Apuntes

# MATEMÁTICAS

## TEMA 11-12

*Inferencia Estadística.*

# TEMA 11-12: Inferencia Estadística.

## ÍNDICE



## 1. INTRODUCCIÓN

La Estadística es, en la actualidad, la disciplina científica más utilizada y estudiada en diversos campos del conocimiento como ingeniería, medicina, economía, sociología, biología….

Además de unos mínimos conocimientos estadísticos, es necesario conocer herramientas imprescindibles en la toma de decisiones relativas a determinadas poblaciones basándose en la información obtenida por una muestra. Es precisamente a esta cuestión a lo que se dedica esta unidad y que se basa en una rama de la Estadística llamada Estadística Inferencial, a establecer conclusiones sobre determinados parámetros poblacionales utilizando la información obtenida por una muestra representativa.

Cuando una investigación estadística va referida a un conjunto, colección o colectivo de elementos, este colectivo se llama **población**.

Cuando una población es muy grande, no suele hacerse una observación exhaustiva, sino que se estudia una parte de la misma llamada **muestra**, para obtener conclusiones acerca de la población. Esta muestra debe ser elegida debidamente para obtener resultados válidos para toda la población.

## 2. Tabla Normal (0,1)   N(0,1)

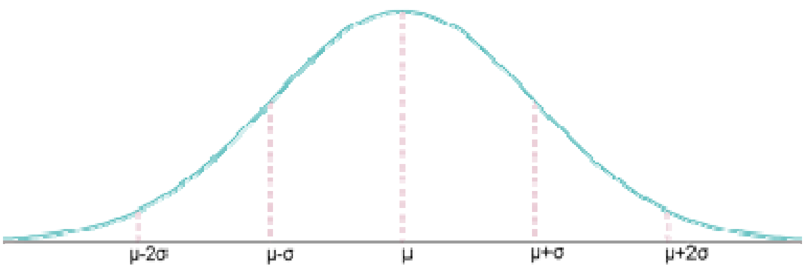
Antes de explicar las tablas de la distribución N(0,1) vamos a ver algunas definiciones previas.

- Se llama variable aleatoria a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral E un número real.
- Una variable aleatoria discreta es aquella que sólo puede tomar valores enteros. Ejemplo: el número de hijos de una familia, la puntuación obtenida en un dado,…,etc.
- Una variable aleatoria continua es aquella que puede tomar todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real. Ejemplo: la altura de los alumnos de clase, las horas de duración de una pila, etc.

Vamos a ver ahora un modelo de distribución de probabilidad para variables continua, la distribución normal.

- Una variable aleatoria continua sigue una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$, y se designa por $\boxed{N(\mu,\sigma)}$, si cumple las siguientes condiciones:
  a) La variable puede tomar cualquier valor : $(-\infty,\infty)$
  b) La función de densidad, es la expresión en términos de ecuación matemática de la curva de Gauss: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Curva de la distribución $N(\mu,\sigma)$




- El área del recinto determinado por la función y el eje de las abscisas es igual a **1.**
- La curva normal es simétrica respecto al eje que pasa por $x=\mu$, por tanto deja un área igual a 0'5 a la izquierda de $\mu$ y otra igual a 0'5 a la derecha de $\mu$.
- El área bajo la curva entre dos abscisas cualesquiera a y b representa la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre esas dos abscisas ( $P(a<X<b)$ )
- Para poder calcular probabilidades en una distribución Normal es necesario saber calcular el área bajo la curva de su función densidad entre dos valores cualesquiera.

Pablo Gª-Pulgar Perezagua
Departamento Matemáticas
I.E.S. GABRIEL CISNEROS

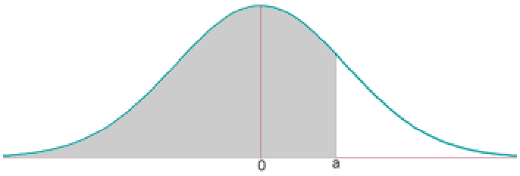
Como todas las distribuciones normales tienen propiedades comunes respecto de sus parámetros, se puede reducir una de ellas a cualquier otra mediante un cambio de variable que ajuste los parámetros de ambas. Por tanto basta tener las tablas de una única distribución normal para poder calcular probabilidades de otra. Se han elaborado las tablas de la función de distribución de la más sencilla que es la distribución N(0,1), es decir, la que tiene media 0 y desviación típica 1.

**LA TABLA DE LA N(0,1) (ESTA EN LA HOJA FINAL)**

Para buscar en la tabla miramos las unidades y décimas en la columna de la izquierda y las centenas en la fila de arriba.

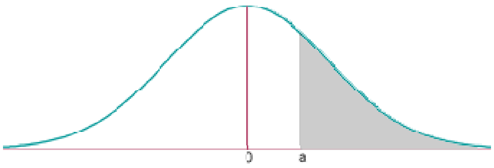
Veamos los siguientes ejemplos ( mirar la tabla N(0,1)):

