Exercicios de autoavaliación

1 Calcula as seguintes primitivas: a) $\int x \cdot sen(x)dx$ b) $\int x^4 Ln(x)dx$ c) $\int x^3 e^{x^2} dx$

2 Calcula as seguintes primitivas: a) $\int x^2 e^x dx$ b) $\int sen^2(x)dx$

3 Calcula as primitivas de: a) $\int e^{5x+3}dx$ b) $\int sen^2(x) \cdot \cos(x)dx$

4 Calcula a primitiva de: $\int \frac{3x^2+2}{x^3+x}dx$

5 Calcula a primitiva de: $\int \frac{x^4+1}{x^3+2x^2+x}dx$

Exercicios de autoavaliación

1 Calcula as seguintes primitivas: a) $\int x\cdot sen(x)dx$ b) $\int x^4 Ln(x)dx$ c) $\int x^3 e^{x^2}dx$

Solución:

a) Temos un produto.

Un dos factores é *x*, que se simplifica ao derivalo.

O outro, *sen(x),* non se complica ao integralo. Probamos coa integración por partes.

$$\left.\begin{array}{l} v=x\Rightarrow v'=1 \\ u'=sen(x)\Rightarrow u=\int sen(x)dx=-cox(x) \end{array}\right\}$$

$$\int x\cdot sen(x)dx=-x\cdot\cos(x)-\int 1\cdot[-\cos(x)]dx=-x\cdot\cos(x)+sen(x)+C$$

b) Practicamente, sempre que aparece un logaritmo neperiano, utilízase a integración por partes:

$$\int x^4 Ln(x)dx=\frac{1}{5}x^5 Ln(x)-\int\frac{1}{5}x^5\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{5}x^5 Ln(x)-\frac{1}{5}\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5Ln(x)-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x^5\right)+C$$

$$\left.\begin{array}{l} u'=x^4\Rightarrow u=\int x^4dx=\dfrac{1}{5}x^5 \\ v=Ln(x)\Rightarrow v'=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\}$$

c) Imos utiliza-la integración por partes. Ás veces, a decisión de a que función lle debemos chamar *u* e a cal *v'* non é tan doada coma nos casos anteriores:

Eliximos $u'=x\cdot e^{x^2}$ porque recoñecemos a expresión como a derivada de $e^{f(x)}$: $f'(x)\cdot e^{f(x)}$

en particular, para este tipo de función: $\left(e^{x^n}\right)'=nx^{n-1}\cdot e^{x^n}$

$$\left.\begin{array}{l} v=x^2\Rightarrow v'=2x \\ u'=xe^{x^2}\Rightarrow u=\int xe^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}e^{x^2} \end{array}\right\}$$

$$\int x^3e^{x^2}dx=x^2\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)-\int(2x)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

2 Calcula as seguintes primitivas: a) $\int x^2 e^x dx$ b) $\int sen^2(x)dx$

Solución:

a) Parece un caso típico de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u' = e^x \Rightarrow u = \int e^x dx = e^x \\ v = x^2 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = (*)$$

Estamos nunha situación semellante, aínda que algo máis simple: quizais se volvemos aplicar a integración por partes resolvamos:

$$\left.\begin{array}{l} u' = e^x \Rightarrow u = \int e^x dx = e^x \\ v = x \Rightarrow v' = 1 \end{array}\right\}$$

$$(*) = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C$$

b) Aplicamos a integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u' = sen(x) \Rightarrow u = \int sen(x)dx = -\cos(x) \\ v = sen(x) \Rightarrow v' = \cos(x) \end{array}\right\}$$

$$\int sen(x)sen(x)dx = -\cos(x)sen(x) - \int \cos(x)\left[-\cos(x)\right]dx = -\cos(x)sen(x) + \int \cos^2(x)dx$$

Temos unha nova integral de característica semellantes á inicial: antes era $\int \sin^2(x)dx$ e agora $\int \cos^2(x)dx$. Non se ve que avanzásemos.

É unha situación *recorrente*: intentamos volver á inicial

$$\int sen^2(x)dx = -\cos(x)sen(x) + \int \cos^2(x)dx \overset{\cos^2(x)=1-sen^2(x)}{\overset{\downarrow}{=}} -\cos(x)sen(x) + \int \left[1 - sen^2(x)\right]dx$$

$$\int sen^2(x)dx = -\cos(x)sen(x) + \int 1dx - \int sen^2(x)dx$$

$$\left[\int sen^2(x)dx \text{ ó } 1^{\text{o}} \ membro\right] \rightarrow \int sen^2(x)dx + \int sen^2(x)dx = -\cos(x)sen(x) + x$$

$$2\int sen^2(x)dx = -\cos(x)sen(x) + x \rightarrow \int sen^2(x)dx = \frac{-\cos(x)sen(x) + x}{2} + C$$

3 Calcula as primitivas de: a) $\int e^{5x+3}dx$ b) $\int sen^2(x)\cdot\cos(x)dx$

Solución:

a) Facemos o cambio de variable: $\begin{cases} 5x+3=t \\ 5dx=dt \end{cases}$

$$\int e^{5x+3}dx = \int e^{t}\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int e^{t}dt = \frac{1}{5}e^{t} + C = \frac{1}{5}e^{5x+3} + C$$

b) Agora o cambio non é tan evidente:

$$\left.\begin{array}{l} sen(x)=t \\ \cos(x)dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\cos(x)} \end{array}\right\}$$

$$\int \sin^{2}(x)\cdot\cos(x)dx = \int t^{2}\cdot\cos x\,\frac{dt}{\cos x} = \int t^{2}dt = \frac{t^{3}}{3} + C = \frac{sen^{3}(x)}{3} + C$$

4 Calcula a primitiva de $\int \frac{3x^{2}+2}{x^{3}+x}dx$

Solución:

É unha función racional. Descompoñemos o denominador en factores:

$x^{3}+x = x\left(x^{2}+1\right)$, x^2+1 irredutible:

$$\frac{3x^{2}+2}{x^{3}+2x^{2}+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^{2}+2x+2} \Rightarrow 3x^{2}+2 = A\left(x^{2}+2x+2\right) + Bx^{2} + Cx$$

Igualando os coeficientes, temos:

$$\left.\begin{array}{r} 2A=2 \\ 2A+C=0 \\ A+B=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ C=-2 \\ B=2 \end{array}$$

$$\int \frac{3x^{2}+2}{x^{3}+2x^{2}+2x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2x-2}{x^{2}+2x+2}dx$$

A 1ª parte dá Ln(x), simplemente, e na 2ª vemos a posibilidade de conseguir outro Ln se tivésemos no numerador a derivada do denominador (que sería 2x + 2). Imos transformar:

$$\int \frac{2x-2}{x^{2}+2x+2}dx = \int \frac{2x+2-2-2}{x^{2}+2x+2}dx = \int \frac{2x+2-4}{x^{2}+2x+2}dx = \int \frac{2x+2}{x^{2}+2x+2}dx - \int \frac{4}{x^{2}+2x+2}dx$$

A 1ª parte destas dá, pois $Ln\left(x^2+2x+2\right)$.

Intentamos transformar a outra para que nos quede un *arctan* (recordamos o de “cadrao dunha suma igual...”):

$$\int \frac{4}{x^2+2x+2}dx = 4\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = arctg\left(x+1\right)+C$$

Finalmente, reunimos os tres cahos: $Ln(x)+Ln\left(x^2+2x+2\right)-4\arctan(x+1)+C$

5 Calcula a primitiva de: $\int \frac{x^4+1}{x^3+2x^2+x}dx$

Solución: Trátase dunha función racional, só temos que seguir paso a paso o método:

1º paso: Facer que o grao do numerador sexa menor có do denominador:

Facendo a división: $\frac{x^4+1}{x^3+2x^2+x} = x-2+\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}$

2º paso: Descompoñer o denominador da fracción en factores utilizando Ruffini ou outro método (neste caso poderiamos sacar factor común *x* e decatarnos de que o outro factor é un cadrado perfecto):

	1	2	1	0
0		0	0	0
	1	2	1	0
-1		-1	-1	
	1	1	0	
-1		-1		
	1	0		

O denominador ten por raíces 0 e -1 (-1 é unha raíz con multiplicidade 2)

$$x^3+2x^2+x = x\cdot\left(x^2+1\right)$$

A descomposición da fracción será:

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+B(x+1)x+Cx}{x^3+2x^2+x}$$

Para calcular os valores de *A*, *B e C* igualamos os numeradores e damos valores a *x* (0, -1 e 1):

$$\left.\begin{array}{rr} x=0\rightarrow & A=1 \\ x=-1\rightarrow & -C=2 \\ x=1\rightarrow & A+2B+C=6 \end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases} A=1 \\ C=-2 \\ B={}^{7}\!/\!{}_{2} \end{cases}$$

$$\int\frac{x^4+1}{x^3+2x^2+x}dx=\int x\,dx-\int 2\,dx+\int\frac{1}{x}dx+\frac{7}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-2\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}-2x+Ln|x|+\frac{7}{2}Ln|x+1|-2\frac{1}{-1}(x+1)^{-1}+C$$