

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Distinguir os experimentos aleatorios dos que non o son.
- Achar o espazo da mostra e distintos sucesos dun experimento aleatorio.
- Realizar operacións con sucesos.
- Determinar si dous sucesos son compatibles ou incompatibles.
- Calcular a probabilidade dun suceso mediante a regra de Laplace.
- Calcular probabilidades mediante a experimentación.
- Coñecer e aplicar as propiedades da probabilidade.

Antes de empezar

1. Experimentos aleatorios..... páx. 212
Espazo da mostra e sucesos
Técnicas de recuento
Operacións con sucesos
Propiedades
2. Probabilidade páx. 215
Probabilidade dun suceso
Regra de Laplace
Propiedades da probabilidade
Probabilidade experimental
Simulación

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumen

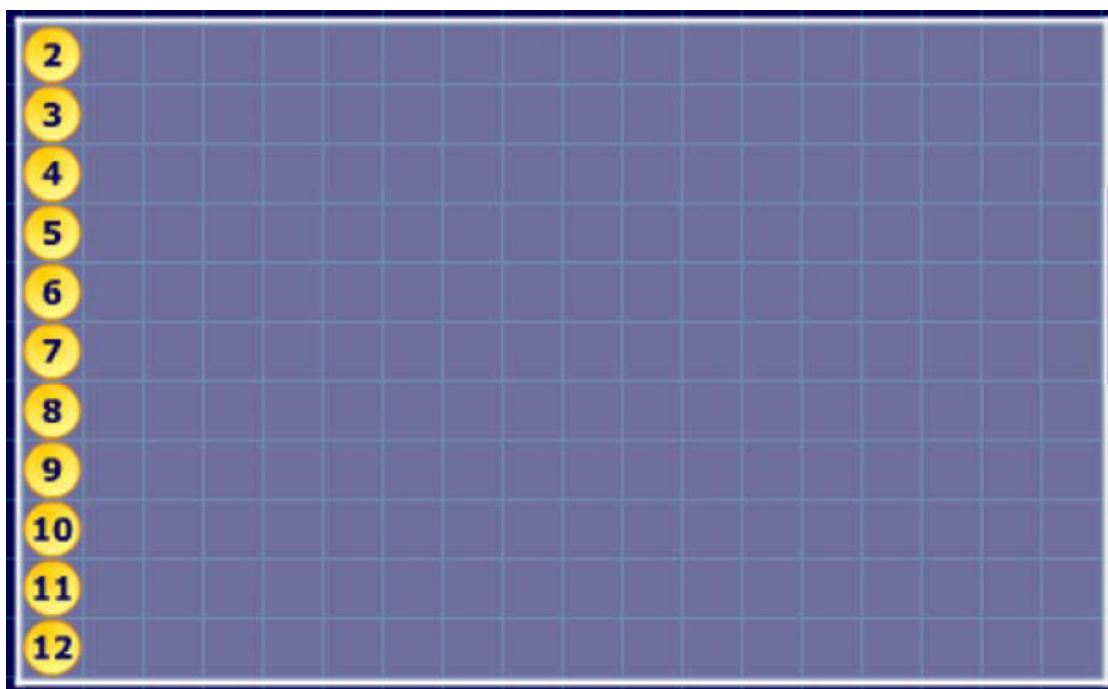
Autoavaliación

Actividades para enviar ao titor

Antes de empezar

"No fondo a teoría da probabilidade é só sentido común expresado con números".

Pierre Simón de Laplace



Investiga xogando

Tíranse dous dados, a ficha cuxo número coincide coa suma dos resultados avanza un lugar. Todas teñen a mesma probabilidade de gañar? , por cal apostarías?, tira os dados e compróbo.

A palabra azar procede do árabe "al zhar", nome co que se designaban os dados pola flor de azahar que levaban nas súas caras.



1. Experimentos aleatorios

Espazo da mostra e sucesos

Un **experimento aleatorio** é aquel que antes de realizalo non se pode predicir o resultado que se vai a obter. En caso contrario dise determinista.

Aínda que nun experimento aleatorio non saibamos o que ocorrerá ao realizar unha "proba", si que coñecemos de antemán todos os seus posibles resultados.

- O **espazo da mostra** é o conxunto de todos os resultados posibles dun experimento aleatorio. Adoitase designar coa letra **E**. Cada un destes posibles resultados chámase **sucese elemental**.
- Chamaremos **sucese** a calquera subconxunto do espazo da mostra. O mesmo espazo da mostra é un suceso chamado **sucese seguro** e o conxunto baleiro, $\emptyset$, é o **sucese imposible**.

$\emptyset$: símbolo co que se designa o conxunto baleiro, o que non ten ningún elemento.

No experimento aleatorio de "tirar un dado cúbico" hai 6 posibles resultados:

Espazo da mostra

$E = \{ \text{1, 2, 3, 4, 5, 6} \}$

Alguns sucesos:

$A = \{ \text{1, 3, 5} \}$ "saír impar"

$B = \{ \text{2, 3, 4, 6} \}$ "saír múltiplo de 3"

$C = \{ \text{6} \}$ "saír un 6"

No experimento aleatorio de "lanzar dous moedas" hai 4 posibles resultados:

Espazo da mostra

$E = \{ \text{CC, CX, XC, XX} \}$

Alguns sucesos:

$A = \{ \text{CC, CX, XC} \}$ "polo menos unha cara"

$B = \{ \text{CC, CX} \}$ "a 1ª é cara"

$C = \{ \text{CX, CC} \}$ "ningunha é cara"

Técnicas de recuento

En moitas ocasións un experimento aleatorio está formado pola sucesión de outros máis sinxelos, dise **composto**, é o caso de "tirar dous dados", "lanzar dúas ou máis moedas", "extraer varias cartas dunha baralla",...