**$P(Z \leq a)$**



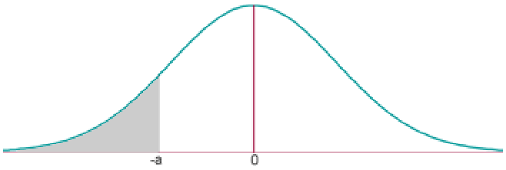

$P(Z \leq 1.47) = 0.9292$

**$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$**



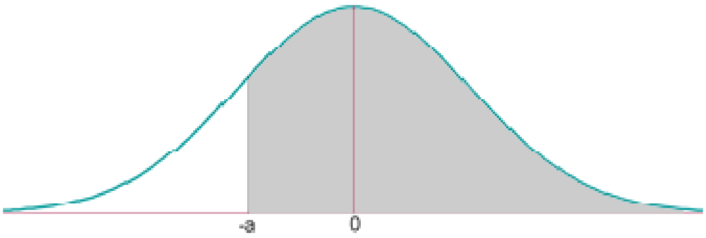

$P(Z > 1.47) = 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$

**$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$**



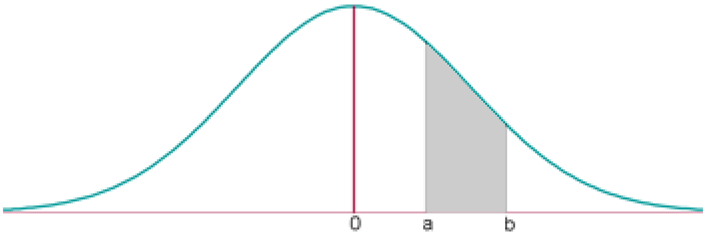

$P(Z \leq -1.47) = 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$

**$P(Z > -a) = P(Z \leq a)$**




$p(Z > 1.47) = p(Z \leq 1.47) = 0.9292$

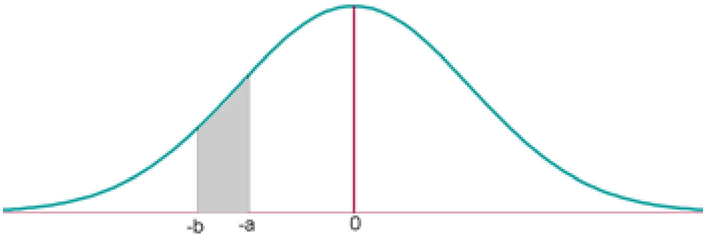
**$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$**




$P(0.45 < Z \leq 1.47) = P(Z \leq 1.47) - P(Z \leq 0.45) =$

$= 0.9292 - 0.6736 = 0.2556$

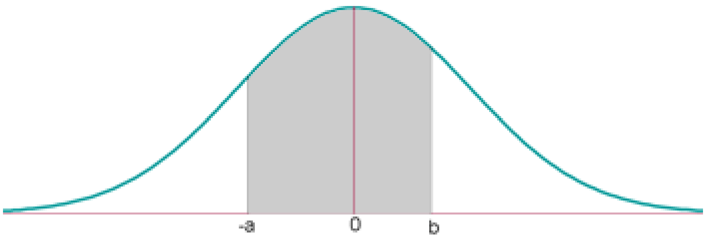
**$P(-b < Z \leq -a) = P(a < Z \leq b)$**




$P(-1.47 < Z \leq -0.45) = P(0.45 < Z \leq 1.47) =$

$= P(Z \leq 1.47) - P(Z \leq 0.45) = 0.9292 - 0.6736 = 0.2556$

**P(−a < Z ≤ b ) = P(Z ≤ b) − [ 1 − P(Z ≤ a)]**




P(-1.47 < Z ≤ 0.45) = P(Z ≤ 0.45) − [ 1 − P(Z ≤ 1.47)]=

= 0.6736 − (1 − 0.9292) = 0.6028

- A veces tendremos que determinar en una distribución N(0,1) el valor de $z_{\alpha/2}$ conocida la probabilidad. En este caso basta con buscar en la tabla N(0,1) el valor de la probabilidad, localizando su fila y su columna correspondientes. Pero sucede que la probabilidad no siempre está en la tabla; cuando esto ocurre hacemos una interpolación.

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,7324 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 0,62$$

Mirar en TABLA N(0,1) En las cuadriculas de color blanco y ver a que valor corresponden

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,9131 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'36$$

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,995 \Rightarrow \begin{cases} 0'9949 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'57 \\ 0'9951 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'58 \end{cases} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2'57 + 2'58}{2} = 2'575$$

0'995 esta en la tabla entre 0'9949 y 09951. Hacemos la media arítmetica de los valores que salen.

## 3. Intervalos de confianza.

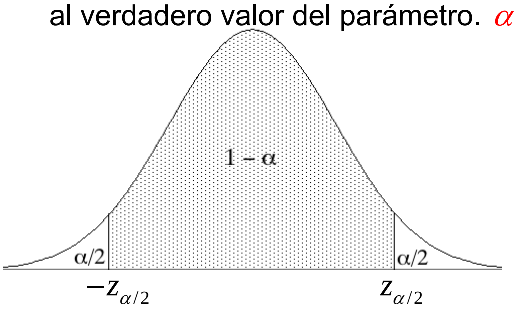
En una población cuya distribución es conocida pero desconocemos algún parámetro, podemos estimar dicho parámetro a partir de una muestra representativa.

Un estimador es un valor que puede calcularse a partir de los datos muéstrales y que proporciona información sobre el valor del parámetro. Por ejemplo la media muestral es un estimador de la media poblacional, la proporción observada en la muestra es un estimador de la proporción en la población.

Una <u>**estimación**</u> es <u>**puntual**</u> cuando se obtiene un sólo valor para el parámetro. Los estimadores más probables en este caso son los estadísticos obtenidos en la muestra, aunque es necesario cuantificar el riesgo que se asume al considerarlos. Recordemos que la distribución muestral indica la distribución de los valores que tomará el estimador al seleccionar distintas muestras de la población. Las dos medidas fundamentales de esta distribución son la media que indica el valor promedio del estimador y la desviación típica, también denominada error típico de estimación, que indica la desviación promedio que podemos esperar entre el estimador y el valor del parámetro.

Más útil es la **estimación por intervalos** en la que calculamos dos valores entre los que se encontrará el parámetro, con un nivel de confianza fijado de antemano.

- Llamamos **Intervalo de confianza** al intervalo que con un cierto nivel de confianza, contiene al parámetro que se está estimando.
- **Nivel de confianza** es la "probabilidad" de que el intervalo calculado contenga al verdadero valor del parámetro. Se indica por $\boxed{1-\alpha}$ y habitualmente se da en porcentaje (1-$\alpha$ )100%. Hablamos de nivel de confianza y no de probabilidad ya que una vez extraída la muestra, el intervalo de confianza contendrá al verdadero valor del parámetro o no, lo que sabemos es que si repitiésemos el proceso con muchas muestras podríamos afirmar que el (1-$\alpha$ )% de los intervalos así construidos contendría al verdadero valor del parámetro. $\alpha$ recibe el nombre de nivel de significación.




