdot a_{ij}\right)_{nxm}+\left(\beta\cdot a_{ij}\right)_{nxm}=\alpha\cdot\left(a_{ij}\right)_{nxm}+\beta\cdot\left(a_{ij}\right)_{nxm}$$

**Asociativa do produto de números por matrices:**

$$\left(\alpha\cdot\beta\right)\cdot\left(a_{ij}\right)_{nxm}=\left(\left(\alpha\cdot\beta\right)\cdot a_{ij}\right)_{nxm}\underset{\text{asociativa do producto de n}^{\text{os}}\text{ reais}}{\underset{\uparrow}{=}}\left(\alpha\cdot\left(\beta\cdot a_{ij}\right)\right)_{nxm}=\alpha\cdot\left(\beta\cdot a_{ij}\right)_{nxm}$$

**Existencia de unidade no produto dunha matriz por un número:**

$$1\cdot\left(a_{ij}\right)_{nxm}=\left(1\cdot a_{ij}\right)_{nxm}\underset{\text{existencia de unidade no producto de números}}{\underset{\uparrow}{=}}\left(a_{ij}\right)_{nxm}$$

# Producto de matrices

Definimos o produto de $\boldsymbol{A=\left(a_{ij}\right)_{nxm}}$ por $B=\left(b_{ij}\right)_{mxr}$ como a matriz, na que o elemento i,j calcúlase multiplicando cada elemento da fila ***i*** de A polo correspondente da columna ***j*** de B e logo sumando os produtos.

$$A\cdot B=\left(a_{ij}\right)_{nxm}\cdot\left(b_{ij}\right)_{mxr}=\left(\sum_k a_{ik}\cdot b_{kj}\right)_{nxr}$$

$$\begin{pmatrix}3&1&5\\7&9&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&0\\1&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}6+3+5&3+0+0\\14+27+2&7+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&3\\43&7\end{pmatrix}$$

A matriz A é 2x3 e a B é 3x2. A matriz producto A·B é 2x2

Para poder multiplicar dúas matrices, o número de columnas da primeira ten que ser igual ao de filas da segunda.

Ao multiplicar unha matriz de orde ***nxm*** e outra de orde ***mxr***, a matriz produto será de orde ***nxr***.

**Propiedades:**

- **Asociativa:** O produto de matrices é **asociativo.**

  Lémbrese que temos que poder encadear nº de columnas dunha matriz con nº de filas da seguinte (*).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Neutro:** Só ten senso falar de neutro do produto de matrices no caso de matrices cadradas. Neste caso, o neutro é a matriz identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- En xeral o **produto de matrices <u>non</u> é conmutativo**.

Na maioría das ocasións non terá sequera sentido falar de commutatividade, xa que as matrices só se poden multiplicar dun xeito (*). E mesmo cando se podan multiplicar polos dous lados (se unha for de orde nxm e a outra de orde mxn, ou sendo cadradas) os seus produtos serán, en xeral, diferentes.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 10 \\ 51 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 34 & 17 \end{pmatrix}$$

O produto de matrices non é a primeira operación non conmutativa coa que te atopas (a resta tampouco o é) o que determina que propiedades que das por certas non o sexan.

- **Inversa:** Novamente só podemos falar de inversa para matrices cadradas.

En xeral, unha matriz cadrada non ten inversa.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 3x_3 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{1^a}{2} - \frac{2^a}{3}} 0 = 1 \\ \left.\begin{array}{l} 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ 6x_2 + 3x_4 = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{3^a}{2} - \frac{4^a}{3}} 0 = 1 \end{array}\right\}$$

A matriz non ten inversa.

# Matrices e ecuacións.

Considera o sistema de ecuacións lineais:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array}\right\}$$

Comprobarás facilmente que podemos representalo como unha igualdade entre un produto de matrices e unha matriz columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

En realidade, o produto de matrices ideouse dese xeito para, precisamente, poder expresar os sistemas de ecuacións lineais.

## Linguaxe matricial.

As matrices proporcionan un xeito sinxelo de describir relacións entre varias magnitudes. Exemplo:

Investimos unha certa cantidade a un interese do 5% anual. A comisión que nos cobra a axencia de investimento é do 3% dos nosos beneficios, e a Facenda retennos o 20% deles.

Podemos calcular as diferentes cantidades coas expresións:

- Beneficios: 0’05·C (C é o capital investido)
- Porcentaxe da axencia: 0’03·0’05·C = 0’0015·C
- IRPF: 0’2·0’05·C = 0’01·C

As matrices permiten xuntar nunha soa fórmula as tres anteriores:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'05 & 0'0015 & 0'01 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{C}$$

E se facemos tres investimentos diferentes, cada un con rendibilidade, comisións e retención da Facenda, propios?

Novamente a linguaxe matricial permítenos expresalo de forma sinxela:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$