Nestes casos para obter o espazo da mostra pódese utilizar algunha destas técnicas:

- Construír unha **táboa de dobre entrada**, se se combinan dous experimentos simples.
- Facer un **diagrama de árbore**, máis útil se se combinan dous ou máis experimentos simples.

Observa que se o primeiro experimento ten **m** resultados distintos e o segundo **n**, o número de resultados para a combinación de ambos experimentos é **m·n**.

TÁBOA de dobre entrada

Experimento: Tirar dous dados

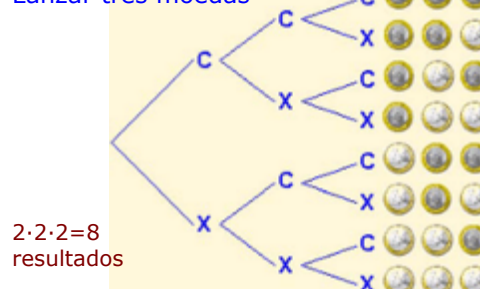
	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

6·6=36 resultados

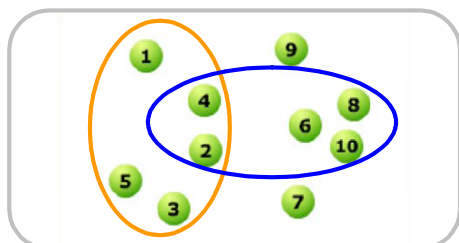
Diagrama de ÁRBORE

Experimento:

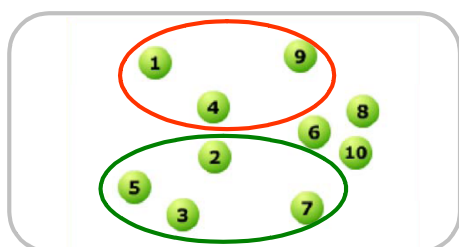
Lanzar tres moedas



Experimento aleatorio: *Extraer unha bola e anotar o número.*



$A = \text{"saír menor que 6"}$ $B = \text{"saír par"}$
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\bar{B} = \{1, 2, 3\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
 $A \cap B = \{2, 4\}$



$C = \text{"saír cadrado perfecto"}$
 $D = \text{"saír nº primo"}$
 A e B incompatibles

Operacións con sucesos

Dados dous sucesos A e B dun espazo da mostra E , chamaremos:

- Suceso **contrario** de A ao que ocorre cando non ocorre A , o indicaremos $\bar{A}$.
Fórmase os sucesos elementais que non están en A .
- Suceso **unión** de A e B , $A \cup B$, é o que ocorre cando ocorre A o B , polo menos un dos dous.
Fórmase xuntando os sucesos elementais de A e B .
- Suceso **intersección** de A e B , $A \cap B$ ao **suceso** que ocorre cando ocorren A e B á vez.
Fórmase cos sucesos elementais comúns.

Cando a intersección de dous sucesos é o suceso imposible, é dicir, que non poden ocorrer simultaneamente, dise que ambos son **incompatibles**.

A e B **incompatibles** se $A \cap B = \emptyset$

Atención: Non hai que confundir os sucesos contrarios e os sucesos incompatibles; un suceso e o seu contrario sempre son incompatibles, non poden ocorrer á vez, pero dous sucesos incompatibles non teñen por que ser contrarios.

Propiedades das operacións con sucesos

A unión e a intersección de sucesos e o suceso contrario cumpren as seguintes propiedades:

- A unión dun suceso e o seu contrario é o suceso seguro; a intersección é o suceso imposible.

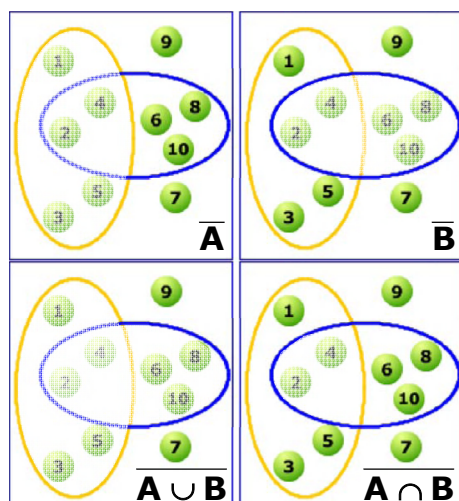
$$A \cup \bar{A} = E \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

- O contrario de $\bar{A}$ é A
- O contrario da unión é a intersección dos contrarios.

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- O contrario da intersección é a unión dos contrarios.

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



$\bar{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ $\bar{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{7, 9\} = \overline{A \cup B}$
 $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \overline{A \cap B}$

EXERCICIOS resoltos

1. Indica cales dos seguintes experimentos son aleatorios e en caso afirmativo acha o espazo da mostra:
- Extraer unha carta dunha baralla española e anotar o pau.
 - Pesar un litro de aceite.
 - Medir a hipotenusa dun triángulo rectángulo coñecidos os catetos.
 - Elixir sen mirar unha ficha de dominó.
 - Pescudar o resultado dun partido de fútbol antes de que se xogue.
 - Sacar unha bóla dunha bolsa con 4 bólas vermellas.
 - Sacar unha bóla dunha bolsa con 1 bóla vermella, 1 verde, 1 azul e 1 branca.
 - Lanzar ao aire unha moeda e observar o tempo que tarda en chegar ao chan.