## 3.1 Intervalo de confianza para la media

- Vamos a ver a continuación el intervalo de confianza para la media si la población sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$ , conocida la desviación típica $\sigma$ **.**

$$\boxed{\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad \textbf{donde} \quad \begin{cases} \bar{x} = \text{media muestral} \\ \sigma = \text{desviación típica} \\ n = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{valor crítico ( se calcula mirando la tabla N(0,1)} \end{cases}$$

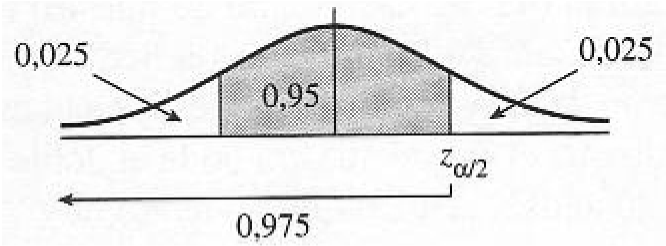
***Ejemplo:*** Las estaturas de una muestra aleatoria de 50 estudiantes tienen una media de 174'5 cm, y se conoce que la desviación típica de la variable estatura es de 6'9 cm. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la estatura media de todos los estudiantes.

Solución

El intervalo de confianza de la media poblacional $\mu$ es $\boxed{\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

$$\begin{cases} \bar{x} = 174'5\ cm \\ \sigma = 6'9\ cm \\ n = 50 \text{ estudiantes} \\ z_{\alpha/2} = 1'96 \text{ ( mirar abajo)} \end{cases} \qquad (174'5 - 1'96\cdot\frac{6'9}{\sqrt{50}}, 174'5 + 1'96\cdot\frac{6'9}{\sqrt{50}}) \Rightarrow \boxed{I.C\ (172'59\ ,\ 176'41)}$$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 1'96}$




$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,975 \underset{\text{Mirar en TABLA N(0,1)}}{\Rightarrow} z_{\alpha/2} = 1'96$$

- Teorema central del límite: si una muestra aleatoria de tamaño n procede de una población con media $\mu$ y desviación típica $\sigma$, entonces en el caso de que el tamaño de la muestra sea lo suficientemente grande ( n>30), la media muestral $\bar{x}$ tiene una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ,esto es:

$$\boxed{\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$$

## 3.2 Intervalo de confianza para la proporción

Se quiere estudiar la proporción **p** de una población que tiene una cierta característica; por ejemplo, tener o no tener carnet de conducir, ser rubio o no, etc. Para estudiar la proporción de la población se eligen **k** muestras distintas de tamaño **n** y se obtienen valores para las proporciones muestrales.

## ✓ *Distribución de las proporciones muestrales*

La distribución de las proporciones muestrales de tamaño **n**, que se representa por $\hat{p}$, tiene las siguientes características:

***a)*** La media p.

***b)*** La desviación típica es $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ donde $\boxed{q = 1 - p}$

***c)*** Si el tamaño de la muestra n es grande ($n \geq 30$), la distribución de $\hat{p}$ se aproxima a una distribución normal, $N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}})$

## ✓ *Intervalo de confianza para la proporción*

El intervalo de confianza para la proporción **p**, con un nivel de confianza 1-$\alpha$ , es

$$\boxed{\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)} \quad \textbf{donde} \quad \begin{cases} \hat{q} = 1 - \hat{p} \\ n = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{valor que en una N(0,1)} \\ \qquad \text{cumple que } P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \end{cases}$$

***Ejemplo:*** Se ha tomado la muestra de 40 encinas, y se han contabilizado 18 de ellas con una enfermedad de un hongo. Halla el intervalo de confianza para la proporción de encinas infectadas con el hongo, con un nivel de confianza del 99%.

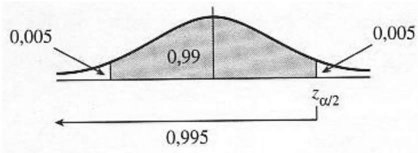
Solución

El intervalo de confianza para la proporción **p** $\boxed{\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)}$

Departamento Matemáticas
Pablo Gª-Pulgar Perezagua
I.E.S. Gabriel Cisneros

$$\begin{cases} \hat{p} = \dfrac{18}{40} = 0'45 \\ \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0'45 = 0'55 \\ n = 40 \\ z_{\alpha/2} = 2'575 \text{ ( mirar abajo)} \end{cases} \quad \left(0'45 - 2'575 \cdot \sqrt{\frac{0'45 \cdot 0'55}{40}}, 0'45 + 2'575 \cdot \sqrt{\frac{0'45 \cdot 0'55}{40}}\right) \Rightarrow \boxed{I.C\ (0'25\ ,\ 0'65)}$$

La proporción estará entre el 25% y el 65 %, con una probabilidad del 99%




A un nivel de confianza del 99% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 2'575}$

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,995 \Rightarrow \begin{cases} 0'9949 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'57 \\ 0'9951 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'58 \end{cases} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2'57 + 2'58}{2} = 2'575$$

0'995 esta en la tabla entre 0'9949 y 09951. Hacemos la media arítmetica de los valores que salen.

## 4. Error y tamaño de la muestra.

### 4.1 Error del Intervalo de confianza para la media

La precisión del intervalo de confianza anterior $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ es $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Esto significa que al utilizar $\bar{x}$ para estimar $\mu$ cometemos un error E que es menor o igual $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ con una confianza del $100 \cdot (1-\alpha)$ por ciento: $\boxed{E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

El valor de $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, depende de $\alpha$ y de n del siguiente modo:

- Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra n, menor es E.
- Cuanto mayor sea $(1-\alpha)$ ( es decir, cuanto más seguros queramos estar de nuestra estimación), mayor es E

En situaciones donde se puede controlar el tamaño de la muestra, es posible elegir n de forma que se tenga una confianza del $100 \cdot (1-\alpha)$ por ciento de que el error al estimar $\mu$ sea menor que el error especificado E. Despejando en la fórmula del error tenemos la fórmula para n: $\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2}$

Si n no sale un número entero lo redondeamos al entero de sumar uno a su parte entera.

## 4.2 Error del Intervalo de confianza para la proporción

- ✓ Error máximo para la proporción $\boxed{E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$
- ✓Tamaño de la muestra $\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}$

# CUADRO RESUMEN

| Intervalo de confianza para la media | Error máximo para la media | Tamaño de la muestra |
|---|---|---|
| $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ | $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$ |
| **Intervalo de confianza para la proporción** | **Error máximo para la proporción** | **Tamaño de la muestra** |
| $\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$ | $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ | $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$ |

## 5. Tipificar.

Si una variable aleatoria, X, sigue una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$, para calcular probabilidades que se refieran a ella, es preciso hacer un cambio de variable, y así poder usar las tablas de la distribución N(0,1). A esto se le llama tipificar o estandarizar la variable.

