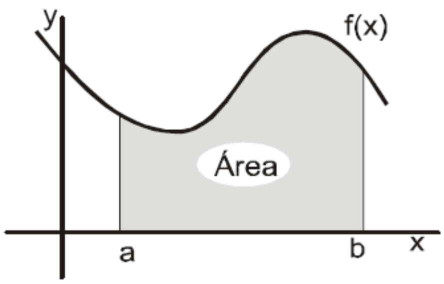
Resumen Integrales definidas

1. Definición de integral definida. Sea f(x) función continúa y positiva en el intervalo [a,b]. Llamamos $\int_a^b f(x)\,dx$, y lo leemos como integral definida entre a y b de f(x) el valor del área comprendida entre la gráfica f(x) , el eje X y las rectas verticales x=a y x= b



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

2. Propiedades de integrales definidas

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- Si f(x) ≥0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si f(x) ≤0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$
- Si $c \in (a,b)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- Si se intercambian los símbolos de integración, la integral definida cambia de signo $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3. Teorema del valor medio para la integral. Si una función continua en el intervalo [a,b], entonces existe un punto $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$

4. Teorema fundamental del cálculo integral. Si f es una función continua en el intervalo [a,b] y consideramos la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces F es derivable en (a,b) y F´(x)=f(x) para cualquier punto $c \in (a,b)$

5. Regla de Barrow. Si f(x) es una función continúa en el intervalo [a,b], y F(x) es una primitiva de f(x) entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

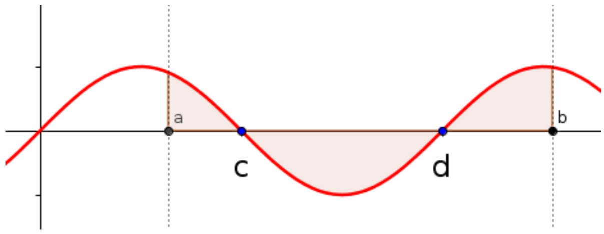
De manera práctica, para calcular una integral definida entre dos puntos a y b:

- Calcular la integral indefinida: F(x)
- Obtener los valores de esta función en a y b: F(a) y F(b)
- La integral definida es la diferencia entre estos dos valores

6. Área encerrada bajo la curva. Para calcular el área comprendida entre la curva y el eje x tenemos 3 casos:

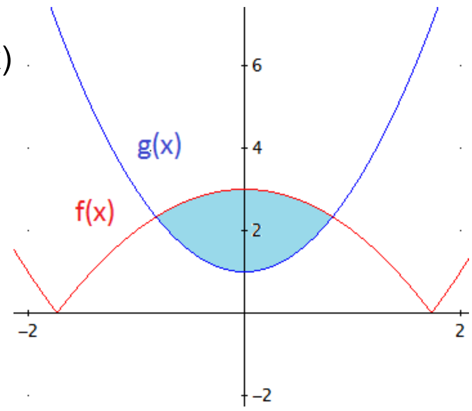
- Caso 1. f(x)≥0 en todo el intervalo (a,b). Entonces: $A = \int_a^b f(x)\,dx$
- Caso 2. f(x)≤0 en todo el intervalo (a,b). Entonces: $A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$
- Caso 3. f(x) cambia de signo dentro del intervalo. Entonces:

$$A = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| + \left|\int_d^b f(x)\,dx\right|$$



7. Área comprendida entre dos curvas. El área comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) y g(x) en el intervalo [a,b] es la misma que el área encerrada entre la función diferencia (f-g)(x) y el eje X de ese intervalo.

$$A = \left|\int_a^c f(x) - g(x)\,dx\right|$$



Para calcular el área comprendida entre dos curvas:

- Calculamos los puntos de corte de ambas funciones (f(x)=g(x))
- Calculamos la integral indefinida de f(x)-g(x)
- Se calculan las integrales definidas tomando valores absolutos de cada para de puntos de corte