SOLUCIÓN: Son aleatorios, posto que non podemos coñecer de antemán o resultado, os seguintes:

a) Espazo da mostra: $E=\{\text{OUROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}\}$

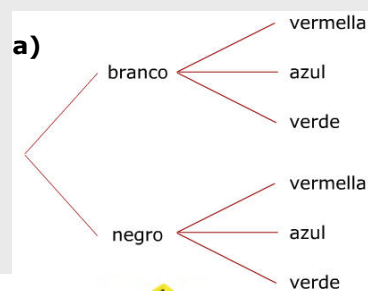
d) O espazo da mostra está formado por cada unha das 28 fichas que compoñen o dominó.

e) Espazo da mostra: $E=\{1, X, 2\}$

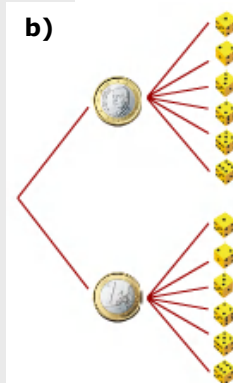
g) Espazo da mostra: $E=\{\text{VERMELLA, VERDE, BRANCA, AZUL}\}$

2. Calcula as posibilidades mediante un diagrama de árbore:

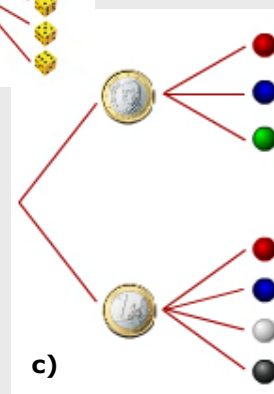
a) Nun equipo de fútbol - sala dispoñen para xogar de pantalóns brancos ou negros, e de camisetas vermellas, azuis ou verdes. De cantas maneiras se poden vestir para un partido?



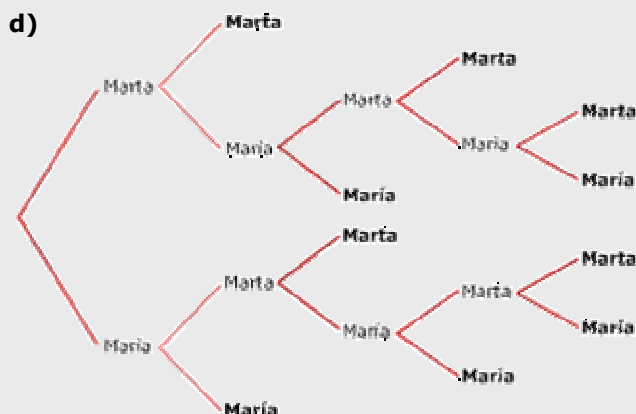
b) Tírase unha moeda e un dado, cales son os resultados posibles?



c) Tírase unha moeda, se sae cara sácase unha bóla da urna A que contén unha bóla vermella, unha azul e unha verde; e se sae cruz sácase da urna B na que hai unha bóla vermella, unha azul, unha branca e unha negra. Escribe os posibles resultados.

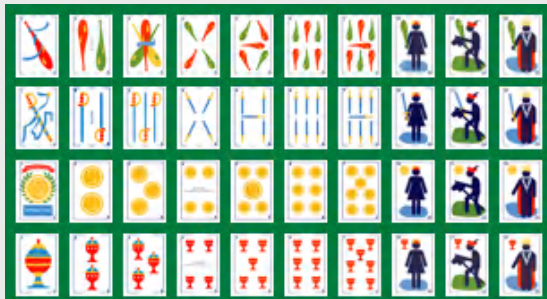


d) Marta e María xogan un campionato de parchís, vence a primeira que gañe dúas partidas seguidas ou tres alternas. De cantas maneiras se pode desenvolver o xogo?



EXERCICIOS resoltos

3. Considera o experimento aleatorio de extraer unha carta da baralla. Expressa con unións e interseccións de A e de B, ou co contrario, os seguintes sucesos:



- a) $A = \text{"saír figura"}$ $B = \text{"saír bastos"}$
 "Que saía figura ou sexa de bastos"
 $= A \cup B$
- b) $A = \text{"saír un rei"}$ $B = \text{"saír copas"}$
 "Saír copas pero que non sexa rei"
 $= \bar{A} \cap B$
- c) $A = \text{"saír un as"}$ $B = \text{"saír ouros"}$
 "Que non saía un as nin de ouros"
 $= \bar{A} \cap \bar{B}$
- d) $A = \text{"saír un rei"}$ $B = \text{"saír espadas"}$
 "Saír o rei de espadas" $= A \cap B$

4. Extráense dúas cartas da baralla e mírase o pau. Indica cal, a, b ou c, é o suceso contrario a S?

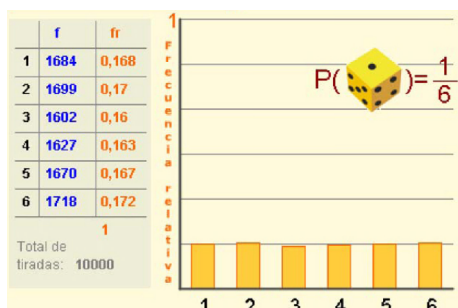
$S = \text{"As dúas son de ouros"}$

- a) "Ningunha é de ouros"
 b) "Polo menos unha é de ouros"
 c) "Polo menos unha non é de ouros"

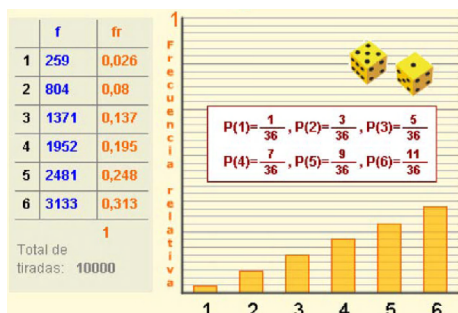
$S = \text{"Ningunha é de copas"}$

- a) "As dúas son de copas"
 b) "Polo menos unha é de copas"
 c) "Polo menos unha non é de copas"

No primeiro caso a solución é a opción c, o contrario de que as dúas sexan de ouros que polo menos unha non o sexa.
 No segundo, b é a opción correcta.



Ao tirar un dado moitas veces, as frecuencias relativas de cada cara estabilízanse en torno a $1/6$.