En general, si X sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, la variable $\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$ sigue una distribución normal N(0,1)

Ejemplo : Dada la distribución N(5,3), determinar $P(X \leq 8)$

$$\boxed{P(X \leq 8) = P\left(\frac{X-5}{3} \leq \frac{8-5}{3}\right) = P(Z \leq 1) \underset{\substack{\text{Miramos} \\ \text{la tabla} \\ N(0,1)}}{=} 0'8413}$$

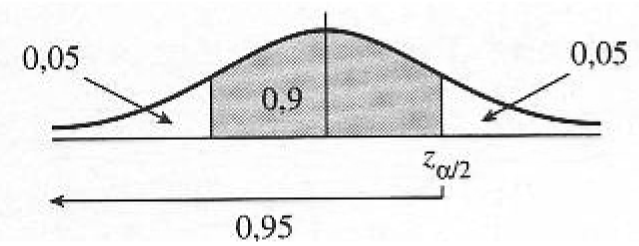
## 6. Ejercicios resueltos.

**1.** Se tiene una población $N(\mu, 2)$ y una muestra formada por 16 datos de media 2'5. Obtener el intervalo de confianza del 90% para la media $\mu$ de la población.

Solución

El intervalo de confianza de la media poblacional $\mu$ es $\boxed{\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

$$\begin{cases} \overline{x} = 2'5 \\ \sigma = 2 \\ n = 16 \\ z_{\alpha/2} = 1'645 \text{ ( mirar abajo)} \end{cases} \qquad (2'5 - 1'645 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}}, 2'5 + 1'645 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}}) \Rightarrow \boxed{I.C\ (1'6775\ ,\ 3'3225)}$$




Intervalo de confianza del 90%

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,95 \Rightarrow \begin{cases} 0'9495 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'64 \\ 0'9505 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'65 \end{cases} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1'64 + 1'65}{2} = 1'645$$

0'95 esta en la tabla entre 0'9495 y 09505. Hacemos la media arítmetica de los valores que salen.

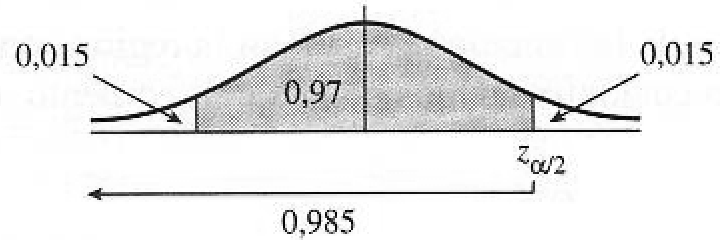
A un nivel de confianza del 90% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 1'645}$

**2.** En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal de media desconocida y desviación típica 9. ¿De qué tamaño, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97% y un error máximo admisible igual a 3?

Solución

El tamaño de la muestra: $\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2}$

$$\begin{cases} E = 3 \\ \sigma = 9 \\ n = ? \\ z_{\alpha/2} = 2'17 \Downarrow \end{cases} \qquad n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17 \cdot 9}{3}\right)^2 = 42'3801 \Rightarrow \boxed{\text{El tamaño de la muestra ha de ser, como mínimo, 43.}}$$




$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,985 \underset{\text{Mirar en TABLA N(0,1)}}{\Rightarrow} z_{\alpha/2} = 2'17$$

A un nivel de confianza del 97% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 2'17}$

**3.** En una determinada comunidad autónoma, se sabe que la desviación típica del número de días que dura un contrato temporal es igual a 57 días. Diga el número mínimo de contratos en los que se ha de mirar su duración para que el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, que da la duración media de un contrato de ese tipo, tenga una amplitud que no sea mayor que 10 días.

Solución

Si la amplitud del intervalo de confianza para la media tiene una amplitud menor o igual a 10, su error debe ser justamente menor igual a la mitad de la amplitud, es decir, menor o igual que 5.

El tamaño de la muestra: $\boxed{n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2}$

$$\begin{cases} E = 5 \\ \sigma = 57 \\ n = ? \\ z_{\alpha/2} = 1'96 \end{cases} \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 57}{5}\right)^2 = 499'25... \Rightarrow \boxed{\text{Se ha de mirar por lo menos 500 contratos}}$$

A un nivel de confianza del 99% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 2'575}$

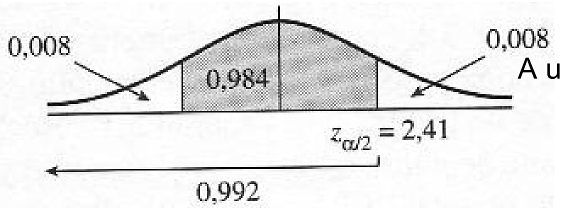
**4.** La distribución de las puntuaciones de un tipo de examen de matemáticas se considera Normal. Aplicando este tipo de examen a una muestra de 81 personas adultas se obtiene una media de 6’4 y una desviación típica de 3. Encuentra el intervalo de confianza al 98’4% para la media de las puntuaciones en la población adulta. Interpreta el significado del intervalo obtenido.

Solución

El intervalo de confianza de la media poblacional $\mu$ es $\boxed{\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

$$\begin{cases}\bar{x}=6'4\ puntos\\ \sigma=3\\ n=81\text{ personas}\\ z_{\alpha/2}=2'41(\text{ mirar abajo})\end{cases}\qquad (6'4-2'41\cdot\frac{3}{\sqrt{81}},6'4+2'41\cdot\frac{3}{\sqrt{81}})\Rightarrow\boxed{I.C\ (5'6\ ,\ 7'2)}$$

Tenemos una confianza del 98'4% de que la media de la población total esté comprendida entre 5'6 y 7'2 .




