# Resumen Derivadas.

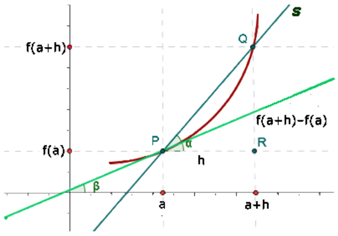
1. Derivada de una función en un punto $x_0$, se denota por $f'(x_0)$, es el valor si existe y es finito de este límite:

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Si en esta definición hacemos $x=x_0+h$, la fórmula es equivalente a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Interpretación geométrica de la derivada, en un punto $x_0$, $f'(x_0)$, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $P(x_0, f(x_0))$




3. Derivadas laterales. Al estar definida como un límite, para asegurar su existencia debe comprobarse que existe límite por la izquierda, límite por la derecha y que ambos son iguales

4. Derivabilidad y continuidad. Toda función derivable en un punto es necesariamente continua en dicho punto

5. Función derivada de una función f(x) es una nueva función que asigna a cada punto el valor de la derivada de f(x) en dicho punto:

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f'(x) = \lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

6. Derivadas sucesivas. Si derivamos la función derivada $f'(x)$, obtendermos otra función que llamamos derivada segunda de f y se denota por $f''(x)$. Podemos repetir el proceso obteniendo sucesivamente la tercera derivada, la cuarta, etc...

7. Operaciones con derivadas.

| Operación | Derivada |
|---|---|
| Suma de funciones | $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ |
| Producto de un número por una función | $[kf(x)]' = kf'(x)$ |
| Producto de funciones | $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ |
| Cociente de funciones | $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g'(x)]^2}$ |
| Regla de la cadena | $[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ |

8. Técnicas de derivación.

8.1 Derivación logarítmica. Se usa en funciones del tipo:

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

Se resuelven aplicando ln a ambos lados, y a continuación derivando ambos lados

8.2 Derivada de una función implícita en un punto. Se usa en funciones expresadas en forma implícita, por ejemplo:

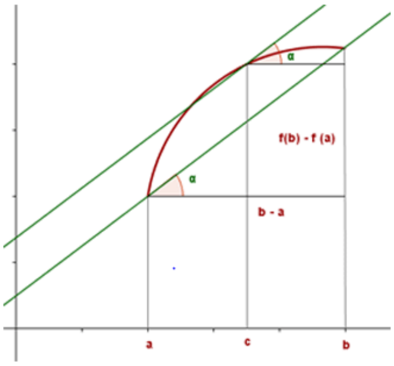
$$x^2+y^2-6x-6y=0$$

Se resuelven derivando toda la función respecto a x, a continuación se despeja la derivada $y'$, y por último se sustituye en esta expresion los valores del punto

9. Teorema del valor medio (Lagrange) Si una función es continua en [a,b] y derivable en (a,b) entonces existirá al menos un punto c que pertenece al intervalo (a,b) que cumple

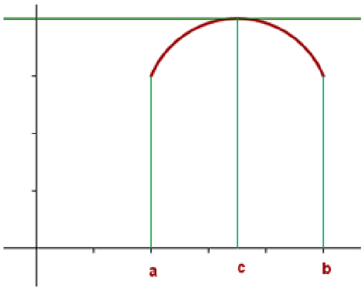
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio




10. Teorema de Rolle. Si una función f(x) es continua en [a,b] y derivable en (a,b) y se cumple que f(a) = f(b) se cumple entonces que existirá al menos un punto c que pertenece al intervalo (a,b) que cumple que $f'(c)=0$

Interpretación geométrica del teorema de Rolle




11. Crecimiento y decrecimiento.

11.1 Una función es **creciente** en un punto $x=x_0$ si la derivada de la función en ese punto es positiva.

$$f'(x_0)>0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x=x_0$$

11.2 Una función es **decreciente** en un punto $x=x_0$ si la derivada de la función en ese punto es negativa.

$$f'(x_0)<0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x=x_0$$

12. Máximos y mínimos relativos

Si una función f(x) presenta un máximo o un mínimo en $x=x_0$, se cumple que $f'(x_0)=0$. Existen dos modos de averiguar si $x_0$ es máximo o mínimo:

| | |
|---|---|
| A | f(x) creciente a la izquierda de $x_0$ y decreciente a la derecha→ $x_0$ es máximo<br>f(x) decreciente a la izquierda de $x_0$ y creciente a la derecha→ $x_0$ es mínimo |
| B | $f''(x_0)<0 \rightarrow x_0$ es máximo<br>$f''(x_0)>0 \rightarrow x_0$ es mínimo |

13. Concavidad y convexidad.

13.1 Una función es **convexa** en un punto $x=x_0$ si la derivada segunda de la función en ese punto es positiva.

$$f''(x_0)>0 \rightarrow f(x) \text{ es convexa en } x=x_0$$

13.2 Una función es **cóncava** en un punto $x=x_0$ si la derivada de la función en ese punto es negativa.

$$f''(x_0)<0 \rightarrow f(x) \text{ es concava en } x=x_0$$

14. Puntos de inflexión

Una función presenta un punto de inflexión en $x_0$ si en ese punto dicha función pasa de ser cóncava o convexa, o viceversa.
Si una función f(x) presenta un punto de inflexión en $x=x_0$, se cumple que $f''(x_0)=0$. Existen dos modos de averiguar si $x_0$ es punto de inflexión:

| | |
|---|---|
| A | $f''(x)>0$ a la izquierda de $x_0$ y $f''(x)<0$ a la derecha→ $x_0$ es punto de inflexión<br>$f''(x)<0$ a la izquierda de $x_0$ y $f''(x)>0$ a la derecha→ $x_0$ es punto de inflexión |
| B | $f'''(x_0)<0$→ $x_0$ es punto de inflexión |

# Derivadas de funciones elementales.

| Función | Derivada | Función | Derivada |
|---|---|---|---|
| $f(x)=c$ | $f'(x)=0$ | | |
| $f(x)=x$ | $f'(x)=1$ | | |
| $f(x)=x^n$ | $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ | $f(x)=[g(x)]^n$ | $f'(x)=n\cdot[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$ |
| $f(x)=\sqrt[n]{x}$ | $f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ | $f'(x)=\frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{g(x)^{n-1}}}$ |
| $f(x)=a^x$ | $f'(x)=\ln(a)\cdot a^x$ | $f(x)=a^{g(x)}$ | $f'(x)=\ln(a)\cdot a^{g(x)}\cdot g'(x)$ |
| $f(x)=e^x$ | $f'(x)=e^x$ | $f(x)=e^{g(x)}$ | $f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$ |
| $f(x)=\log_a(x)$ | $f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln(a)}$ | $f(x)=\log_a(g(x))$ | $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)\cdot\ln(a)}$ |
| $f(x)=\ln(x)$ | $f'(x)=\frac{1}{x}$ | $f(x)=\ln(g(x))$ | $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ |
| $f(x)=\mathrm{sen}(x)$ | $f'(x)=\cos(x)$ | $f(x)=\mathrm{sen}(g(x))$ | $f'(x)=\cos(g(x))\cdot g'(x)$ |
| $f(x)=\cos(x)$ | $f'(x)=-\mathrm{sen}(x)$ | $f(x)=\cos(g(x))$ | $f'(x)=-\mathrm{sen}(g(x))\cdot g'(x)$ |
| $f(x)=\mathrm{tg}(x)$ | $f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $f(x)=\mathrm{tg}(g(x))$ | $f'(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$ |
| $f(x)=\mathrm{arc\,sen}(x)$ | $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $f(x)=\mathrm{arc\,sen}(g(x))$ | $f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$ |
| $f(x)=\mathrm{arc\,cos}(x)$ | $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $f(x)=\mathrm{arc\,cos}(g(x))$ | $f'(x)=\frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$ |
| $f(x)=\mathrm{arc\,tg}(x)$ | $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ | $f(x)=\mathrm{arc\,sen}(g(x))$ | $f'(x)=\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$ |