O gráfico mostra as frecuencias relativas de cada resultado obtido ao tirar dous dados e eleger o nº maior, ao repetir o experimento moitas veces.

2. Probabilidade

Probabilidade dun suceso

A probabilidade dun suceso, S , indica o grao de posibilidade de que ocorra dito suceso. Exprésase mediante un número comprendido entre 0 e 1, e escríbese $P(S)$.

Se $P(S)$ está próximo a 0 o suceso é pouco probable e será máis probable canto máis se aproxime a 1, que é a probabilidade do suceso seguro, $P(E)=1$.

Cando se repite un experimento aleatorio moitas veces, a **frecuencia relativa** coa que aparece un suceso tende a estabilizarse cara un valor fixo, a medida que aumenta o número de probas realizadas.

Este resultado, coñecido como **lei dos grandes números**, lévanos a definir a probabilidade dun suceso como o número cara ao que tende a frecuencia relativa ao repetir o experimento moitas veces.

Probabilidade

A regra de Laplace

Cando dous sucesos teñen a mesma probabilidade de ocorrer ao realizar un experimento aleatorio dinse **equiprobables**.

Se nun espazo da mostra todos os sucesos elementais son equiprobables, o experimento dise regular e a probabilidade dun suceso calquera A, pódese calcular mediante a **Regra de Laplace**, segundo a cal basta contar, e facer o cociente entre o nº de sucesos elementais que compoñen A e o nº de sucesos elementais do espazo da mostra.

Adoitase enunciar así:

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}$$

EXEMPLO: Nunha urna hai 10 bólas numeradas do 1 ol 10, extráese unha ao chou.

Casos posibles: 10

- ✓ Cal é a probabilidade de que sexa un nº par?

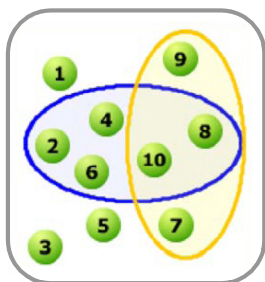
Casos favorables: 5

$$P(\text{nº par}) = \frac{5}{10} = 0,5$$

- ✓ Cal é a probabilidade de que sexa un nº maior que 6?

Casos favorables: 4

$$P(\text{nº maior que 6}) = \frac{4}{10} = 0,4$$



No experimento de lanzar tres moedas, hai 8 casos posibles:



A = "saír tres caras"

Casos favorables: 1

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

B = "saír dúas caras"

Casos favorables: 3

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

C = "polo menos unha cara"

Casos favorables: 7

$$P(C) = \frac{7}{8}$$

Tíranse dous dados e elíxese o maior dos números obtidos.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Hai 36 casos posibles.

$$P(1) = \frac{1}{36}$$

$$P(2) = \frac{3}{36}$$

$$P(3) = \frac{5}{36}$$

$$P(4) = \frac{7}{36}$$

$$P(5) = \frac{9}{36}$$

$$P(6) = \frac{11}{36}$$

Propiedades da probabilidade

Ao asignar probabilidades mediante a regra de Laplace ou utilizando a frecuencia relativa podes comprobar que se cumpre:

- $0 \leq P(A) \leq 1$. A probabilidade dun suceso é un número comprendido entre 0 e 1.
- $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. A probabilidade do suceso seguro é 1 e a do suceso imposible 0.
- A probabilidade da unión de dous sucesos **incompatibles** é $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ademais, destas propiedades dedúcense estoutras que resultan moi útiles para calcular probabilidades:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

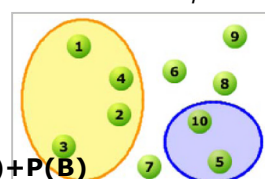
A = "Sacar un nº menor que 5"
B = "Sacar un nº múltiplo de 5"
A e B son incompatibles

$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = 0,6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



A = "Sacar un nº menor que 5"
B = "Sacar un nº par"
A e B son compatibles

$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,5$$

$$P(A \cap B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = 0,7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A = "Sacar un nº menor que 5"

$$P(A) = 0,4$$

$$P(\bar{A}) = 0,6$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad A \cup \bar{A} = E$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

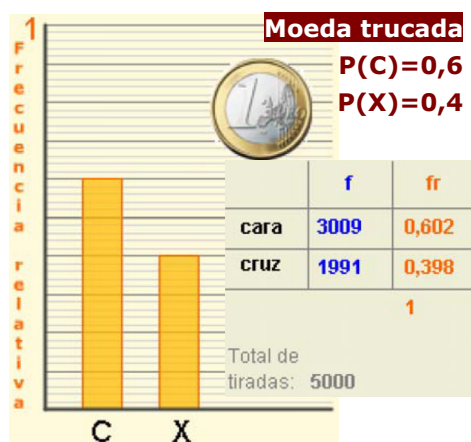


Probabilidade experimental

A lei de Laplace permítenos calcular a probabilidade de sucesos regulares, pero se a experiencia é irregular descoñecemos a probabilidade de cada un dos casos, entón é preciso recorrer á experimentación.

A probabilidade **experimental** é a probabilidade asignada a un suceso mediante o cálculo da frecuencia relativa do mesmo ao repetir o experimento moitas veces.

Canto maior é o número de probas realizadas máis se aproxima o valor obtido ao valor descoñecido da probabilidade teórica. O número de probas a realizar dependerá do experimento e do nº dos seus posibles resultados.



Observa os exemplos da esquerda.