A un nivel de confianza del 98'4% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2}=2'41}$

$$P(z\le z_{\alpha/2})=0,992\ \underset{\boxed{\text{Mirar en TABLA N(0,1)}}}{\Rightarrow}\ z_{\alpha/2}=2'41$$

**5.** El número de horas semanales que los jóvenes, con edades entre 14 y 18 años, dedican semanalmente a ver la televisión, es una variable normal de media desconocida y desviación típica 2. Encuestados 256 de estos jóvenes, la media de horas semanales dedicada a ver la televisión resulto igual a 6.

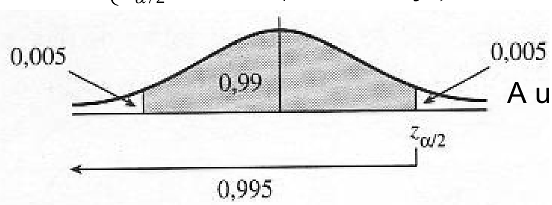
a) Construir un intervalo de confianza, al 99%, para la media.

b) Con un nivel de confianza del 95 %, ¿Cuál es el tamaño de la muestra que se necesita encuestar para que el error máximo de la estimación de la media sea de 0'5 horas?

Solución

a) El intervalo de confianza de la media poblacional $\mu$ es $\boxed{\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

$$\begin{cases}\bar{x}=6\text{ horas}\\ \sigma=2\\ n=256\text{ jóvenes}\\ z_{\alpha/2}=2'575(\text{ mirar abajo})\end{cases}\qquad (6-2'575\cdot\frac{2}{\sqrt{256}},6+2'575\cdot\frac{2}{\sqrt{256}})\Rightarrow\boxed{I.C\ (5'68\ ,\ 6'32)}$$

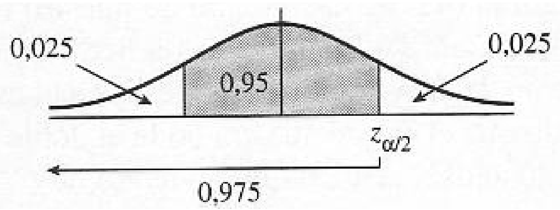



A un nivel de confianza del 99% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2}=2'575}$

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}995 \underset{\text{0'995 esta en la tabla entre 0'9949 y 09951. Hacemos la media arítmetica de los valores que salen.}}{\Rightarrow} \begin{cases} 0'9949 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'57 \\ 0'9951 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'58 \end{cases} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2'57 + 2'58}{2} = 2'575$$

b) El tamaño de la muestra: $\boxed{n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2}$

$$\begin{cases} E = 0'5 \\ \sigma = 2 \\ n = ? \\ z_{\alpha/2} = 1'96 \end{cases} \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 2}{0'5}\right)^2 = 61'4656... \Rightarrow \boxed{\text{El tamaño de la muestra ha de ser, como mínimo, 62.}}$$




$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}975 \underset{\text{Mirar en TABLA N(0,1)}}{\Rightarrow} z_{\alpha/2} = 1'96$$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 1'96}$

**6.** ¿De qué tamaño conviene tomar la muestra de una línea de producción para tener una confianza del 95% de que la proporción estimada no difiera de la verdadera en más de un 4%? Se sabe, por estudios previos, que la proporción de objetos defectuosos es del orden del 0'05.

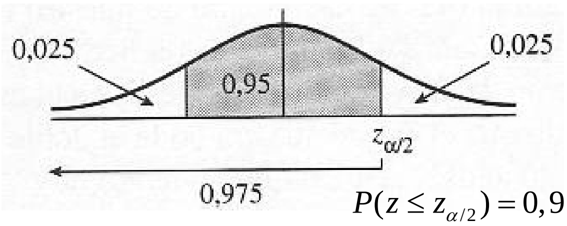
Solución:

$\hat{p} = 0'05$

$\hat{q} = 1 - 0'05 = 0'95$

$E = 0'04$

$z_{\alpha/2} = 1'96$




$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}975 \underset{\text{Mirar en TABLA N(0,1)}}{\Rightarrow} z_{\alpha/2} = 1'96$$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} = n = \left(\frac{1'96}{0'04}\right)^2 \cdot 0'05 \cdot 0'95 = 114'0475 \approx 115$$

Por tanto deberíamos tomar una muestra de 115.

**7.** La media de ventas diarias de un vendedor de unos grandes almacenes es de 950€ y la desviación típica es de 200€. Suponiendo que la distribución de ventas es normal. ¿cuál es la probabilidad de vender más de 1250€ en un día?

Solución: X= ventas diarias de un vendedor ~ N(950,200)

Se trata de una distribución normal N(950,200). Por tanto:

$$\boxed{P(X>1250)=P\left(\frac{X-950}{200}>\frac{1250-950}{200}\right)=P(Z>1'5)=1-P(Z\le 1'5)\underset{\boxed{\substack{Miramos\\ la\ tabla\\ N(0,1)}}}{=}1-0'9332=0'0668}$$

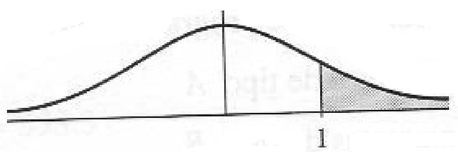
**8.** Se supone que la altura de las alumnas universitarias de una determinada ciudad sigue una distribución normal de media 1’65 m y una desviación típica 10 cm. Se toma una muestra al azar de 100 de estas alumnas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea mayor que 1’66 m?

Solución:

- X= altura de las alumnas universitarias; X ~ N(1’65,0’1)
- $\overline{X}$ = altura media de 100 alumnas universitarias;

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow \overline{X}\sim N\left(1'65,\frac{0'1}{\sqrt{100}}\right)\Rightarrow \boxed{\overline{X}\sim N(1'65,0'01)}$$

$$P(\overline{X}>1'66)=P\left(\frac{\overline{X}-1'65}{0'01}>\frac{1'66-1'65}{0'01}\right)=P(Z>1)=1-P(Z\le 1)\underset{\boxed{\substack{Miramos\\ la\ tabla\\ N(0,1)}}}{=}1-0'8413=0'1587$$



## 7. Ejercicios propuestos

Intervalo de confianza para la media , conocida la desviación típica σ

$$\boxed{\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = \text{media muestral} \\ \sigma = \text{desviación típica} \\ n = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{valor crítico ( se calcula mirando la tabla N(0,1)} \end{cases}$$

**1.** Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kilo. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de 6 kilos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95% para el peso medio de esa variedad de sandía.

Solución: $\boxed{I.C\ (5'804\ ,\ 6'196)}$

**2.** La duración de las llamadas de teléfono en una oficina comercial sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es 35 segundos. Calcular un intervalo de confianza al 99% para la duración media de las llamadas.

Solución: $\boxed{I.C\ (31'36\ ,\ 38'64)}$

**3.** Se probaron 10 automóviles escogidos aleatoriamente de una mima marca y modelo por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros por cada 100 km, fue de 6'5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95% para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

Solución: $\boxed{I.C\ (5'26\ ,\ 7'74)}$

**4.** Se desea estudiar el gasto semanal de fotocopias, en pesetas, de los estudiantes de bachillerato de Madrid. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 de estos estudiantes, resultando lo valores siguientes para estos gastos:

100 150 90 70 75 105 200 120 80

Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12. Determina un intervalo de confianza del 95% para la media del gasto semanal de fotocopias por estudiante.

Solución: $\bar{x} = 110$ $\boxed{I.C\ (102'16\ ,\ 117'84)}$

**5.** Un grupo de 144 alumnos de secundaria seleccionados al azar en una determinada comunidad realizan una prueba de conocimientos sobre la geografía de su Autonomía, sacando una nota media de 6'3 puntos. Las puntuaciones obtenidas se distribuyen normalmente con una desviación típica de 6.

a. Calcula, con una probabilidad del 98% entre qué valores se encontrará la media de la población de los alumnos de secundaria de dicha Comunidad.

b. Interpreta el significado del intervalo obtenido.

Solución: a) $\boxed{I.C\ (5'135\ ,\ 7'465)}$ b) Hay una probabilidad del 98% de que la media de la población se encuentre en ese intervalo de confianza

Intervalo de confianza para la proporción

**1.** En una muestra aleatoria de 400 personas que han visto un programa de televisión, 100 personas reconocieron que éste les había gustado. Determina el intervalo de confianza, al 95%, para la proporción de personas en las población a las que les gusta el programa.

Solución $\boxed{I.C\ (0'21\ ,\ 0'29)}$ La proporción estará entre el 21% y el 29%

**2.** En una muestra aleatoria de 400 personas de una población, hay 80 que tienen teléfono móvil. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional, con un nivel de confianza del 95%

Solución $\boxed{I.C\ (0'16\ ,\ 0'24)}$ La proporción estará entre el 16% y el 24%

**3.** Cuando se ha preguntado a 100 personas de cierta ciudad, elegidas al azar, si leen el periódico al menos una vez a la semana, solo 40 han contestado que sí. Encuentra el intervalo de confianza, con nivel de confianza del 99%, para la proporción de personas de esa ciudad que leen el periódico al menos una vez a la semana.

Solución $\boxed{I.C\ (0'27\ ,\ 0'53)}$ La proporción estará entre el 27% y el 53%

**4.** De una muestra de 60 clientes de supermercados, 24 fueron capaces de decir el precio del producto que habían comprado. Determina el intervalo de confianza, al 95% para la proporción de clientes de la población.

Solución $\boxed{I.C\ (0'28\ ,\ 0'52)}$ La proporción estará entre el 28% y el 52%

**5.** En una cierta población cercana a una estación de esquí se quiere estimar con un nivel de confianza del 95% la población de habitantes que practican esquí. Se toma una muestra de 400 habitantes de la población, de los que 240 afirman que practican ese deporte. Determina el correspondiente intervalo de confianza.

Solución $\boxed{I.C\ (0'55\ ,\ 0'64)}$ La proporción estará entre el 55% y el 64%

Tamaño de la muestra n

$$\boxed{E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \boxed{n = \left( \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2} \qquad \begin{cases} E = \text{Error} \\ \sigma = \text{desviación típica} \\ n = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{valor crítico ( se calcula mirando la tabla N(0,1)} \end{cases}$$

1. Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0'05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0'01 segundos con un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

   Solución : El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 166 conductores

2. Se supone que la altura de los bebés en una determinada población sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 6 cm. Para estimar la altura media se quiere utilizar una muestra de medida n. Calcular el valor mínimo de n de modo que con un nivel de confianza del 99%, el error de la estimación sea menor que 1cm.

   Solución : El valor de n debe ser, al menos, 239 bebes.

3. Una variable aleatoria X tiene una distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3. Se consideran muestras de tamaño 16. Si se desea que la media de la muestra no se diferencie en más de 1 unidad de la media de la población, con probabilidad de 0'99, ¿cuántos elementos como mínimo se deberían tomar en la muestra?

   Solución : El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 60

4. Un fabricante de pilas alcalinas sabe que la desviación típica de la duración de las pilas que fabrica es de 80 horas. Calcula el tamaño de la muestra que debe someterse a prueba para tener una confianza del 95% de que, al tomar la duración media de la muestra como valor de la duración media de la población total de pilas, el error que se comete sea menor de 16 horas.

   Solución : El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 6294078 pilas

**5.** Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0,5 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 95% la confianza de que el error de su estimación no excederá de 0,05 segundos?
Solución : Deberá hacer, al menos, 385 medidas.

**6.** En una muestra de 100 pacientes sometidos a un cierto tratamiento, se obtiene mejoría en 80 pacientes. Si se trabaja con un nivel de confianza del 95%:
a) ¿Cuál es el error máximo admisible?
b) ¿Cuál es el mínimo número de pacientes que se debe tomar si con el nivel de confianza dado se desea que el error sea menor de 0’05?

a) Solución : Error =0’08.
b) Solución: Se debe tomar una muestra de 246 pacientes

Intervalos de confianza y tamaño de la muestra para la media.

**1.** Para hacer un estudio sobre el precio/día de una habitación doble en hoteles de cuatro estrellas se elige una muestra de 64 de estos hoteles y se obtiene un precio/día medio de 56 euros con una desviación típica de 6 euros. Se pide:
a. Determinar el intervalo de confianza para el precio/día medio de una habitación doble en un hotel de cuatro estrellas con un nivel de confianza del 97%.
b. Hallar el tamaño de la muestra que debe tomar para que el error máximo sea de 2 euros con un nivel de significación del 1%.