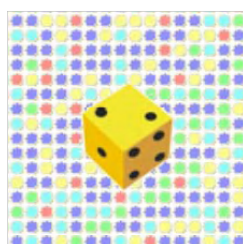
- ✓ Unha moeda está trucada de maneira que a probabilidade de saír cara non é a mesma que a de saír cruz, para pescudar estas probabilidades lanzouse moitas veces obtendo os resultados da táboa. Á vista destes asignaremos a "saír cara" a probabilidade 0,6 e a "saír cruz" 0,4.
- ✓ Un dado está cargado de forma que a probabilidade dunha das súas caras é cinco veces a das demais. De que cara se trata?. Cal é a súa probabilidade?. Ao repetir o lanzamento moitas veces obsérvase que a cara cargada é a do nº 6, a súa probabilidade é 0,5 e a do resto das caras 0,1.

Simulación de experimentos

En moitas ocasións realizar un experimento aleatorio un número elevado de veces non resulta fácil, entón recorreremos á simulación.

Simular un experimento aleatorio consiste en substituílo por outro máis sinxelo e capaz de reproducir os mesmos resultados.

As calculadoras científicas dispoñen da tecla **RAND**, RAN# ou RANDOM que, ao activala, xera un número ao chou comprendido entre 0 e 1, chamado **número aleatorio**. Estes números resultan de gran utilidade na simulación de experimentos.



Para simular o lanzamento dun dado coa calculadora utilizando estes números:

Na túa calculadora preme sobre a tecla rand, ran# ou random, multiplica por 6 (nº de resultados) o número que aparece, colle a parte enteira e súmalle 1, xa que os resultados van de 1 a 6.

$$\text{ent}(0,2932063716784 \cdot 6) + 1 = 2$$



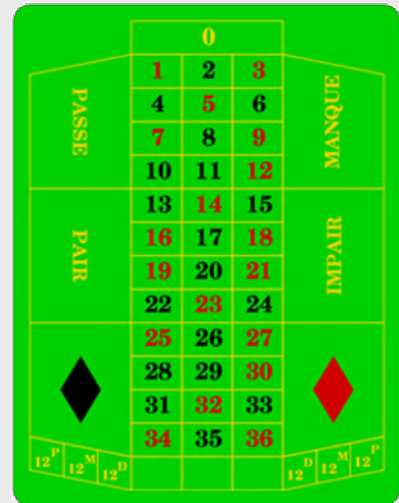
EXERCICIOS resoltos

5. A ruleta é un coñecido xogo dos casinos. Consiste nunha roda equilibrada, dividida en 37 cadriños numerados do 0 ao 36. O 0 é de cor verde e cando sae gaña a banca.

Hai diferentes tipos de apostas, a un número só, a "par", a "impar", a "vermello", a "negro", a "passe" ($n^o > 18$), a "falte" ($n^o < 18$), a unha columna, ...

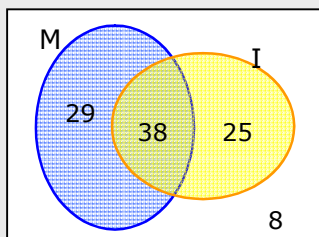
Calcula as seguintes probabilidades:

- a) $P(17) = \frac{1}{37}$ b) $P(\text{"impar"}) = \frac{18}{37}$
 c) $P(\text{"2ª columna"}) = \frac{12}{37}$ d) $P(\text{"par e vermello"}) = \frac{8}{37}$
 e) $P(\text{"impar e falte"}) = \frac{9}{37}$ f) $P(\text{"vermello"}) = \frac{18}{37}$



6. Na última avaliación, na miña clase as Matemáticas aprobounas o 67%, o Inglés o 63% e o 38% aprobou as dúas materias. Elixido un estudante da clase ao chou, calcula a probabilidade de que:

- a) Aprobou algunha das dúas b) Non aprobou ningunha das dúas
 c) Aprobou só as Matemáticas d) Aprobou só unha das dúas



Facer un diagrama facilita moito a resolución do problema.

$$P(M) = 0,67 \quad P(I) = 0,63 \quad P(M \cap I) = 0,38$$

- a) "A algunha das dúas" é o suceso unión,
 $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,67 + 0,63 - 0,38 = 0,92$
 b) Non aprobar ningunha é o suceso contrario a aprobar algunha das dúas (polo menos unha).
 $P(\text{algunha das dúas}) = 1 - 0,92 = 0,08$
 c) $P(\text{"só M"}) = P(M \cap \bar{I}) = 0,67 - 0,38 = 0,29$
 d) $P(\text{"só M ou só I"}) = 0,29 + 0,25 = 0,54$ (ó $0,92 - 0,38$)

7. Ao tirar unha chincheta pode caer coa punta cara arriba ou cara abaixo. Para pescudar a probabilidade de cada un destes sucesos, realizouse o experimento moitas veces obtendo os resultados dados na táboa. Á vista deles, que probabilidade asignarías ao suceso "caer coa punta cara abaixo"?



Nº de tiradas	10	50	100	500	1000
Punta cara arriba	7	29	65	337	668

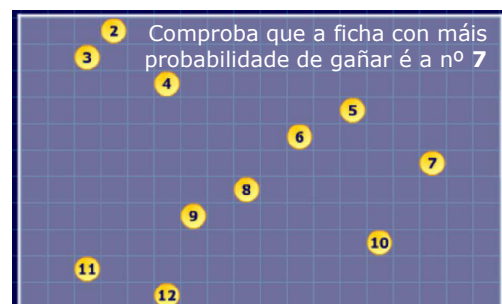
Na táboa obsérvase que a frecuencia relativa do suceso "caer coa punta cara arriba" tende a 0,67.

Caer coa "punta cara abaixo" é o suceso contrario, pódese considerar $P(\text{"punta cara abaixo"}) = 1 - 0,67 = 0,33$

Carreira con dados



$$\begin{aligned} P(2) &= 1/36 \\ P(3) &= 2/36 \\ P(4) &= 3/36 \\ P(5) &= 4/36 \\ P(6) &= 5/36 \\ \mathbf{P(7)} &= \mathbf{6/36} \\ P(8) &= 5/36 \\ P(9) &= 4/36 \\ P(10) &= 3/36 \\ P(11) &= 2/36 \\ P(12) &= 1/36 \end{aligned}$$





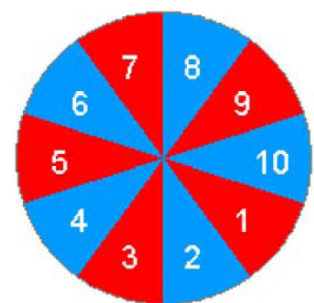
Para practicar

- Escollemos unha ficha de dominó ao chou,
a) Describe os sucesos:
A="sacar unha ficha dobre"
B="sacar unha ficha cuxos números sumen 5 ou múltiplo de 5"
b) Escribe $A \cup B$ e $A \cap B$
- Escribe o espazo da mostra do experimento resultante de tirar 3 moedas. Considera os sucesos:
A="Saír unha cara"
B="Saír polo menos unha cara"
Escribe $A \cup B$, $A \cap B$ e o suceso contrario de B.
- Nunha urna hai 15 bólas numeradas do 1 ao 15, extráese unha de elas; considera os sucesos:
A="Sacar un nº par"
B="Sacar un múltiplo de 4"
Escribe $A \cup B$ e $A \cap B$.
- Lanzamos un dado dodecaédrico e anotamos o nº da cara superior. Describe os sucesos:
A="Sacar un nº par"
B="Sacar un nº maior que 5"
Escribe $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ e $\bar{A} \cap \bar{B}$
- Nunha caixa hai 5 bólas vermellas, 4 verdes e 3 azules. Extráese unha bóla e anótase a cor, calcula a probabilidade de que sexa verde.
- Escóllese ao chou un nº entre os primeiros 50 naturais (a partir do 1). Calcula a probabilidade dos sucesos:
A="saír un nº maior que 4 e menor que 17".
B="Saír un cadrado perfecto"
- Dunha baralla española extráese unha carta, calcula a probabilidade dos sucesos:
A="Saír bastos"
B="Non saír nin bastos nin as"

- Lanzamos dous dados e fixámonos na menor das puntuacións. Calcula a probabilidade de que sexa un 3.
- Encima da mesa temos as cartas dunha baralla que aparecen abaixo, sacamos outra carta e fixámonos no seu número, calcula a probabilidade de que a suma dos números das tres cartas sexa 15.



- Extraemos unha ficha de dominó, calcula a probabilidade de que a suma dos puntos sexa menor que 7.
- Cun 1, un 2 e un 3, formamos todos os números posibles de 3 cifras. Escollemos un ao chou, que probabilidade hai de que acabe en 3?
- Ao xirar a ruleta da figura, calcula a probabilidade de que saia vermello e maior que 3.



- A probabilidade dun suceso é 0,21, calcula a do suceso contrario.
- A probabilidade dun suceso A é $P(A)=0,55$, a de outro suceso B é $P(B)=0,45$ e a da intersección de ambos é $P(A \cap B)=0,20$. Calcula a probabilidade de $A \cup B$.

Probabilidade

15. Considera dous sucesos A e B dun experimento aleatorio. Se $P(A)=0,37$; $P(A \cup B)=0,79$ e $P(A \cap B)=0,06$; calcula a $P(\bar{B})$.

16. Un dado está trucado de maneira que a probabilidade de sacar un nº par é 0,67; ademais $P(1)=P(3)=P(5)$. Calcula a probabilidade de sacar un 5.

17. Nunha urna hai bólas brancas e negras.

María di: "A probabilidade de sacar unha bóla branca é $5/26$ "

Serxio di: "A probabilidade de sacar unha bóla negra é $11/13$ "

- Poden ser correctas ambas afirmacións?
- Se María ten razón, cal é a probabilidade de sacar bóla negra?

18. Nun restaurante ofrecen un menú que consta de primeiro prato a escoller entre ensalada, pasta ou legumes; un segundo prato a escoller entre carne ou peixe; e sobremesa a escoller entre froita o xeadó. Ana escolle o seu menú ao chou, calcula a probabilidade de que coma:

- Ensalada, carne e froita.
- Pasta e peixe.

Suxestión: Fai un diagrama de árbore

19. Levo no peto 2 moedas de 50 céntimos, dúas de 20 céntimos e dúas de 10 céntimos. Tamén levo un burato polo que me caen dúas e pérdoas. Calcula a probabilidade de perder:

- 1 euro
- Menos de 40 céntimos.
- Máis de 50 céntimos.

Suxestión: Fai unha táboa de dobre entrada

20. Nun instituto o 66% dos estudantes son afeccionados ao fútbol e o 42% ao baloncesto. Hai un 27% que son afeccionados a ambos deportes. Calcula a probabilidade de que elixido un estudante ao chou non sexa afeccionado ao fútbol nin ao baloncesto.

21. A unha reunión asisten 32 homes e 48 mulleres. A metade dos homes e a cuarta parte das mulleres teñen 40 anos ou máis. Elixida unha persoa ao chou calcula a probabilidade de que:

- sexa muller e menor de 40 anos
- sexa menor de 40 anos.

Suxestión: Completa a táboa

	40 o máis	<40	
HOME			32
MULLER			48

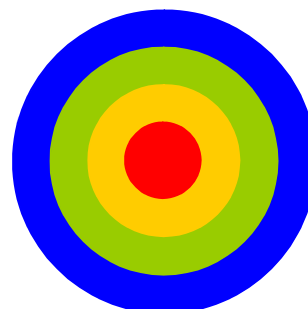
22. Perdín algunhas cartas dunha baralla. Se entre as que me quedan sáco unha ao chou, a probabilidade de que sexa de copas é 0,20, de que sexa un rei é 0,13 e de que sexa un rei ou de copas é 0,30. Está o rei de copas entre as cartas que me quedan?

Suxestión: Calcula a probabilidade da intersección

23. A un humidal chegan todos os anos bandadas de grúas no seu camiño a zonas cálidas. Para observar cantas hai, capturouse e anelouse unha mostra de 40 grúas. Posteriormente obsérvanse 50 das que 3 levan anel, cantas grúas estimaremos que hai?

Suxestión: A probabilidade de que unha grúa estea anelada será a mesma en todas as mostras, e calculámola a partir da frecuencia relativa.

24. Suponse que a probabilidade de acertar ao tirar un dardo en calquera punto da diana é a mesma. Calcula a probabilidade de acertar na zona de cor verde.





Probabilidade e xenética

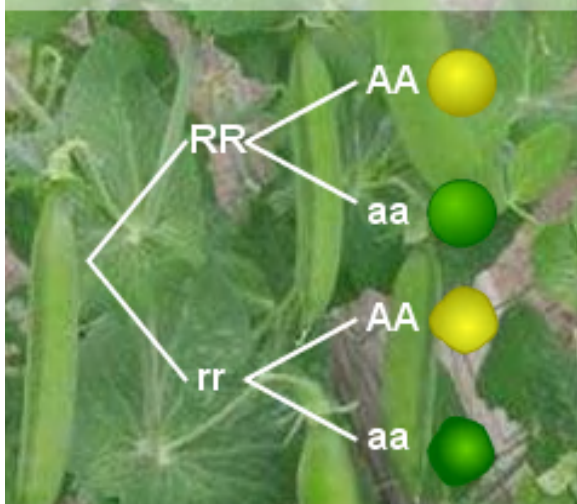
As leis de Mendel

Gregor Mendel (1822-1884), foi un monxe e naturalista nacido en Heizendorf (actual Hencice, República Checa).

A través dos seus traballos, que levou a cabo con distintas variedades da planta do chícharo, foi o primeiro en describir las leis que rexen a herdanza xenética. Para elo aplica a probabilidade como describe na súa obra *"A Matemática da herdanza"*.

Ao cruzar dúas liñas puras, distintas para algún carácter, o 100% dos descendentes son iguais entre si e iguais ao parental dominante. (1ª Lei de Mendel)

Mendel combinou chícharos de distinta cor (amarelo e verde) e distinta textura (lisos e rugosos).



COR
A: amarela
a: verde

TEXTURA
R: liso
r: rugoso

dominantes
recesivos

1ª xeración

RRAA + rraa

2ª xeración

	RA	RA
ra		
ra		

3ª xeración

	RA	Ra	rA	ra
RA				
Ra				
rA				
ra				

Na 3ª xeración:

$$P(\text{amarelo liso}) = \frac{9}{16}$$

$$P(\text{amarelo rugoso}) = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{verde liso}) = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{verde rugoso}) = \frac{1}{16}$$

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36			

Probabilidade condicionada

Dependentes ou independentes?

En ocasións a probabilidade dun suceso varía se se calcula coa condición de que ocorreu outro anteriormente.

Imaxina que xogando á ruleta sabemos que non saíu o 0, podemos considerar entón que $P(\text{par}) = 1/2$.

- Se ademais sabemos que saíu "vermello"

$$P(\text{par sabendo que é vermello}) = \frac{\text{nº de pares e vermellos}}{\text{nº pares}} = \frac{8}{18}$$

Con esta condición a probabilidade de "par" xa non é $1/2$, os sucesos "par" e "vermello" son DEPENDENTES.

- Pero si sabemos que saíu "passe"

$$P(\text{par sabendo que é passe}) = \frac{\text{nº resultados pares e passe}}{\text{nº resultados pares}} = \frac{9}{18}$$

A probabilidade de "par" segue sendo $1/2$, non cambiou, os sucesos "par" e "passe" son INDEPENDENTES.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36			



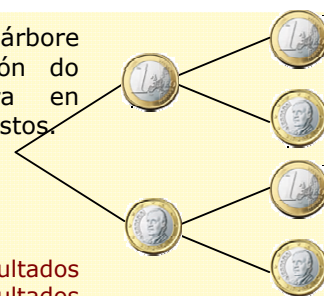
Lembra o máis importante

Espazo da mostra e sucesos

- **Experimento aleatorio**, o que no se pode predicir o resultado.
- **Espazo da mostra** conxunto de todos os resultados posibles.
- Chamaremos **suceso** a calquera subconxunto do espazo da mostra.
- Sucesos **incompatibles** se non se poden realizar á vez.

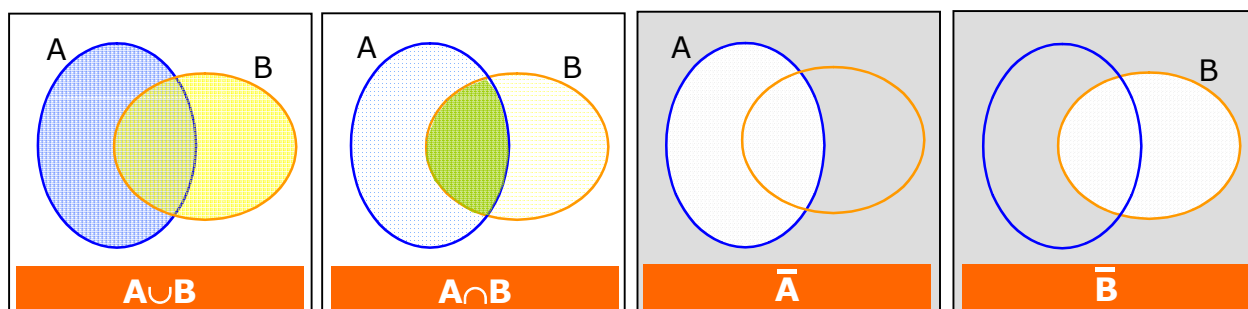
Un diagrama de árbore facilita a construción do espazo da mostra en experimentos compostos.

1º: m resultados
2º: n resultados
Total: m·n resultados



Operacións con sucesos

- Suceso **unión** de A e B, $A \cup B$, é o que ocorre cando ocorre A ou B, algún dos dous.
- Suceso **intersección** de A e B, $A \cap B$, suceso que ocorre cando ocorren A e B á vez.
- Suceso **contrario** de A ao que ocorre cando non ocorre A, indicáremolo $\bar{A}$.



Calcular probabilidades

- En experimentos regulares, cando os sucesos elementais son equiprobables, coa **Regra de Laplace**

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}$$

- Se o experimento non é regular recórrese á experimentación, tomando a probabilidade de A como a súa frecuencia relativa ao repetir o experimento moitas veces.



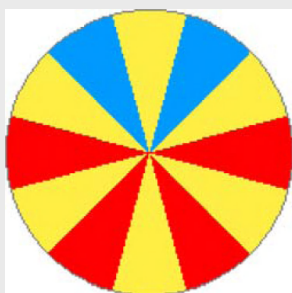
Propiedades da probabilidade

- $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Probabilidade da unión

- A e B incompatibles:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A e B compatibles:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Autoavaliación



	aproban	suspenden
Grupo A	15	6
Grupo B	16	13

1. Escribimos cada unha das letras da palabra ALEATORIO nun papel e sacamos unha ao chou. Escribe o suceso "saír vogal".
2. Escribe o suceso contrario do calculado no exercicio anterior.
3. Nunha bolsa hai 100 bólas numeradas do 0 ao 99. Extráese unha ao chou, calcula a probabilidade de que nas súas cifras estea o 7.
4. Nunha bolsa hai 2 bólas vermellas, 4 bólas verdes e 4 azules. Sácase unha bóla ao chou, calcula a probabilidade de que NON sexa verde.
5. Calcula a probabilidade de vermello na ruleta da figura.
6. Sácase unha carta dunha baralla de 40, calcula a probabilidade de que sexa de OUROS ou un AS.
7. Se A e B son dous sucesos tales que $P(A)=0,64$, $P(B)=0,36$ e $P(A \cap B)=0,12$. Calcula $P(A \cup B)$.
8. Os resultados dun exame realizado por dous grupos de 3º ESO móstranse na táboa adxunta. Seleccionado un estudante ao chou calcula a probabilidade de que sexa do grupo B e aprobe.
9. Un dado cúbico está trucado de xeito que a probabilidade de sacar un catro é catro veces a probabilidade de calquera das outras caras. Calcula a probabilidade de obter un catro.
10. Lánzanse unha moeda e un dado, calcula a probabilidade de que saía CARA e nº PAR.

Solucións dos exercicios para practicar

1. $A = \{00, 11, 22, 33, 44, 55, 66\}$
 $B = \{05, 14, 23, 55\}$
 $A \cup B = \{00, 05, 11, 14, 22, 23, 44, 55, 66\}$
 $A \cap B = \{55\}$
2. $A = \{c x x, x c x, x x c\}$
 $B = \{c c c, c c x, c x c, x c c, c x x, x c x, x x c\}$
 $A \cup B = A$ $A \cap B = B$ $\bar{B} = \{x x x\}$
3. $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 $A \cap B = \{4, 8, 12\}$
4. $A \cap B = \{8, 12\}$ $A \cap \bar{B} = \{4\}$
 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 2, 3, 5\}$
5. $P(\text{verde}) = 4/12 = 1/3$
6. $P(A) = 12/50 = 0,24$ $P(B) = 7/50$
7. $P(A) = 1/4$ $P(B) = 27/40$
8. $P(3) = 7/36$
9. Debe saír un 6, como xa hai un:
 $P = 3/38$
10. En 16 das 28 fichas, $P = 16/28 = 0,57$
11. Hai 6 casos posibles, $P = 2/6 = 1/3$
12. $P = 0,3$
13. $P(\bar{A}) = 1 - 0,21 = 0,79$
14. $P(A \cup B) = 0,55 + 0,45 - 0,20 = 0,80$
15. $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,39 = 0,61$
16. $P(\text{impar}) = 0,33$ $P(1) = P(3) = p(5) = 0,11$
17. a) Non poden ser certas ambas xa que son sucesos contrarios e $5/26 + 11/13 \neq 1$
b) $P(\text{"negra"}) = 21/26$
18. Hai 12 posibles menús
a) $P(A) = 1/12$ b) $P(B) = 1/6$
19. a) $P(1) = 4/36 = 1/9$
b) $P(\text{menos de } 0,40) = 12/36 = 1/3$
c) $P(\text{"máis de } 0,50") = 20/36 = 5/9$
20. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,81 = 0,19$
21. Asisten 80 persoas
a) $P(\text{muller e menor de } 40) = 12/80 = 0,15$
b) $P(\text{menor de } 40) = 28/80 = 0,35$
22. $P(R \cap C) = P(R) + P(C) - P(R \cup C) = 0,03$
A probabilidade de sacar o "Rei de Copas" non é 0, logo si que está.
23. $P(\text{grúa con anel}) = 4/50 = 0,08$
 $n^\circ \text{ estimado} = 40/0,08 \approx 500$
24. Superficie da diana = $\pi \cdot (4r)^2 = 16\pi r^2$
Superficie verde = $\pi \cdot (3r)^2 - \pi \cdot (2r)^2 = 5\pi r^2$
 $P = 5/16$

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. $\{A, E, I, O\}$
2. $\{L, T, R\}$
3. $19/99$
4. $6/10 = 0,6$
5. $4/12 = 1/3$
6. $13/40$
7. $0,88$
8. $15/50 = 0,3$
9. $4/9$
10. $3/12 = 0,25$

Non esquezas enviar as actividades a titor ►