Solución: a) $\boxed{I.C\ (54'37\ ,\ 57'63)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 60 hoteles

**2.** Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo ha obtenido con una muestra de tamaño 50 un tiempo medio de 0’85 segundos. Si la variable tiempo de reacción sigue una distribución normal con una desviación típica de 0’05 segundos, hallar el intervalo de confianza al 99%.

¿De qué tamaño ha de tomarse la muestra para tener una confianza al 95% de que el error de la estimación no supera 0’01 segundos?

Solución: $\boxed{I.C\ (0'83\ ,\ 0'87)}$

El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 97 individuos.

**3.** El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son:

255 85 120 290 80 80 275 290 135

a. Construir un intervalo de confianza al 98% para la media poblacional.
b. Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99% el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.

Solución: a) $\bar{x} = 178'88$ $\boxed{I.C\ (101'38\ ,\ 256'38)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 27 electrodomésticos.

**4.** Los gastos mensuales en actividades de ocio de las personas que viven en una determinada ciudad siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 25 euros.

a. En una muestra de 225 personas se obtiene que el gasto medio en dichas actividades es de 95 euros. Hallar un intervalo de confianza del 95% para el gasto medio mensual en actividades de ocio de la población de esa ciudad.
b. Si se elige un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño muestral será necesario para estimar el gasto medio mensual en actividades de ocio de la población de esa ciudad con un error máximo de 1 euro?

Solución: a) $\boxed{I.C\ (91'75\ ,\ 98'27)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 4125 personas.

**5.** El número de días de ausencia en el trabajo de los empleados de cierta empresa para un período de 6 meses, se puede aproximar mediante una distribución normal de desviación típica 1'5 días. Una muestra aleatoria de 10 empleados ha proporcionado los siguientes datos:

5 4 6 8 7 4 2 7 6 1

a. Determinar un intervalo de confianza del 90% para el número medio de días que los empleados de esa empresa han faltado durante los últimos 6 meses.
b. ¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0'5 días con el mismo nivel de confianza?

Solución: a) $\bar{x} = 5$ $\boxed{I.C\ (4'21\ ,\ 5'78)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 25 empleados.

**6.** La estatura de los miembros de una población se distribuye según la ley normal de media desconocida y desviación típica 9 cm. Con el fin de estimar la media se toma una muestra de 9 individuos de la población, obteniéndose para ellos una media aritmética igual a 170 cm.

a) Calcula el intervalo de confianza al nivel 95% para la estatura media de la población.
b) Calcula el tamaño muestral necesario para estimar la media de la población con un error máximo de 5cm y un nivel de confianza del 99%.

Solución: a) $\boxed{I.C\ (164'12\ ,\ 175'88)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 22 personas.

**7.** El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley Normal, con desviación típica de 0'9 kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes se obtuvieron los siguientes pesos en kg

9'5 10 8'5 10'5 12'5 10'5 12'5 13 12

a) Halla un intervalo de confianza, al 99%, para que el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa.

b) Calcular el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0'3 kg, con un nivel de confianza del 90%

Solución: a) $\bar{x} = 11$ $\boxed{I.C\ (10'2275\ ,\ 11'7725)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 25 paquetes.

**8.** Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cm3. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cm3.

a) Obtén un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre en la población. Solución (106,71; 113,29)

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior? Solución E=3,29

**9.** Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal, con desviación típica 900 €. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos nueve meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 4 663 € y 5 839 €.

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos nueve meses? Solución: $\bar{x} = 5251$

b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo? Solución: $95\ \%$

**10.** La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Si el 90% de las medias de las muestras de 81 jóvenes están en (173'4; 175'8), halla $\mu$ y $\sigma$.

Solución: $\mu = 174'6$ $\sigma = 6'57$

**11.** Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media $\mu$ horas y desviación típica 2 horas.

a) A partir de una muestra de 64 alumnos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza ( 7'26 , 8'14) para la media de la población. Determina el nivel de confianza con que se ha construido dicho intervalo.

Solución: $92'16\ \%$

b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de 0'75 horas, con un nivel de confianza del 98%.

Solución : El tamaño muestral mínimo es de 39 estudiantes.

Intervalos de confianza y tamaño de la muestra para la proporción.

**1.** En una universidad se toma una muestra de 100 alumnos al azar, y se encuentra que 62 han aprobado todas las asignaturas.

a) Con un nivel de confianza del 95%, halla un intervalo para estimar el porcentaje de alumnos que aprueban todas las asignaturas

Solución: $\boxed{I.C\ (0'5249\ ,\ 0'7151)}$

b) A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0'03, con el mismo nivel de confianza del 95%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra)

Solución : El tamaño muestral mínimo es de 1006 alumnos.

**2.** En una muestra de 600 personas de una ciudad, se observa que 30 son inmigrantes.

a) Determina un intervalo de confianza de nivel 0'95 para el porcentaje de inmigrantes de esta ciudad.

Solución: $\boxed{I.C\ (0'03\ ,\ 0'07)}$

b) Si se quiere estimar el porcentaje de inmigrantes con un error máximo de 0'02, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar si se usa un nivel de significación del 1%?

Solución : El tamaño muestral mínimo es de 791 personas.

**3.** Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de una universidad, se encontró que un tercio hablaba inglés.

a) Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos que hablan inglés entre los alumnos de esa universidad.

Solución: $\boxed{I.C\ (0'23\ ,\ 0'43)}$

b) A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0'01, con el mismo nivel de confianza del 90%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

Solución : El tamaño muestral mínimo es de 6020 personas.

Tipificar

**1.** En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable aleatoria de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos?

b. ¿Cuál es la distribución de la media muestral, si se toman aleatorias de 64 clientes?

Solución:

a) $\overline{X}_{25} \sim N(10, \frac{2}{\sqrt{25}})$

$$\boxed{P(\overline{X}<9)=P\left(\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{25}}}<\frac{9-10}{\frac{2}{\sqrt{25}}}\right)=P(Z<-2'5)=1-P(Z\leq 2'5)\underset{\boxed{\substack{Miramos\\ la\ tabla\\ N(0,1)}}}{=}1-0'9938=0'0062}$$

b) $\boxed{\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(10, \frac{2}{\sqrt{64}}) = N(10, 0'25)}$

**2.** Considérese una población en la que se estudia una característica X que sigue una distribución normal de media 12 y desviación típica 4. Se pide:

a. Probabilidad de que un elemento de la población elegido al azar tenga la característica superior a 14.

b. Se considera una muestra aleatoria de tamaño n=9, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral tenga un valor superior a 14?

Solución:

a) $X \sim N(12, 4)$

$$\boxed{P(X>14)=P\left(\frac{X-12}{4}>\frac{14-12}{4}\right)=P(Z>0'5)=1-P(Z\leq 0'5)\underset{\boxed{\substack{Miramos\\ la\ tabla\\ N(0,1)}}}{=}1-0'6915=0'3085}$$

b) $\overline{X}_9 \sim N(12, \frac{2}{\sqrt{9}}) = N(12, \frac{4}{3})$

$$\boxed{P(\overline{X}>14)=P\left(\frac{\overline{X}-12}{\frac{4}{3}}>\frac{14-12}{\frac{4}{3}}\right)=P(Z>1'5)=1-P(Z\leq 1'5)\underset{\boxed{\substack{Miramos\\ la\ tabla\\ N(0,1)}}}{=}1-0'9332=0'0668}$$

**3.** La temperatura corporal en una cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36’7ºC y desviación típica 3’8ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra:

a. Sea menor ó igual a 36’9ºC.
b. Esté comprendida entre 36’5ºC y 37’3ºC.

Solución:

a) $X \sim N(36'7, 3'8) \underset{\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\Rightarrow} \overline{X}_{100} \sim N(36'7, \frac{3'8}{\sqrt{100}}) = N(36'7, 0'38)$

$$\boxed{P(\overline{X} \leq 36'9) = P(\frac{\overline{X} - 36'7}{0'38} \leq \frac{36'9 - 36'7}{0'38}) = P(Z \leq 0'52) \underset{\boxed{\substack{Miramos \\ la\ tabla \\ N(0,1)}}}{=} 0,6985}$$

b)

$$\boxed{\begin{array}{l} P(36'5 \leq \overline{X} \leq 37'3) = P(\frac{36'5 - 36'7}{0'38} \leq \frac{\overline{X} - 36'7}{0'38} \leq \frac{37'5 - 36'7}{0'38}) = P(-0'52 \leq Z \leq 2'10) = \\ = P(Z \leq 2'10) - P(Z \leq -0'52) = P(Z \leq 2'10) - [1 - P(Z \leq 0'52)] \underset{\boxed{\substack{Miramos \\ la\ tabla \\ N(0,1)}}}{=} 0'9821 - [1 - 0'6985] = 0'6806 \end{array}}$$

**4.** Se tienen muchos datos que siguen una distribución normal de media 20 y desviación típica 2. :

a) Calcula la probabilidad de que los datos superen el valor de 23. Solución: 0’0668

b) Calcula la probabilidad de que los datos sean inferiores a 15. Solución: 0’0062

**5.** Se supone que el peso de las mujeres de una determinada región sigue una distribución normal de media 64 kg y desviación típica 6 kg. Se toma una muestra al azar de 144 de estas mujeres y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea al menos de 63 kg?

Solución: 0’9772

**6.** La edad a la que contraen matrimonio los hombres de Toledo es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha ciudad.

a) ¿Cuál es la media y la desviación típica de la media?

Solución: Media= 35 años    Desviación típica = 0'5 años

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra este comprendida entre 36 y 37 años?

Solución: 0'0228

**7.** Se conoce que el número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una distribución normal de media 8'1 días y desviación típica 3 días. Se elige al azar una muestra de 100 enfermos. ¿Cuál es la distribución de la media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de permanencia de los enfermos de ese hospital esté comprendida entre 8 y 10 días?

Solución: $\overline{X} \sim N(8'1, 0'3)$ ; 0'3707

**8.** Se supone que la altura de las alumnas de segundo de Bachillerato de una determinada ciudad sigue una ley Normal de 165 cm de media y 11 cm de desviación típica. Se toma una muestra al azar de 121 de estas alumnas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea menor que 164 cm? Solución: 0'1587

**9.** Se sabe que en el último año el gasto mensual en transporte de los estudiantes de un IES sigue una distribución normal de media 42 euros y desviación típica 3'20 euros.

a) ¿Qué distribución seguirán las medias de las muestras de tamaño 64 alumnos, obtenidas por muestreo aleatorio simple? Solución: $\overline{X} \sim N(42, 0'4)$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una de esas muestras de 64 alumnos sea inferior o igual a 43'50 euros? Solución: 1

**10.** La media de edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la universidad en una determinada población es de 18'1 años y la desviación típica de 0'6 años.

a) De los alumnos anteriores se elige al azar una muestra de 100. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra esté comprendida entre 17'9 y 18'3 años, con una confianza de 99'5%? Solución: 0'9992

b) ¿Qué tamaño debe tener una muestra de dicha población para que su media esté comprendida entre 17’9 y 18’3 con una confianza de 99’5%? Solución: n= 71

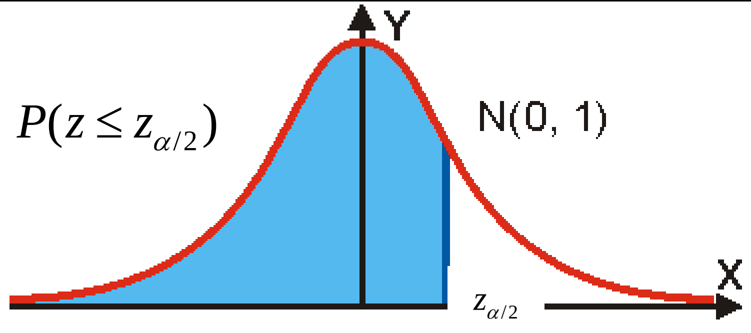
**11.** La puntuación que obtienen los niños en cierto test psicológico sigue una distribución N (85 , 15).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño elegido al azar obtenga más de 100 puntos? Solución: 0’1587

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación media en una muestra de 10 años sea de más de 100 puntos? Solución: 0’0008

Pablo Gª-Pulgar Perezagua
Departamento Matemáticas
I.E.S. GABRIEL CISNEROS

## ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)




| z | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4,0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |