1) (EBAU 2022 Junio) Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 44 €. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 €. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices. ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

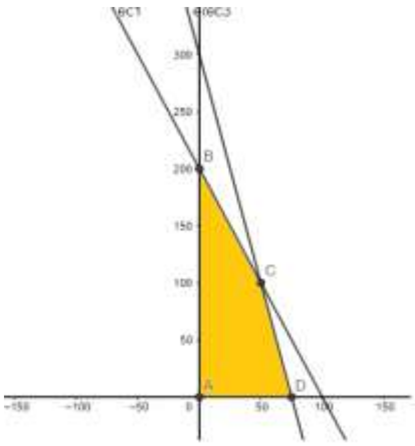
Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x → número de Packs tipo A e y → número de Packs tipo B

	Cantidad	Tartas de Queso	Quesadas
Packs tipo A	x	4x	12x
Packs tipo B	y	2y	3y
	x + y	4x+2y	12x+3y

<u>Restricciones:</u>

$$\begin{cases} 4x + 2y \le 400 \\ 12x + 3y \le 900 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y \le 200 \\ 4x + y \le 300 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 44x +16y

Como se trata de una región factible cerrada, la solución óptima (ingresos máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Beneficios en cada uno de esos vértices son:

$$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,0) \rightarrow B(A) = B(0,0) = 44\cdot 0 + 16\cdot 0 = 0€$$

$$B \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 200 \end{cases} \rightarrow B(0,200) \rightarrow B(B) = B(0,200) = 44\cdot 0 + 16\cdot 200 = 3200€$$

$$C \begin{cases} 2x + y = 200 \\ 4x + y = 300 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 100 \end{cases} \rightarrow C(50,100) \rightarrow B(C) = B(50,100) = 44\cdot 50 + 16\cdot 100 = 3800€$$

$$D \begin{cases} y = 0 \\ 4x + y = 300 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 75 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D(75,0) \rightarrow B(D) = B(75,0) = 44\cdot 75 + 16\cdot 0 = 3300€$$

Para obtener los máximos Beneficios se deben producir 50 packs del Producto A y 100 packs Producto B, siendo el beneficio de 3800€.

2) (EBAU 2022 Julio) Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices. ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Se trata de un problema de programación lineal.

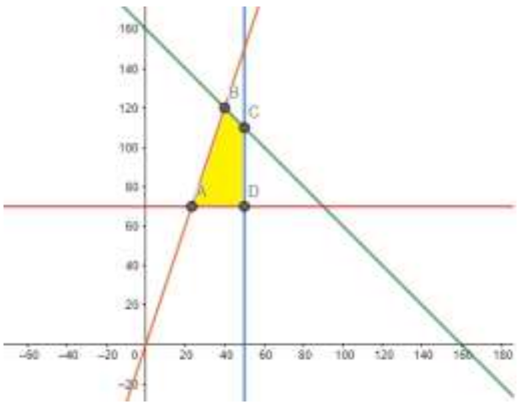
Las variables de decisión son: x → número de vacas de raza parda

y → número de vacas de raza frisona

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 350x + 500y

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y \le 160 \\ x \le 50 \\ y \ge 70 \\ x \ge \frac{1}{3}y \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y \le 160 \\ x \le 50 \\ y \ge 70 \\ y \le 3x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región factible cerrada, la solución óptima (beneficios máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} y = 70 \\ y = 3x \end{cases}$ → A (70/3,70) → $B(A) = B(\frac{70}{3}, 70)$= 350·70/3 + 500·70 = 43.166,67€

B $\begin{cases} x+y = 160 \\ y = 3x \end{cases}$ → $B(40,120)$ → $B(B) = B(40,120)$ = 350·40 + 500·120 = 74.000€

C $\begin{cases} x = 50 \\ x+y = 160 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 50 \\ y = 110 \end{cases}$ → $C(50,110)$ → $B(C) = B(50,110)$ = 350·50 + 500·110 = 72.500€

D $\begin{cases} x = 50 \\ y = 70 \end{cases}$ → $D(50,70)$ → $B(D) = B(50,70)$ = 350·50 + 500·70 = 52.500€

Para obtener los máximos Beneficios se deben comprar 40 vacas tipo parda y 120 vacas tipo frisona, siendo el beneficio de 74.000€.

3) (EBAU Junio 2021) Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3200: cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8h. Además, solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana: cada kg de A necesita 3’75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Se trata de un problema de programación lineal.

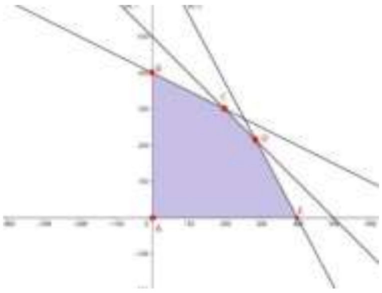
Las variables de decisión son: x → número de kilogramos del producto A y → número de kilogramos del producto B

	Cantidad	Horas Semanales	Materia Prima
Kg del producto A	x	4x	3,75x
Kg del Producto B	y	8y	2y
	x + y	4x+8y	3,75x + 2y

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 5x+7y

<u>Restricciones:</u>

$$\begin{cases} x+y\le 500 \\ 4x+8y\le 3200 \\ 3{,}75x+2y\le 1500 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y\le 500 \\ x+2y\le 800 \\ 15x+8y\le 6000 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región factible cerrada, la solución óptima (Ingresos máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Beneficios en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow A(0,0) \rightarrow B(A) = B(0,0) = 5\cdot 0 + 7\cdot 0 = 0€$

B $\begin{cases} x=0 \\ x+2y=800 \end{cases} \rightarrow B(0,400) \rightarrow B(B) = B(0,400) = 5\cdot 0 + 7\cdot 400 = 2800€$

C $\begin{cases} x+y=500 \\ x+2y=800 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=200 \\ y=300 \end{cases} \rightarrow C(200,300) \rightarrow B(C) = B(200,300) = 5\cdot 200 + 7\cdot 300 = 3100€$

D $\begin{cases} x+y=500 \\ 15x+8y=6000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{2000}{7} \\ y=\frac{1500}{7} \end{cases} \rightarrow D(\frac{2000}{7},\frac{1500}{7}) \rightarrow B(D) = B= 5\cdot\frac{2000}{7} + 7\cdot\frac{1500}{7} = 2928{,}57€$

E $\begin{cases} 15x+8y=6000 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=400 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow E(400,0) \rightarrow B(E) = B(400,0) = 5\cdot 400 + 7\cdot 0 = 2000€$

Para obtener los máximos Beneficios se deben producir 200 kg del Producto A y 300 kg del Producto B, siendo el beneficio de 3100€

4) (EBAU 2021 Julio) Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros con memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venta de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A.

a) ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos?
b) ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Se trata de un problema de programación lineal.

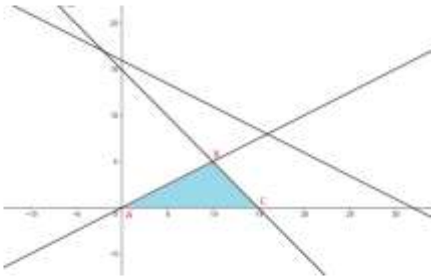
Las variables de decisión son: x → número de lotes tipo A e y → número de lotes tipo B

	Cantidad	Lapiceros Memoria USB	Tabletas Digitales
Lote tipo A	x	3x	x
Lote tipo B	y	6y	y
	x + y	3x + 6y	x + y

El objetivo es maximizar los Ingresos I(x,y) = 70x + 160y

Restricciones:

$$\begin{cases} 3x+6y \le 96 \\ x+y \le 15 \\ y \le \frac{x}{2} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y \le 32 \\ x+y \le 15 \\ y \le \frac{x}{2} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región factible cerrada, la solución óptima (Ingresos máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,0) \rightarrow I(A) = I(0,0) = 70\cdot 0 + 160\cdot 0 = 0€$

$B \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x+y = 15 \end{cases} \rightarrow B(10,5) \rightarrow I(B) = I(10,5) = 70\cdot 10 + 160\cdot 5 = 1500€$

$C \begin{cases} x+y = 15 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow C(15,0) \rightarrow I(C) = I(15,0) = 70\cdot 15 + 160\cdot 0 = 1050€$

Para obtener los máximos Ingresos deben prepararse 10 lotes de tipo A y 5 lotes de tipo B, siendo los Ingresos de 1500€

5) (EBAU 2020 Junio) Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de Piña	**Zumo de Mango**	**Zumo de Papaya**
A	**0,5 litros**	**0,5 litros**	
B	**0,4 litros**		**0,6 litros**

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B. Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya. Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x → número de litros que deben producirse semanalmente de la bebida A

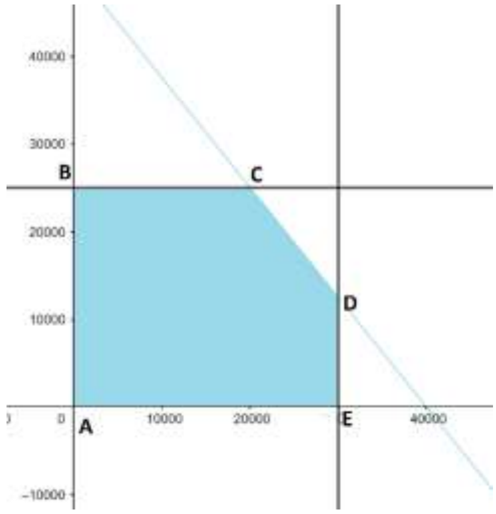
y → número de litros que deben producirse semanalmente de la bebida B

	Cantidad	Zumo de Piña	Zumo de Mango	Zumo de Papaya
A	x	0,5 litros	0,5 litros	
B	y	0,4 litros		0,6 litros

El objetivo es maximizar los ingresos: I(x,y) = 1,5x + 1,75y

Restricciones:

$$\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}4y \leq 20.000 \\ 0{,}5x \leq 15.000 \\ 0{,}6y \leq 15.000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 4y \leq 200.000 \\ x \leq 30.000 \\ y \leq 25.000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (Ingresos máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ A(0,0) $\rightarrow$ I(A) = I(0,0)= 1,5·0 + 1,75·0 = 0€

B $\begin{cases} x = 0 \\ y = 25.000 \end{cases} \rightarrow$ B(0, 25.000) $\rightarrow$ I(B) = I(0,25000)= 1,5·0 + 1,75·25000 = 43750€

C $\begin{cases} 5x + 4y = 200000 \\ y = 25000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 20000 \\ y = 25000 \end{cases} \rightarrow$ C(20000,25000) $\rightarrow$ I(C) = 1,5·20000 + 1,75·25000 = 73750€

D $\begin{cases} x = 30000 \\ 5x + 4y = 200000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 30000 \\ y = 12500 \end{cases} \rightarrow$ D(30000,12500) $\rightarrow$ I(D)= 1,5·30000+1,75·12500 = 66875€

E $\begin{cases} x = 30000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 30000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ E(30000,0)$\rightarrow$ I(E) = I(30000,0) = 1,5·30000 + 1,75·0 = 45000€

Para obtener los máximos Ingresos deben producir 20.000 litros semanalmente de la bebida A y 25.000 litros semanalmente de la bebida B, siendo los Ingresos de 73750 €.

6) (EBAU 2020 Julio) Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B, uno de 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Se trata de un problema de programación lineal.

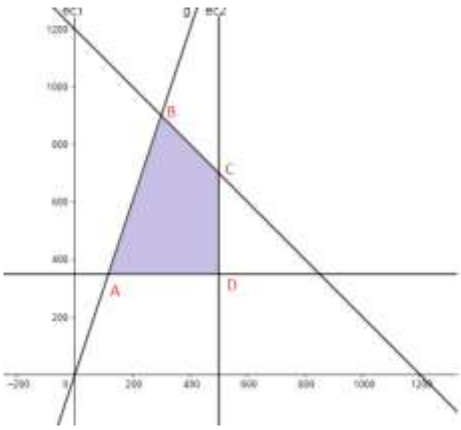
Las variables de decisión son: x → número de acciones de tipo A

y → número de acciones de tipo B

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 0,2x + 0,08y

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 1200 \\ x \le 500 \\ y \ge 350 \\ y \le 3x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 4y \le 200.000 \\ x \le 30.000 \\ y \le 25.000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (beneficios máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Beneficios en cada uno de esos vértices son:

$$A \begin{cases} y = 350 \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow A(\tfrac{350}{3},350) \rightarrow B(A) = B\left(\tfrac{350}{3}, 350\right) = 0,2\cdot\tfrac{350}{3} + 0,08\cdot 350 = \tfrac{154}{3} = 51.33€$$

$$B \begin{cases} x + y = 1200 \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow B(300, 900) \rightarrow B(B) = B(300,900) = 0,2\cdot 300 + 0,08\cdot 900 = 132€$$

$$C \begin{cases} x + y = 1200 \\ x = 500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 700 \end{cases} \rightarrow C(500,700) \rightarrow B(C) = B(500,700) = 0,2\cdot 500 + 0,08\cdot 700 = 156€$$

$$D \begin{cases} x = 500 \\ y = 350 \end{cases} \rightarrow D(500,350) \rightarrow B(D) = B(500,350) = 0,2\cdot 500 + 0,08\cdot 350 = 128€$$

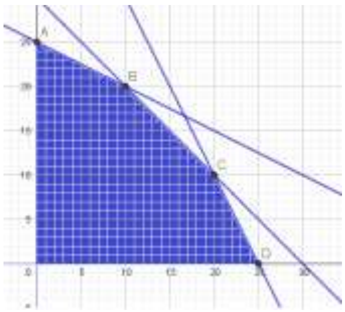
Para obtener los máximos Beneficios deben comprar 500 acciones de tipo A y 700 acciones de tipo B, siendo los Beneficios de 156 €.

7) (EBAU 2018 Junio) Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y de cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Las variables: x → número de docenas de tartas de hojaldre e y → número de docenas de tartas de chocolate.

	Cantidad	Harina	Azúcar	Mantequilla	Beneficio
Docenas de Hojaldre	x	2,5x	x	x	15x
Docenas de Chocolate	y	5y	0,5y	y	25y
Disponibilidad		125	25	30	

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 15x + 25y



Restricciones:

$$\begin{cases} 2{,}5x + 5y \le 125 \\ x + 0{,}5y \le 25 \\ x + y \le 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y \le 50 \\ 2x + y \le 50 \\ x + y \le 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (Ingresos máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

$0\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,0) \rightarrow B(0) = B(0,0) = 15\cdot 0 + 25\cdot 0 = 0€$

$A\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 25 \end{cases} \rightarrow A(0,25) \rightarrow B(A) = B(0,25) = 15\cdot 0 + 25\cdot 25 = 625€$

$B\begin{cases} x + 2y = 50 \\ x + y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases} \rightarrow B(10,20) \rightarrow B(B) = B(10,20) = 15\cdot 10 + 25\cdot 20 = 650€$

$C\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow C(20,10) \rightarrow B(C) = B(20,10) = 15\cdot 20 + 25\cdot 10 = 550€$

$D\begin{cases} 2x + y = 50 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D(25,0) \rightarrow B(D) = B(25,0) = 15\cdot 25 + 25\cdot 0 = 375€$

Para obtener los máximos Beneficios deben preparar 10 docenas de tartas de hojaldre y 20 docenas de tartas de chocolate, siendo los beneficios de 650 €.

8) (EBAU 2018 Julio) Una asociación de vecinos ha programado una excursión en la que se han inscrito 540 personas. La compañía con la que han contratado el viaje dispone de 12 autocares de 60 plazas y de 9 de 40 plazas, pero en las fechas previstas para el viaje solo se podrá contar con 10 conductores. Por otro lado, alquilar un autocar grande supone 100 euros; y uno pequeño, 65 euros. ¿Cuántos autocares de cada tipo deberán alquilarse para minimizar los costes?

Se trata de un problema de programación lineal.

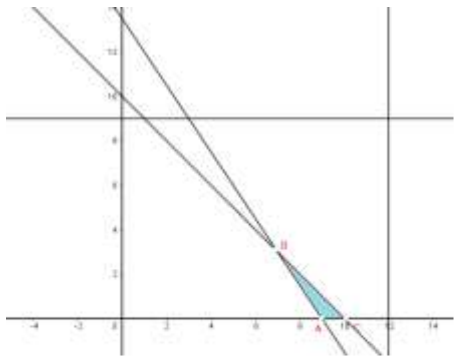
Las variables de decisión son: x → número de Autocares de 60 plazas

y → número de Autocares de 40 plazas

El objetivo es minimizar los costes: C(x,y) = 100x + 65y

Restricciones:

$$\begin{cases} 60x + 40y \geq 540 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 12 \\ y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y \geq 27 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 12 \\ y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (Costes mínimos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos costes en cada uno de esos vértices son:

$$A\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(9,0) \rightarrow C(A) = C(9,0) = 100\cdot 9 + 65\cdot 0 = 900€$$

$$B\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ x + y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow B(7,3) \rightarrow C(B) = C(7,3) = 100\cdot 7 + 65\cdot 3 = 895€$$

$$C\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow C(10,0) \rightarrow C(C) = C(10,0) = 100\cdot 10 + 65\cdot 0 = 1000€$$

Para obtener el mínimo coste deben alquilar 7 Autobuses de 60 plazas y 3 Autobuses de 40 plazas, siendo el coste de 895 €.

9) (EBAU 2017 Julio) Considérese una pequeña empresa dedicada a la fabricación de mobiliario. En concreto, produce dos modelos de armario: A y B. Se dispone de 12 carpinteros para ensamblar los muebles, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias.

El tiempo de ensamblado de cada tipo de mueble y los beneficios obtenidos por la venta de cada unidad se muestran en la tabla adjunta:

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Una unidad del modelo A	**3 horas**	**70 euros**
Una unidad del modelo B	**6 horas**	**160 euros**

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo, con la condición de que el número de unidades del modelo B debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A.

Si la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos armarios de cada modelo deben producirse al día para obtener los máximos beneficios diarios?

Se trata de un ejercicio de programación lineal.

x→ número de armarios de tipo A.

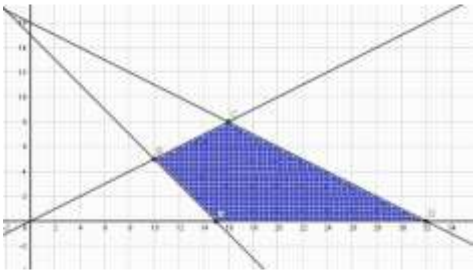
y→ número de armarios de tipo B

	Cantidad	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Armarios modelo A	x	3x	70x
Armarios modelo B	y	6y	160y
Disponibilidad		12 carpinteros·8 = 96 horas	

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x)= 70x+160y

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 3x+6y \leq 96 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y \geq 15 \\ x \geq 2y \\ x+2y \leq 32 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (Ingresos máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de esos ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x+y=15 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow$ A(15,0) $\rightarrow$ B(A) = B(15,0) =70·15+160·0 = 1050 €

B $\begin{cases} x=2y \\ x+y=15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=5 \end{cases} \rightarrow$ B(10,5) $\rightarrow$ B(B) = B(10,5) = 70·10+160·5 = 1500€

C $\begin{cases} x=2y \\ x+2y=32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=8 \end{cases} \rightarrow$ C(16,8) $\rightarrow$ B(C) = B(16,8)= 70·16+160·8 = 2400€

D $\begin{cases} y=0 \\ x+2y=32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=32 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow$ D(32,0) $\rightarrow$ B(D) = B(32,0) = 70·32+160·0 = 2240€

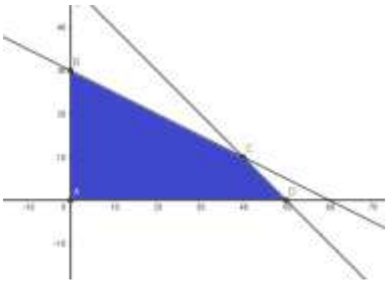
Para obtener el máximo beneficio deben fabricar 16 armarios de tipo A y 8 armarios de tipo B, siendo el beneficio de 2400 €.

10) (EBAU 2016 Julio) Una fábrica de productos navideños decide comercializar, con vistas a la próxima campaña de diciembre, dos surtidos diferentes con polvorones de limón y roscos de vino. En concreto, para los dos surtidos elabora 750 polvorones de limón y 600 roscos de vino. Cada caja del surtido A contendrá 15 polvorones de limón y 10 roscos de vino. Cada caja del surtido B,
15 polvorones de limón y 20 roscos de vino. Las cajas del surtido A las venderá a 8 euros la unidad, y las cajas del surtido B, a 10 euros la unidad. ¿Cuántas cajas de cada tipo se deben preparar y vender para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Se trata de un ejercicio de programación lineal. x→ Número de cajas de tipo A
y→ Número de cajas de tipo B

	Cantidad	Polvorones de Limón	Roscos de Vino	Precio
Cajas de Tipo A	x	15x	10x	8x
Cajas de Tipo B	y	15y	20y	10y
Disponibilidad		750	600	

El objetivo es maximizar los Ingresos: I(x)= 8x+10y → Función Objetivo



Restricciones:

$$\begin{cases} 15x+15y\le 750 \\ 10x+20y\le 600 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y\le 50 \\ x+2y\le 60 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (Ingresos máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de esos ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ → A(0,0) → I(A) = I(0,0)= 8·0+10·0 = 0€

B $\begin{cases} x=0 \\ x+2y=60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=30 \end{cases}$ → B(0,30) → I(B) = I(0,30)= 8·0+10·30 = 300€

C $\begin{cases} x+y=50 \\ x+2y=60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=10 \end{cases}$ → C(40,10) → I(C) = I(40,10) = 8·40+10·10 = 420€

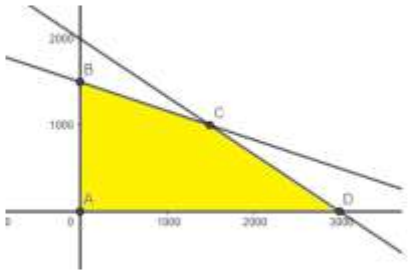
D $\begin{cases} x+y=50 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=0 \end{cases}$ → D(50,0)→ I(D) = I(50,0)= 8·50 + 10·0 = 400€

Para obtener los máximos Ingresos deben preparar 40 cajas de tipo A y 10 cajas de tipo B, siendo los ingresos de 420 €.

11) (EBAU 2015 Junio) Una empresa discográfica quiere sacar al mercado los discos de dos nuevos grupos. Estima que por cada disco producido del primer grupo obtendrá unos beneficios de 2 euros, mientras que cada disco del segundo grupo le reportará unos beneficios de 3,5 euros. El proceso de producción de los discos requiere de su paso por un departamento de edición y otro de estampación. Cada disco del primer grupo necesita 2 horas de edición y 1 hora de estampación, mientras que cada disco del segundo grupo necesita 3 horas de edición y 3 horas de estampación. La empresa, con los recursos disponibles, puede utilizar un máximo de 6 000 horas de edición y 4 500 horas de estampación. Con todos estos datos, determinar las unidades a producir de cada disco para maximizar los beneficios de la empresa. ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Grupo	Cantidad	Edición	Estampación	Beneficio
I	x	2x	x	2x
II	y	3y	3y	3,5y
Disponibilidades		6 000 h	4 500 h	

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 2x + 3,5y



<u>Restricciones:</u>

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 6000 \\ x + 3y \leq 4500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la sombreada en la siguiente figura adjunta. Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones. Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (Beneficio máximo), se da en alguno de los vértices anteriores. Los valores de ese beneficio en cada uno de ellos son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \mathrm{A}(0,0) \rightarrow \mathrm{B}(\mathrm{A}) = \mathrm{B}(0,0)$= 2·0 + 3,5·0 = 0€

B $\begin{cases} x + 3y = 4500 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1500 \end{cases} \rightarrow \mathrm{B}(0,1500) \rightarrow \mathrm{B}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}(0,1500)$= 2·0 + 3,5·1500 = 5250€

C $\begin{cases} 2x + 3y = 6000 \\ x + 3y = 4500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1500 \\ y = 1000 \end{cases} \rightarrow$ C(1500,1000) → $\mathrm{B}(\mathrm{C}) = \mathrm{B}(1500,1000)$ = 2·1500 + 3,5·1000 = 6500€

D $\begin{cases} 2x + 3y = 6000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ D (3000,0) → $\mathrm{B}(\mathrm{D}) = \mathrm{B}(3000,0)$ = 2·3000 + 3,5·0 = 6000€

El máximo beneficio será de 6 500 euros. Se obtiene cuando se producen 1 500 discos del Grupo I y 1 000 discos del Grupo II.

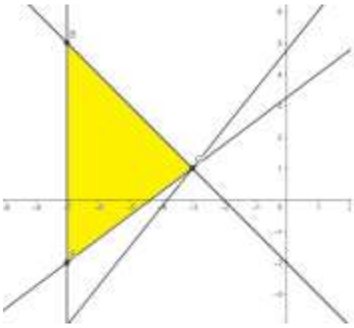
12) (EBAU Andalucía 2021 Julio) Se consideran las siguientes inecuaciones:

5x-4y ≤ −19 3x-4y ≤ -13 x ≥ -7 -x-y ≥ 2

a) Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función G(x,y) = $-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ **en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?**

c) Responda de forma razonada si la función G(x,y) = $-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ **puede alcanzar el valor 47/3 en la región factible hallada.**



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (máximo y el mínimo), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x=-7 \\ 3x-4y=-13 \end{cases}$ → A(-7,-2)

B $\begin{cases} x=-7 \\ -x-y=2 \end{cases}$ → B(-7,5)

C $\begin{cases} 5x-4y=-19 \\ 3x-4y=-13 \end{cases}$ → C (-3,1)

b) G(x,y) = $-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$

A(-7,-2) → G(-7,-2) = $-\frac{1}{5}(-7)+\frac{5}{2}(-2) = -\frac{18}{5} = -3{,}6$

B(-7,5) → G(-7,5) = $-\frac{1}{5}(-7)+\frac{5}{2}(5) = \frac{139}{10} = 13{,}9$

C (-3,1) → G(-3,1) = $-\frac{1}{5}(-3)+\frac{5}{2}(1) = \frac{31}{10} = 3{,}1$

El mínimo se encuentra en el vértice A (-7,-2) y el valor es -3,6

El máximo se encuentra en el vértice B (-7,5) y el valor es 13,9

c) 47/3 = $15{,}\hat{6}$

El valor máximo que se puede alcanzar dentro de la región factible es 13,9 por lo que nunca alcanzaremos el valor $15{,}\hat{6}$, por lo tanto no sería posible.

13) (EBAU Andalucía 2021 Junio) Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción. Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Se trata de un problema de programación lineal.

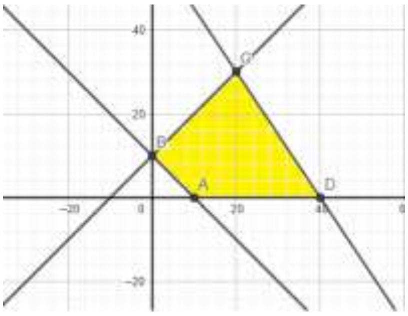
Las variables de decisión son: x → número de baterías tipo A producidas semanalmente

y → número de baterías tipo B producidas semanalmente

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 130x + 140y

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y\geq 10 \\ y\leq x+10 \\ 150x+100y\leq 6000 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y\geq 10 \\ y\leq 10 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (beneficios máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

$$A\begin{cases} x+y=10 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow A(10{,}0) \rightarrow B(A) = B(10{,}0) = 130\cdot 10 + 140\cdot 0 = 1300€$$

$$B\begin{cases} y=x+10 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=10 \end{cases} \rightarrow B(0{,}10) \rightarrow B(B) = B(0{,}10) = 130\cdot 0 + 140\cdot 10 = 1400€$$

$$C\begin{cases} 3x+2y=120 \\ y=x+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=30 \end{cases} \rightarrow C(20{,}30) \rightarrow B(C) = B(20{,}30) = 130\cdot 20 + 140\cdot 30 = 6800€$$

$$D\begin{cases} 3x+2y=120 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow D\,(40{,}0) \rightarrow B(D) = B(40{,}0) = 130\cdot 40 + 140\cdot 0 = 5200€$$

Para obtener el máximo beneficio deben producir 20 baterías tipo A y 30 baterías tipo B, siendo el beneficio de 6800 €.

14) (EBAU Aragón 2021 Julio) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

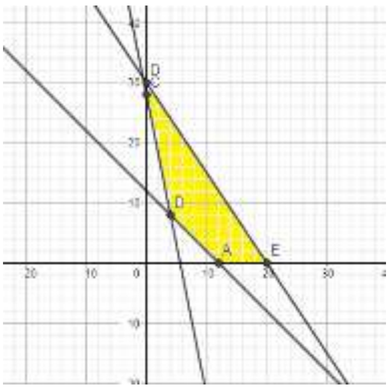
a. Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b. Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

Se trata de un ejercicio de programación lineal. x → Kilos de soja
y → Kilos de maíz

	Cantidad	Proteína	Grasa vegetal	Precio
Kilos de Soja	x	5x	3x	3x
Kilos de Maíz	y	y	3y	2y
Disponibilidad		28	36	

El objetivo es minimizar los costes: C(x)= 3x+2y → Función Objetivo



Restricciones:

$$\begin{cases} 5x + y \geq 28 \\ 3x + 3y \geq 36 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + y \geq 28 \\ x + y \geq 12 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (Costes mínimos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de esos costes en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x + y = 12 \\ y = 0 \end{cases}$ → A(12,0) → C(A) = C(12,0)= 3·12+2·0 = 36€

B $\begin{cases} 5x + y = 28 \\ x + y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$ → B(4,8) → C(B) = C(4,8)= 3·4+2·8 = 28€

C $\begin{cases} 5x + y = 28 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 28 \end{cases}$ → C(0,28) → C(C) = C(0,28) = 3·0+2·28 = 56€

D $\begin{cases} 3x + 2y = 60 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 30 \end{cases}$ → D(0,30)→ C(D) = C(0,30) = 3·0 + 2·30 = 60€

E $\begin{cases} 3x + 2y = 60 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases}$ → E(20,0)→ C(E) = C(20,0) = 3·20 + 2·0 = 60€

Para obtener el mínimo coste, los cerdos deben consumir 4kg de soja y 8 kg de maíz, siendo el coste de 28 €.

b) La solución no sería óptima ya que no cumpliría las restricciones marcadas por el enunciado. La coordenada (12,15) estaría fuera de la región factible.

$$\begin{cases} 5x+y\geq 28 \rightarrow 5\cdot 12+15\geq 28 \rightarrow 75\geq 28 \rightarrow \text{lo cumple} \\ x+y\geq 12 \rightarrow 12+15\geq 12 \rightarrow 27\geq 12 \rightarrow \text{ lo cumple} \\ 3x+2y\leq 60 \rightarrow 3\cdot 12+2\cdot 15\leq 60 \rightarrow 66\leq 60 \rightarrow \text{No lo cumple} \\ x\geq 0 \rightarrow 12\geq 0 \rightarrow \text{ lo cumple} \\ y\geq 0 \rightarrow 15\geq 0 \rightarrow \text{ lo cumple} \end{cases}$$

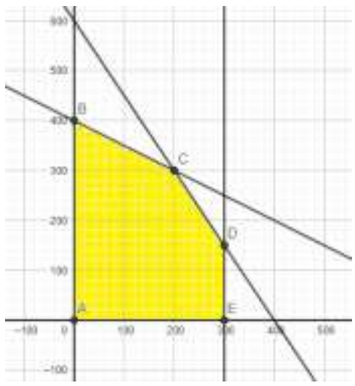
15) (EBAU Aragón 2021 Junio) Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide: a. Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo? b. Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

Se trata de un ejercicio de programación lineal. x → número de lotes de oferta A

y → número de lotes de oferta B

	Cantidad	Botas	Mocasines	Zapatillas	Precio
Lotes A	x	x	3x	7x	360x
Lotes B	y	2y	2y		120y
Disponibilidad		800	1200	2100	

El objetivo es minimizar los ingresos: I(x)= 360x + 120y → Función Objetivo



Restricciones:

$$\begin{cases} x+2y \leq 800 \\ 3x+2y \leq 1200 \\ 7x \leq 2100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y \leq 800 \\ 3x+2y \leq 1200 \\ x \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (ingresos máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de esos ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ → A(0,0) → I(A) = I(0,0)= 360·0+120·0 = 0€

B $\begin{cases} x + 2y = 800 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 400 \end{cases}$ → B(0,400) → I(B) = I(0,400) = 360·0+120·400 = 48000€

C $\begin{cases} x + 2y = 800 \\ 3x + 2y = 1200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 300 \end{cases}$ → C(200,300) → I(C) = I(200,300) = 360·200+120·300 = 108000€

D $\begin{cases} 3x + 2y = 1200 \\ x = 300 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 150 \end{cases}$ → D(300,150)→ I(D) = I(300,150)= 360·300+120·150 = 126000€

E $\begin{cases} x = 300 \\ y = 0 \end{cases}$ → E(300,0)→ I(E) = I(300,0)= 360·300+120·0 = 108000€

Para obtener los máximos ingresos, debe vender 300 lotes A y 150 lotes B, siendo estos de 126000 €.

b) La solución es la coordenada (300,150)

Botas → $x + 2y \leq 800$ → 300 + 2·150 ≤ 800 → 600 ≤ 800 → Le quedan 200 botas sin vender

Mocasines → $3x + 2y \leq 1200$ → 3·300 + 2·150 ≤ 1200 → 1200 ≤ 1200 → Vende todos los mocasines

Zapatillas → $x \leq 300$ → 300 ≤ 300 → Vende todas las zapatillas

16) (EBAU Canarias 2021 Julio) Se quieren plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros. a) Plantear el correspondiente problema de Programación Lineal b) Representar la región factible e indicar sus vértices c) Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

Se trata de un problema de programación lineal.

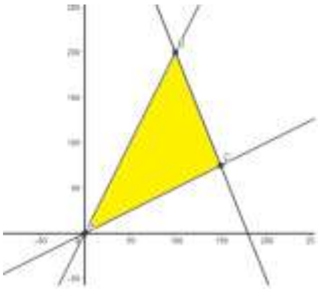
Las variables de decisión son: x → número de plataneras

y → número de naranjeros

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 15x + 8y

Restricciones:

$$\begin{cases} x \leq 2y \\ x \geq \frac{y}{2} \\ 5x + 2y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (beneficios máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

$$A \begin{cases} x = 2y \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,0) \rightarrow B(A) = B(0,0) = 15 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0€$$

$$B \begin{cases} x = y/2 \\ 5x + 2y = 900 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 200 \end{cases} \rightarrow B(100,200) \rightarrow B(B) = B(100,200) = 15 \cdot 100 + 8 \cdot 200 = 3100€$$

$$C \begin{cases} x = 2y \\ 5x + 2y = 900 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 150 \\ y = 75 \end{cases} \rightarrow C(150,75) \rightarrow B(C) = B(150,75) = 15 \cdot 150 + 8 \cdot 75 = 2850€$$

Para obtener el máximo beneficio se deben plantar 100 plataneras y 200 naranjeros, siendo el beneficio de 3100€.

17) (EBAU Castilla la Mancha 2021 Julio) En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio.

Se trata de un problema de programación lineal.

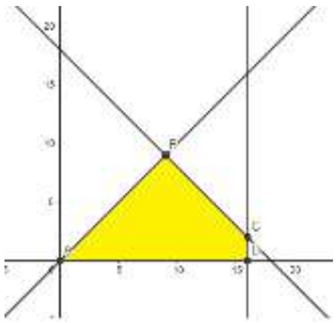
Las variables de decisión son: x → hectáreas para sembrar aguacates

y → hectáreas para sembrar mangos

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 10000x + 12000y

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 18 \\ x \leq 16 \\ y \leq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (beneficios máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,0) \rightarrow B(A) = B(0,0) = 10000 \cdot 0 + 12000 \cdot 0 = 0€$

$B \begin{cases} x + y = 18 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 9 \end{cases} \rightarrow B(9,9) \rightarrow B(B) = B(9,9) = 10000 \cdot 9 + 12000 \cdot 9 = 198000€$

$C \begin{cases} x + y = 18 \\ x = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow C(16,2) \rightarrow B(C) = B(16,2) = 10000 \cdot 16 + 12000 \cdot 2 = 184000€$

$D \begin{cases} y = 0 \\ x = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D(16,0) \rightarrow B(D) = B(16,0) = 10000 \cdot 16 + 12000 \cdot 0 = 160000€$

Para obtener el máximo beneficio se deben plantar 9 hectáreas de aguacates y 9 hectáreas para mangos, siendo el beneficio de 198000€.

18) (EBAU Castilla y León 2020 Julio) Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B. Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

Las variables de decisión son: x → número de lotes tipo A

y → número de lotes tipo B

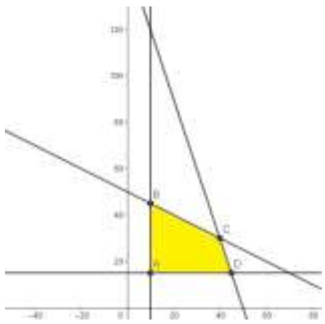
Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	Cantidad	Botes de Alubias	Botes de Garbanzos	Beneficio
Lotes A	x	1x	3x	3x
Lotes B	y	2y	y	2y
Disponibilidad		100	150	3x+2y

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = 3x + 2y

<u>Restricciones:</u>

$$\begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (beneficios máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

$$A \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases} \rightarrow A(10,15) \rightarrow B(A) = B(10,15) = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 15 = 60€$$

$$B \begin{cases} x = 10 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 45 \end{cases} \rightarrow B(10,45) \rightarrow B(B) = B(10,45) = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 45 = 120€$$

$$C \begin{cases} x + 2y = 100 \\ 3x + y = 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 30 \end{cases} \rightarrow C(40,30) \rightarrow B(C) = B(40,30) = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 30 = 180€$$

$$D \begin{cases} 3x + y = 150 \\ y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 15 \end{cases} \rightarrow D(45,15) \rightarrow B(D) = B(45,15) = 3 \cdot 45 + 2 \cdot 15 = 165€$$

Para obtener los máximos Beneficios deben vender 40 lotes tipo A y 30 lotes, siendo los beneficios de 180 €.

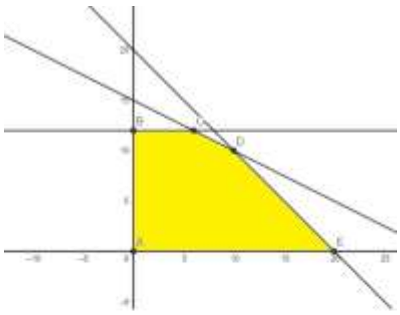
19) (EBAU Extremadura 2019 Junio) Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas: (a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x → número de vitrocerámicas

y → número de cocinas de inducción

El objetivo es maximizar los beneficios: B(x,y) = $30x + 50y$



Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ 100x + 200y \leq 3000 \\ y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y \leq 20 \\ x + 2y \leq 30 \\ y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (beneficios máximos), se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

$$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0,0) \rightarrow B(A) = B(0,0) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0€$$

$$B \begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases} \rightarrow B(0,12) \rightarrow B(B) = B(0,12) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 12 = 600€$$

$$C \begin{cases} x + 2y = 30 \\ y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases} \rightarrow C(6,12) \rightarrow B(C) = B(6,12) = 30 \cdot 6 + 50 \cdot 12 = 780€$$

$$D \begin{cases} x + y = 20 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow D(10,10) \rightarrow B(D) = B(10,10) = 30 \cdot 10 + 50 \cdot 10 = 800€$$

$$E \begin{cases} x + y = 20 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D(20,0) \rightarrow B(E) = B(20,0) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 0 = 600€$$

Para obtener el máximo beneficio se deben comprar 10 vitrocerámicas y 10 cocinas de inducción, siendo el beneficio de 800€.

20) (EBAU Galicia 2019 Julio) Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro. a) Plantea y representa gráficamente el problema. b) ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen?

Se trata de un problema de programación lineal.

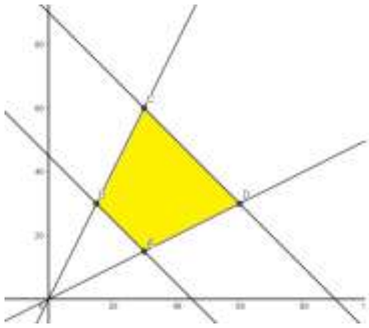
Las variables de decisión son: $x \rightarrow$ Millones de Litros de vino blanco

$y \rightarrow$ Millones de Litros de vino tinto

El objetivo es maximizar los Ingresos I(x,y) = 8x + 6y la función está expresada en millones de euros

<u>Restricciones:</u>

$$\begin{cases} x + y \leq 90 \\ x \leq 2y \\ x \geq y/2 \\ x + y \geq 45 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los Ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 45 \end{cases} \rightarrow$ A (30,15) $\rightarrow$ I(A) = I(30,15) = 8·30 + 6·15 = 330€

B $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 45 \end{cases} \rightarrow$ B(15, 30) $\rightarrow$ I(B) = I(15,30) = 8·15 + 6·30 = 300€

C $\begin{cases} x + y = 90 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 60 \end{cases} \rightarrow$ C(30,60) $\rightarrow$ I(C) = I(30,60) = 8·30 + 6·60 = 600€

D $\begin{cases} x + y = 90 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow$ D(60,30) $\rightarrow$ I(D) = I(60,30) = 8·60 + 6·30 = 660€

Para obtener los máximos Ingresos se deben producir 60 millones de litros de vino blanco y 30 millones de litros de vino tinto, siendo los ingresos máximos de 660 millones de euros.

21) (EBAU La Rioja 2017 Julio) Cierta empresa fabrica puertas y ventanas. Las instalaciones de la empresa imponen las siguientes restricciones sobre la producción diaria: 1. El número de puertas realizadas debe ser mayor o igual al número de ventanas, pero nunca puede superar su doble. 2. La empresa puede fabricar, entre puertas y ventanas, un máximo de 900 unidades diarias, y el número de puertas debe ser al menos de 400 unidades. Con estos datos, se pide: a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas. b) Si precio de venta de las puertas es de cien euros la unidad y el de las ventanas es de ciento veinte euros, ¿cómo debe ser la producción de la empresa para maximizar los ingresos diarios?

Se trata de un problema de programación lineal.

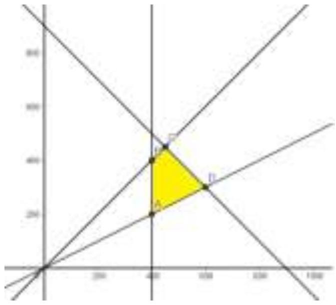
Las variables de decisión son: x → número de puertas fabricadas

y → número de ventanas fabricadas

El objetivo es maximizar los ingresos I(x,y) = 100x + 120y

Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 900 \\ x \geq 400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los Ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 2y \\ x = 400 \end{cases}$ → A (400,200) → I(A) = I(400,200) = 100·400 + 120·200 = 64000€

B $\begin{cases} x = y \\ x = 400 \end{cases}$ → B(400, 400) → I(B) = I(400,400) = 100·400 + 120·400 = 88000€

C $\begin{cases} x = y \\ x + y = 900 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 450 \\ y = 450 \end{cases}$ → C(450,450) → I(D) = I(450,450) = 100·450 + 120·450 = 99000€

D $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 900 \end{cases}$ → D(600,300) → I(D) = I(600,300) = 100·600 + 120·300 = 96000€

Para obtener los máximos Ingresos se deben fabricar 450 puertas y 450 ventanas, siendo los ingresos máximos de 99000 €.

22) (EBAU Madrid 2021 Junio) Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Se trata de un problema de programación lineal.

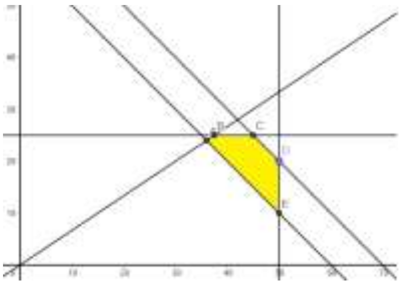
Las variables de decisión son: x → kg de almendras que debe contener la mezcla

y → kg de avellanas que debe contener la mezcla

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = x + 2y

Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 1{,}5y \\ x+y \geq 60 \\ x+y \leq 70 \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los Beneficios máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos beneficios en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 1{,}5y \\ x + y = 60 \end{cases} \rightarrow$ A (36,24) → B(A) = B(36,24) = 36 + 2·24 = 84€

B $\begin{cases} x = 1{,}5y \\ y = 25 \end{cases} \rightarrow$ B(37,5; 25) → B(B) = B(37,5; 25) = 37,5 + 2·25 = 87,5€

C $\begin{cases} x + y = 70 \\ y = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 25 \end{cases} \rightarrow$ C(45,25) → B(C) = B(45,25) = 45 + 2·25 = 95€

D $\begin{cases} x = 50 \\ x + y = 70 \end{cases}$ → D(50,20) → B(D) = B(50,20) = 50 + 2·20 = 90€

E $\begin{cases} x = 50 \\ x + y = 60 \end{cases}$ → D(50,10) → B(E) = B(50,10) = 50 + 2·10 = 70€

Para obtener los máximos Ingresos la mezcla debe contener 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas, siendo los beneficios máximos de 95 €.

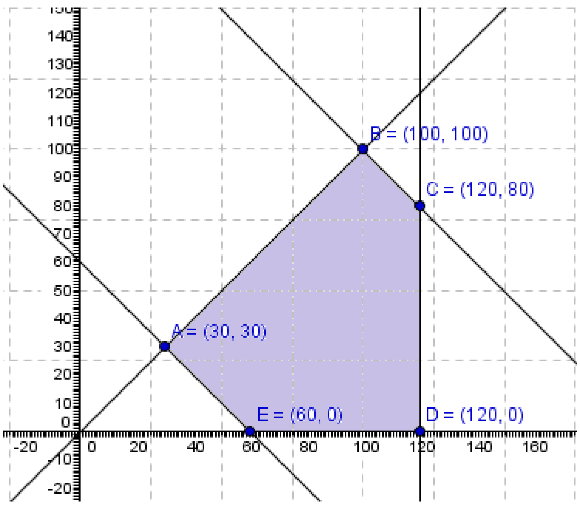
23) Una compañía aérea tiene dos aviones, A y B, para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos, pero menos de 200. En cada vuelo, A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo sea mínimo?

Llamamos x al número de vuelos del avión A e y al número de vuelos del avión B.

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 120 \\ x+y \geq 60 \\ x+y \leq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

La función objetivo es z= 900x+700y. Debemos minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Calculamos la región factible:



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el mínimo.

A(30,30) → Z(A) = Z(30,30) = 900·30+700·30=48.000 → El mínimo se alcanza en el vértice A
B(100,100) → Z(B) = Z(100,100) =900·100+700·100=160.000
C(120,80) → Z(C) = Z(120,80) =900·120+700·80=164.000
D(120,0) → Z(D) = Z(120,0) =900·120+700·0=108.000
E(60,0) → Z€ = Z(60,0) = 900·60+700·0= 54.000

El mínimo se alcanza en el punto A(30,30) y vale z = 48.000
Por tanto A debe hacer 30 vuelos y B otros 30 para minimizar el consumo de combustible. El consumo será de 48.000 litros

24) En una empresa se editan revistas de dos tipos: de información deportiva y de cultura. Cada revista de información deportiva precisa dos cartuchos de tinta negra y uno de color y se vende a 3 euros. Cada revista de cultura precisa dos cartuchos de tinta negra y dos de color y se vende a 5 euros. Se dispone de 500 cartuchos de cada clase. ¿Cuántas revistas de cada tipo se deben editar para ingresar el máximo posible?

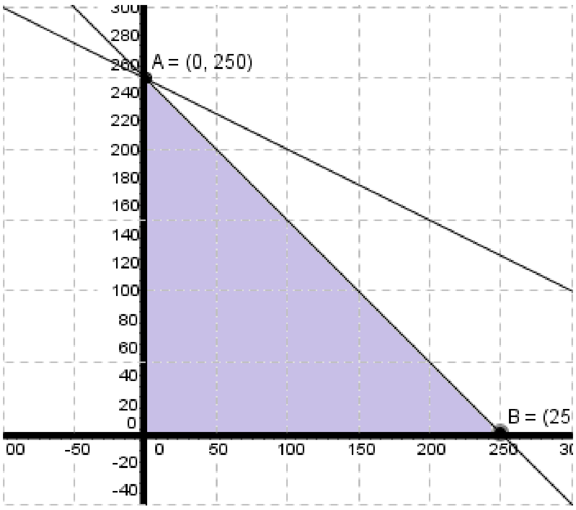
Llamamos x a la cantidad de revistas de información deportiva e y a la cantidad de revistas de cultura.

	Cantidad	T.Negra	T.Color	Ingresos
Revistas Depor	x	2x	X	3x
Revistas Cultur	y	2y	2y	5y
		2x+2y	X+2y	3x+5y

Las restricciones son: $\begin{cases} 2x+2y \le 500 \\ x+2y \le 500 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$ y la función objetivo será: I(x,y) = 3x+5y

Debemos maximizar esta función, con las restricciones que nos da el enunciado.

Calculamos la región factible:



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0,250)→ I(A) = I(0,250) = 3·0+5·250= 1250 €

B(250,0)→ I(B) = I(250,0) = 3·250+5·0= 750€

El máximo se alcanzará en el vértice A. El máximo se alcanzará en el punto A(0,250) y vale $I_A(0,250)$ = 1250 euros

El máximo de ingresos se obtiene al editar 250 revistas de cultura y ninguna de deportes, y ascienden a 1250 euros.

25) Con el comienzo del curso se van a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas: en el primer bloque pondrán 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán de 6,5 euros y 7 euros, respectivamente. ¿Cuántos paquetes les conviene hacer de cada tipo para obtener los máximos beneficios?

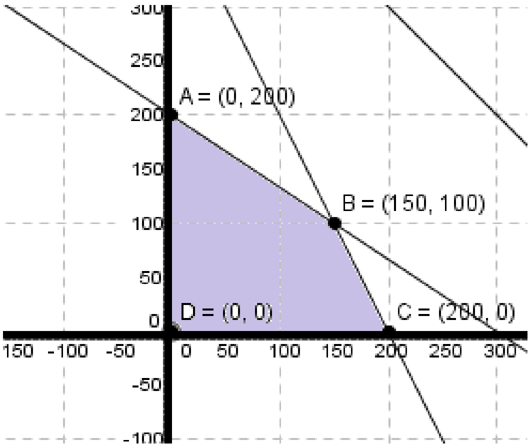
Llamamos x al número de paquetes del primer tipo e y al número de paquetes del segundo tipo.

	Cantidad	Cuadernos	Carpetas	Bolígrafos	Precio
1er Tipo	x	2x	x	2x	6,5x
2º Tipo	y	3y	y	y	7y
Total		2x+3y	x + y	2x+y	6,5x+7y

Las restricciones son: $\begin{cases} 2x+3y \le 600 \\ x+y \le 500 \\ 2x+y \le 400 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$ y la función objetivo: B(x,y) = 6,5x+7y

Debemos maximizar esta función, con las restricciones que nos da el enunciado.

Calculamos la región factible:



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0,200)→ B(A) = B(0,200)=6,5·0+7·200=1400€

B(150,100) → B(B) = B(150,100) = 6,5·150+7·100=1675€

C(200,0) → B(C) = B(200,0) = 6,5·200+7·0 =1300€

D(0,0) → B(D) = B(0,0)==6,5·0+7·0=0€

El máximo se alcanzará en el vértice B. El máximo se alcanzará en el punto B(150,100) y vale B(B)=(150,100) = 1675 euros

El máximo de ingresos se obtiene al hacer 150 paquetes del primer tipo y 100 paquetes del segundo, y ascienden a 1675 euros.

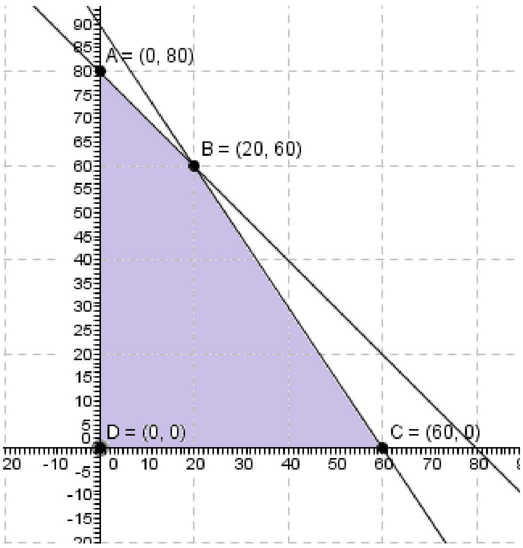
26) En una urbanización se van a construir casas de dos tipos; A y B. La empresa constructora dispone para ello de un máximo de 18 millones de euros, siendo el coste de cada tipo de casa de 300000 euros y 200000 euros, respectivamente. El ayuntamiento exige que el número total de casas no sea superior a 80. Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa de tipo A es de 40000 euros y de30000 euros por una del tipo B. ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Llamamos x al número de casas de tipo A e y al número de casas de tipo B.

	Cantidad	Coste	Beneficio
Tipo A	x	300000x	40000x
Tipo B	y	200000y	30000y
Total	X+y	300000x+200000y	40000x+30000y

Las restricciones son: $\begin{cases} 300000x + 200000 \leq 18000000 \\ x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ y la función objetivo B(x,y) = 40000x + 30000y

Debemos maximizar esta función, con las restricciones que nos da el enunciado.



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0,80)→ B(A) = B(0,80) = 40000·0+30000·80 = 2400000 €

B(20,60) → B(B) = B(20,60) = 40000·20+30000·60 = 2600000 €

C(60,0)→ B(C) = B(60,0) = 40000·60+30000·0 = 2400000 €

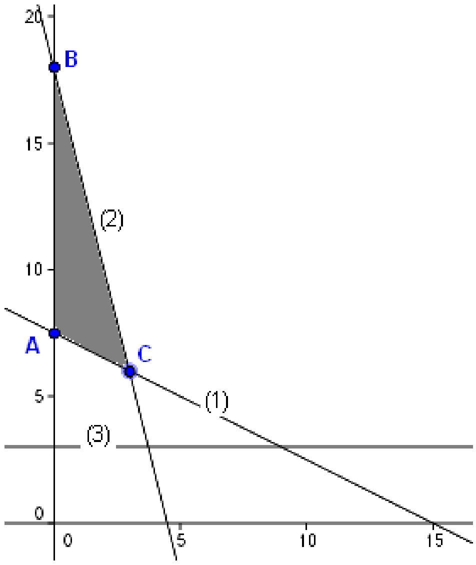
D(0,0)→ B(D) = B(0,0) = 40000·0+30000·0 = 0 €

El máximo se alcanza en el vértice B (20,60)

Por tanto se deben construir 20 casa de tipo A y 60 casas de tipo B. En este caso, el beneficio sería de 2.600.000 euros

27) (Junio 2012) Minimizar la función $4x - 7y$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 15 \\ 4x + y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 3 \end{cases}$$



Se trata de un problema de programación lineal.

Las restricciones dadas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 15 & (1) \\ 4x + y \leq 18 & (2) \\ x \geq 0 & (3) \\ y \geq 3 \end{cases}$$

generan la región factible sombreada en la figura adjunta.

Puede observarse que la restricción y≥ 3 no afecta al problema.

Los vértices son:

$A\left(0, \dfrac{15}{2}\right)$

B(0, 18)

C: $\begin{cases} x + 2y = 15 \\ 4x + y = 18 \end{cases} \rightarrow$ C(3, 6)

Para regiones cerradas, el mínimo (y el máximo) de la función objetivo, f(x,y) = 4x – 7y, se da en alguno de los vértices de la región factible. Se determina evaluando la función objetivo en cada uno de ellos.

Los valores de la función en esos vértices son:

- En A, $f\left(0, \dfrac{15}{2}\right) = -52{,}5$
- En B, f(0, 18) = –126
- En C, f(3, 6) = –30

Por tanto, el mínimo se da en el punto B(0, 18).

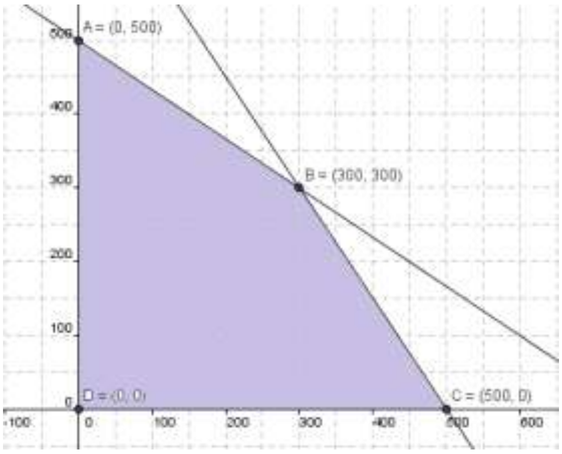
28) Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 gr de oro y 1,5 gr de plata, vendiéndolas a 40 euros cada una. Para la fabricación de las de tipo B emplea 1,5 gr de oro y 1 gr de plata, y las vende a 50 euros. El orfebre tiene solo en el taller 750 gr de cada uno de los metales. Calcula cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo.

Llamamos x al número de joyas del tipo A y al número de joyas del tipo B.

	Cantidad	Oro	Plata	Ingresos
Tipo A	x	x	1,5x	40x
Tipo B	y	1,5y	y	50y
Total		x+1,5y	1,5x+y	40x+50y

Las restricciones son: $\begin{cases} x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ y la función objetivo es B(x,y) = 40x+50y

Debemos maximizar esta función, con las restricciones que nos da el enunciado.



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0,500)→ B(A) = B(0,500) = 40·0+50·500=25000€

B(300,300) → B(B) = B(300,300) = 40·300+50·300=27000€

C(500,0)→ B(C) = B(500,0) = 40·500+50·0=20000€

D(0,0)→ B(D) = B(0,0) = 40·0+50·0 = 0€

El máximo se alcanza en el punto C(300,300). Por tanto, ha de fabricar 300 joyas del tipo A y 300 del tipo B para obtener el máximo beneficio. Los beneficios en este caso serían 27000 euros.

29) Se desea obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias A y B. Un kilo de A contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero; un kilo de B tiene 4 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Se desea obtener al menos 16 gramos del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gramos, respectivamente; y la cantidad de A es como mucho el doble que la de B.

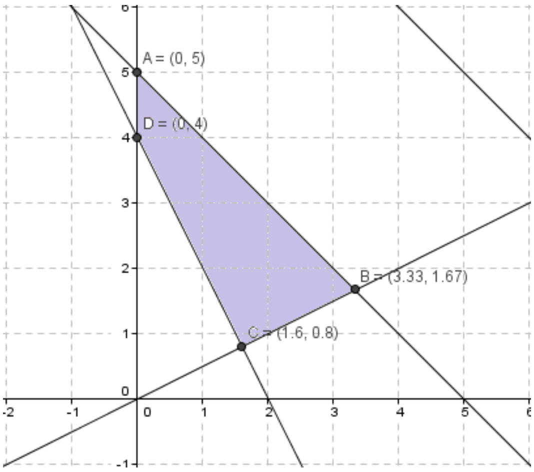
Calcula los kilos de A y los de B que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo de A vale 2 euros y uno de B 10 euros?

Llamamos x a los kilos de A e y a los de B.

	Kilos	1er Elemento	2º Elemento	3er Elemento	Coste
A	x	8x	x	2x	2x
B	y	4y	y	2y	10y
Total		8x+4y	x+y	2x+2y	2x+10y

Las restricciones son $\begin{cases} 8x+4y \geq 16 \\ x+y \leq 5 \\ 2x+2y \leq 20 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ y la función objetivo es C(x,y) = 2x+10y

Debemos minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el mínimo.

A(0,5) → C(A) = C(0,5) =2·0+10·5 = 50€

B(3,33;1,67) → C(B) = C(3,33;1,67) = 2·3,33+10·1,67 = 23,36€

C(1,6;0,8) → C(C) = C(1,6;0,8) = 2·1,6+10·0,8 = 11,2€

D(0,4) → C(D) = C(0,4) =2·0+10·4 = 40€

El mínimo se alcanza en el punto C(1,6,0,8). Por tanto, hay que tomar 1,6 kg del tipo A y 0,8 kg del tipo B para obtener el mínimo coste. El coste en este caso sería 11,2 euros.

30) Disponemos de 210000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las de tipo B que rinde el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130000 euros en las de tipo A y, como mínimo, 6000 euros en las de tipo B, además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B.

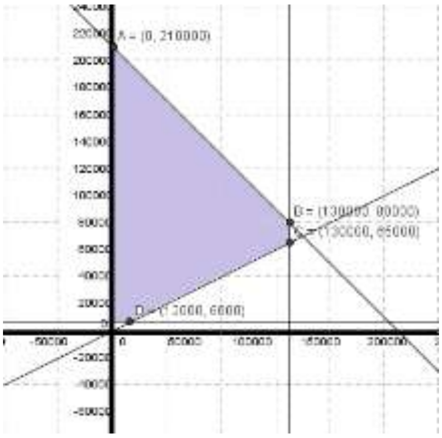
¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo interés anual?

Llamamos x al dinero que invertimos en acciones del tipo A e y al que invertimos en las de tipo B.

	Inversión	Rendimiento
A	x	0,1x
B	y	0,08y
Total	x+y	0,1x+0,08y

Las restricciones son $\begin{cases} x+y \leq 210000 \\ x \leq 130000 \\ y \geq 6000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ y la función objetivo será I(x,y) = 0,1x+0,08y

Debemos maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0,210000) → I(A) = I(0,210000) = 0,1·0+0,08·210000= 16800€

B(130000,80000) → I(130000,80000) = 0,1·0+0,08·210000= 19400€

C(130000,65000)→ I(130000,65000)=0,1·130000+0,08·65000= 18200€

D(12000,6000) → I(12000,6000) =0,1·12000+0,08·6000= 1680€

E(0,6000) → I(0,6000) =0,1·0+0,08·6000= 480€

El máximo se alcanza en el vértice B(130000,80000)

Por tanto, debemos invertir 130000 euros en acciones del tipo A y 80000 euros en las del tipo B. En este caso el beneficio anual será de 19400 euros.

31) Una fábrica produce neveras utilitarias y de lujo. La fábrica está dividida en dos secciones: montaje y acabado. Los requerimientos vienen dados por la siguiente tabla:

	Montaje	Acabado
Utilitaria	**3 horas**	**3 horas**
Lujo	**3 horas**	**6 Horas**

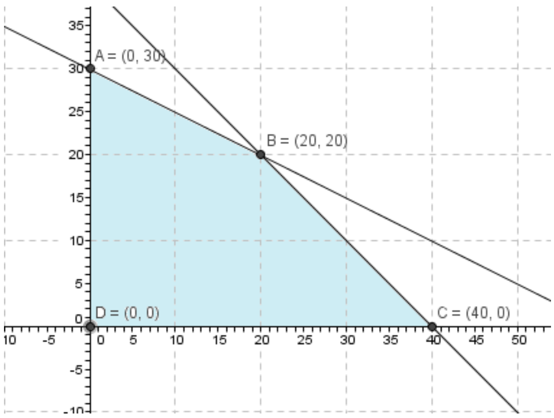
El máximo número de horas de trabajo disponibles diariamente es de 120 en montaje y 180 en acabado, debido a las limitaciones de operarios.
Si el beneficio es de 300 euros por cada nevera utilitaria y de 400 euros por cada nevera de lujo, ¿cuántas deben fabricarse diariamente de cada una para obtener el máximo beneficio?

Llamamos x al número de neveras utilitarias e y al número de neveras de lujo.

	Fabrican	Montaje	Acabado	Beneficio
Utilitaria	x	3x	3x	300x
Lujo	Y	3y	6y	400y
Total		3x+3y	3x+6y	300x+400y

Las restricciones son: $\begin{cases} 3x+3y \leq 120 \\ 3x+6y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ y la función objetivo será: B(x,y) = 300x+400y

Debemos maximizar esta función, con las restricciones que nos da el enunciado.



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0,30) → B(A) = B(0,30) = 300·0 + 400·30 = 12000€

B(20,20) → B(B) = B(20,20) = 300·20 + 400·20 =14000€

C(40,0) → B(C) = B(40,0) = 300·40 + 400·0 = 12000€

D(0,0) → B(D) = B(0,0)= = 300·0+400·0 = 0€

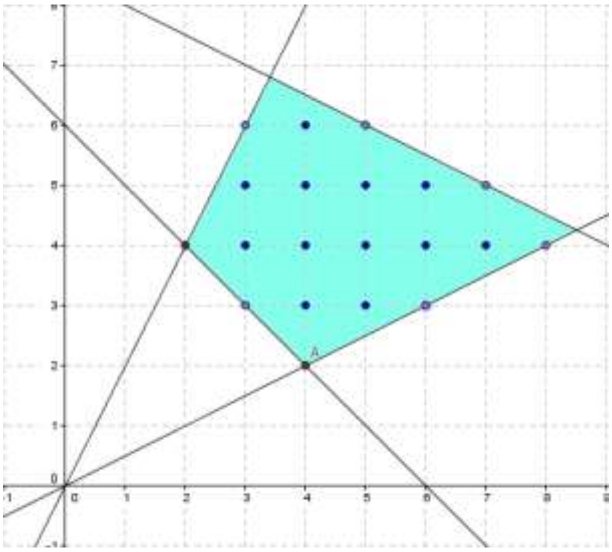
Por tanto, deben fabricarse 20 neveras de cada uno de los dos tipos. El beneficio será de 14000 euros

32) Se quiere promocionar una marca desconocida, D, de aceites, utilizando una marca conocida, C. Para ello, se hace la siguiente oferta:

Pague a solo 2,5 € el litro de aceite C y a 1,25€ el litro de aceite D siempre y cuando compre en total 6 litros o más y la cantidad de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D. Disponemos de un máximo de 21,25€. Acogiéndonos a la oferta . ¿cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar?¿Cuál es la máxima de C?

Llamamos x al número de litros de aceite D e y al número de litros de aceite C

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \geq 6 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \\ 2{,}5y + 1{,}25x \leq 21{,}25 \rightarrow 2y + x \leq 17 \\ x, y \text{ enteros} \end{cases}$



Hay 20 puntos en el recinto (20 modos de acogernos a la oferta)

(4,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5)

(4,6) (4,7) (4,8) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) (5,7) (6,3)

(6,4) (6,5)

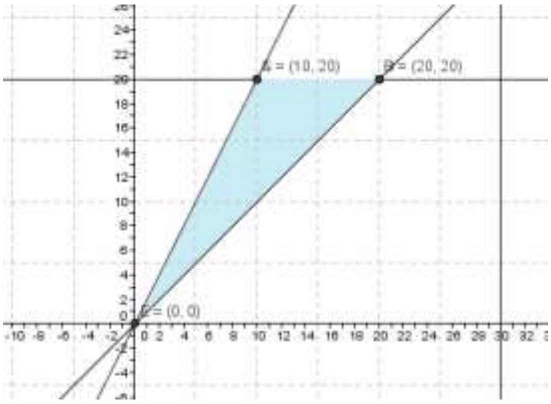
Como hemos llamado x al número de litros de aceite D e y al número de litros de aceite C. La mínima cantidad de D será de 2 litros y la máxima de C será de 6 litros.

33) Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y del número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 150€ por electricista y 120€ por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

Llamamos x al número de electricistas e y al número de mecánicos.

Las restricciones del problema son: $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x \leq 30; y \leq 20 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \\ x, y \text{ son enteros} \end{cases}$

La función objetivo es: B(x,y) = 150x +120y



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(10,20) → B(A) = B(10,20)= = 150·10+120·20 = 3900€

B(20,20) → B(B) = B(20,20)= = 150·20+120·20 = 5400€

C(0,0) → B(C) = B(0,0)= = 150·0+120·0 = 0€

Para que el beneficio sea máximo deben trabajar 20 electricistas y 20 mecánicos, el cual asciende a 5400€.

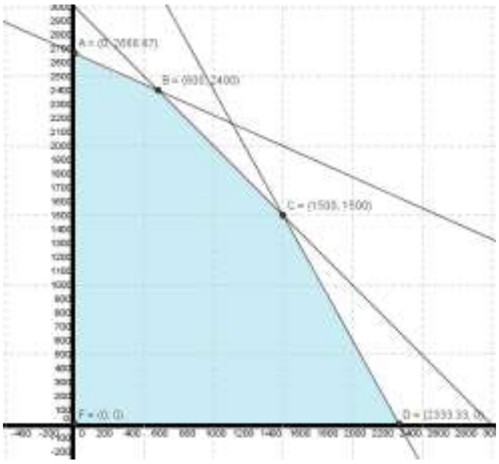
34) Don Antonio decide emplear hasta 30000€ de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA. El precio de cada acción es de 10 € cada una, y en ambos casos: BLL dedica el 35% de su actividad al sector seguros, el 45% al sector inmobiliario y 20% al industrial. ISSA dedica el 30% de sus recursos al sector seguros, el 25% al inmobiliario y el 45% al industrial. Don Antonio no quiere invertir más del 40% de su capital en el sector industrial ni más del 35% en el inmobiliario. ¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1,2€/acción e ISSA de 1€/acción?

Llamamos x al número de acciones que adquiere de BLL e y al número de acciones que adquiere de ISSA.

	Cantidad	Seguros	Inmobiliaria	Industrial	Precio
Acciones BBL	x	3,5x	4,5x	2x	10x
Acciones ISSA	y	3y	2,5y	4,5y	10y
Total		3,5x+3y	4,5x+2,5y	2x+4,5y	10x+10y

Las restricciones son: $\begin{cases} 10x + 10y \leq 30000 \\ 2x + 4{,}5y \leq 12000 \\ 4{,}5x + 2{,}5y \leq 10500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

La función objetivo será B(x,y) = 1,2x + y. Tenemos que maximizarla, sujeta a las restricciones anteriores.



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0;2666,67) → B(A) = B(0;2666,67) = 1,2·0+2666,67= 2666,67€

B(600,2400) → B(B) = B(600,2400) = 1,2·600+2400= 3120€

C(1500,1500) → B(C) = B(1500,1500) = 1,2·1500+1500 = 3300€

D(2333,33;0) → B(D) = B(2333,33;0) = 1,2·2333,33+0 = 2800€

E(0,0) → B(E) = B(0,0)= = 1,2·0+0 = 0€

Para que el beneficio sea máximo deben comprar 150 acciones BLL y 150 acciones ISSA, el cual asciende a 3300€.

35) Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima. La tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de venta de 8€. La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10€. En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

a) ¿Qué combinaciones de especialidades puede hacer?

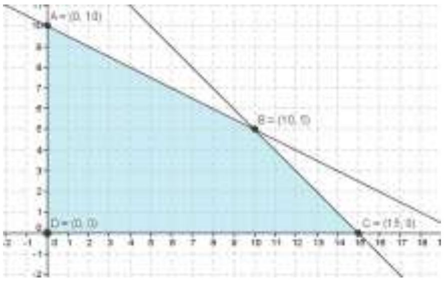
b) ¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas?

a) Llamamos x al número de tartas del tipo Imperial e y al número de tartas de Lima.

	Cantidad	Azúcar	Huevos	Ingreso
Tarta imperial	x	0,5x	8x	8x
Tarta Lima	y	y	8y	10y
Total		0,5x+y	8x+8y	8x+10y

Las restricciones son: $\begin{cases} 0{,}5x + y \leq 10 \\ 8x + 8y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

La función objetivo será: I(x,y) = 8x+10y. Tenemos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0,10) → I(A) = I(0,10) = 8·0+10·10 = 100€

B(10,5) → I(B) = I(10,5) = 8·10+10·5 = 130 €

C(15,0) → I(C) = I(15,0) = 8·15+10·0 = 120 €

D(0,0) → I(D) = I(0,0) = 8·0+10·0 = 0€

Todas las combinaciones posibles están representadas por cada uno de esos puntos:
(0,0)(0,1)(0,2)(0,3)(0,4)(0,5)(0,6)(0,7)(0,8)(0,9)(0,10)(1,0)(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)
(1,7)(1,8)(1,9)(2,0)(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)(2,7)(2,8)(2,9)(3,0)(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)
(3,5)(3,6)(3,7)(3,8)(4,0)(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6)(4,7)(4,8)(5,0)(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)
(5,5)(5,6)(5,7)(6,0)(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)(6,7)(7,0)(7,1)(7,2)(7,3)(7,4)(7,5)(7,6)
(8,0)(8,1)(8,2)(8,3)(8,4)(8,5)(8,6)(9,0)(9,1)(9,2)(9,3)(9,4)(9,5)(10,0)(10,1)(10,2)(10,3)
(10,4)(10,5)(11,0)(11,1)(11,2)(11,3)(11,4)(12,0)(12,1)(12,2)(12,3)(13,0)(13,1)(13,2)
(14,0)(14,1)(15,0)

a) Para que los ingresos sean máximos deben realizar 10 tartas Imperiales y 5 tartas Lima, los cuales ascienden a 130€.

36) Considera el triángulo de vértices (0,0), (2,8) y (10,3). Determina razonadamente:

a) El punto del triángulo donde la función f(x,y)= - 4x+y+9 alcanza el máximo.

b) El punto del triángulo donde la función f(x,y)= 4x+y+12 alcanza el máximo

Sabemos que el máximo se alcanza en algún vértice (o un lado). Calculamos el valor de la función dad en cada uno de los vértices.

a) f(x,y) = -4x+y+9

$$\left.\begin{array}{r} f(0,0) = 9 \\ f(2,8) = 9 \\ f(10,3) = -28 \end{array}\right\}$$

Hay infinitos puntos que hacen máxima la función: todos los puntos del lado que une los vértices (0,0) y (2,8)

b) f(x,y)=4x+y+12

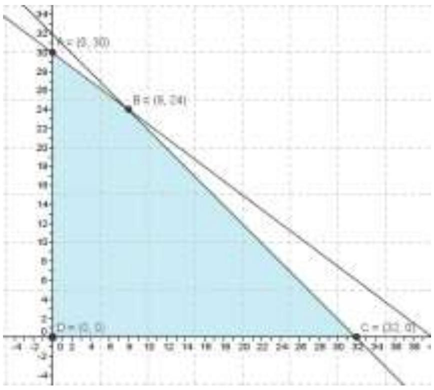
$$\left.\begin{array}{r} f(0,0) = 12 \\ f(2,8) = 28 \\ f(10,3) = 55 \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función alcanza el máximo en el punto (10,3)}$$

37) Una empresa cuenta con tres empleados que trabajan durante 40 horas semanales para elaborar dos tipos de guitarras eléctricas, G1 y G2. Cada unidad de G1 requiere tres horas de trabajo, y cada unidad de G2, cuatro. Independientemente del tipo que sea, cada guitarra proporciona un beneficio de 75 euros. Un estudio de mercado señala que no se deben producir en total más de 32 guitarras semanales. Determina la producción para que los beneficios sean máximos.

Llamamos x al número de unidades de G1 e y al número de unidades de G2

Las restricciones son: $\begin{cases} 3x + 4y \leq 120 \\ x + y \leq 32 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

La función objetivo es B(x,y) = 75x+75y .Tenemos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(0,30) → B(A) = B(0,30) = 75·0+75·30 = 2250€

B(8,24) → B(B) = B(8,24) = 75·8+75·24 = 2400€

C(32,0) → B(C) = B(32,0) = 75·32+75·0 = 2400€

D(0,0) → B(D) = (0,30) = 8·0+10·0 = 0€

El máximo se alcanza se obtiene en todos los puntos del segmento de extremos B y C.

El beneficio que se obtiene asciende a 2400 euros.

38) Una compañía que ofrece servicios de conexión rápida a Internet quiere iniciar una campaña de captación de clientes mediante una serie de llamadas telefónicas elegidas al azar.

Las llamadas se pueden realizar a propietarios de viviendas de dos localidades diferentes Ay B. Por anteriores estudios de mercado se sabe que la probabilidad de que un vecino de la localidad A acepte el servicio es de 0,06, y de que lo haga un vecino de la localidad B, de 0,05.

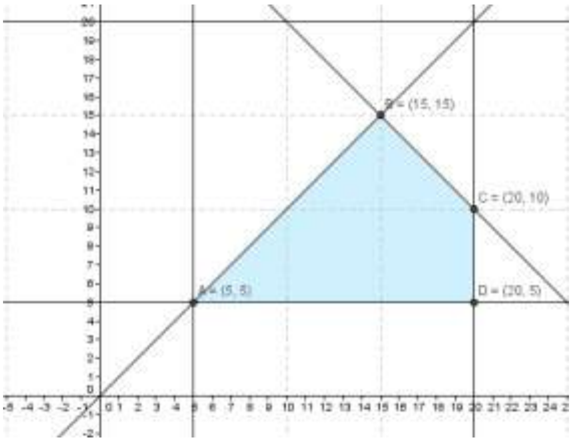
El mencionado estudio indica también que, como mucho, se deberán realizar 20 llamadas a vecinos de A y 20 a vecinos de B. El total de llamadas no puede superar la cantidad de 30 y, por lo menos, se deberá llamar a 5 vecinos de cada ciudad.

Además y dado el coste de las llamadas, el número de vecinos consultados de B no podrá ser superior al de consultados de A.

Calcula el número de llamadas que se deberán hacer a A y B para maximizar el número de futuros clientes.

Llamamos x al número de llamadas de A e y al número de llamadas de B.

Las restricciones son: $\begin{cases} x+y \leq 30 \\ x \geq y \\ 5 \leq x \leq 20 \\ 5 \leq y \leq 20 \end{cases}$ La función objetivo será: Z(x,y) = 0,06x+0,05y



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el máximo.

A(5,5) → Z(A) = Z(5,5) = 0,06·5+0,05·5=0,55

B(15,15) → Z(B) = Z(15,15) = 0,06·15+0,05·15=1,65

C(20,10) → Z(C) = Z(20,10)= 0,06·20+0,05·10=1,7

D(20,5) → Z(D) = Z(20,5) = 0,06·20+0,05·5=1,45

El máximo lo encontramos en el vértice C. Por tanto se deben realizar 20 llamadas a A y 10 llamadas a B para maximizar el número de futuros clientes.

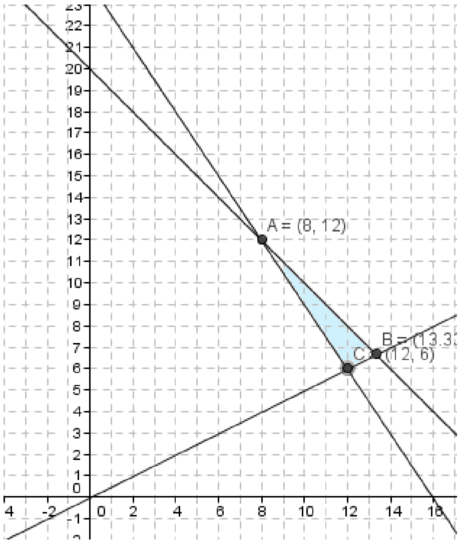
39) Para iluminar una sala de pintura es preciso colocar suficientes bombillas que sumen un total de 1440 vatios como mínimo. En el mercado se pueden adquirir bombillas incandescentes tradicionales de 90 vatios al precio de 1 euro la unidad y bombillas de bajo consumo de 9 vatios (equivalentes a 60 vatios) al precio de 5 euros la unidad.

Debido a la estructura del espacio, el número total de bombillas no puede ser mayor de 20. Por otra parte, las normas del Ayuntamiento imponen que, para este tipo de salas, el número de bombillas de bajo consumo no puede ser inferior a la mitad del de bombillas tradicionales.

Calcula el número de bombillas de cada clase que se debe colocar para que el coste sea mínimo.

Llamamos x al número de bombillas de 90w e y al número de bombillas de 9w (equivalentes a 60w)

Las restricciones son: $\begin{cases} 90x + 60y \geq 1440 \\ x + y \leq 20 \\ 2y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ y la función objetivo es C(x,y) = x+5y



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el mínimo.

A(8,12) → C(A) = C(8,12) = 8+5·12 = 68€

B(13,33;6,67) → C(B) = C(13,33;6,67) = 13,33+5·6,67 = 46,68€

C(12,6) → C(C) = C(12,6) = 12+5·6 = 42€

El gasto mínimo se encuentra en el vértice C.

El mínimo gasto se obtiene al iluminar la sala con 12 bombillas de 90w y 6 de bajo consumo de 9w.

El coste mínimo es de 42 euros.

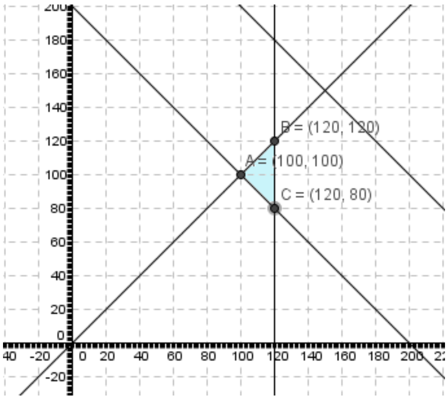
40) Para cubrir el trayecto Madrid-Barcelona, una compañía aérea tiene dos aviones: A y B. El nº total de vuelos de los aviones, no debe ser inferior a 200 ni superior a 300. Además, el avión A no puede sobrepasar los 120 vuelos, pero debe hacer, al menos, tantos como el B. Cada viaje de A supone un consumo de 900 litros de combustible y proporciona a la compañía un beneficio de 2.000 €. En el caso del avión B, el consumo es de 900 litros y el beneficio es de 1.600 € por viaje.

a) ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el beneficio sea máximo?

b) ¿Y si lo que desea es que el consumo de combustible sea mínimo?

Llamamos x al número de aviones A e y al número de aviones B.

Las restricciones son: $\begin{cases} x + y \geq 200 \\ x + y \leq 300 \\ x \leq 120 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ Las funciones objetivo son: $\begin{cases} Z_{beneficio} = 2000x + 1600y \\ Z_{consumo} = 900x + 900y \end{cases}$



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo.

a) En este apartado debemos maximizar la función.

$$Z_{beneficio} = 2000x + 1600y$$

A(100,100) → Z(100,100) = 2000·100+1600·100= 360.000 €

B(120,120) → Z(120,120) =2000·120+1600·120 = 432.000€

C(120,80)→ Z(120,80) = 2000·120+1600·80= 368.000€

El máximo lo encontramos en el vértice B. Por tanto se deben realizar 120 viajes con el avión A y 120 viajes con el avión B para maximizar el beneficio que ascenderá a 432.000€

b) En este apartado debemos minimizar la función.

$$Z_{consumo} = 900x + 900y$$

A(100,100) → Z(100,100) = 900·100+900·100 = 180.000 L

B(120,120) → Z(120,120) = 900·120+900·120 = 216.000 L

C(120,80) → Z(120,80) = 900·120+900·80 = 180.000 L

El mínimo se alcanza se obtiene en todos los puntos del segmento de extremos A y C.

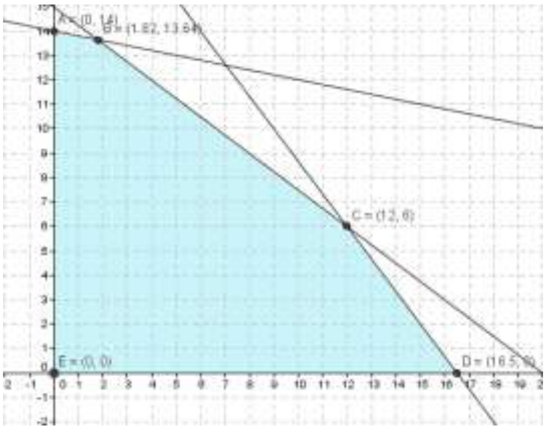
El consumo asciende a 180.000L

41) En un taller de artesanía se fabrican jarrones de adorno de dos tipos, A y B. Cada jarrón de tipo A precisa 30 minutos de modelado, 40 minutos de pintura y 1 kg de barro, y se vende a 40 euros. Cada jarrón de tipo B precisa 40 minutos de modelado, 30 minutos de pintura y 5 kg de barro, y se vende a 35 euros. Para fabricar estos jarrones se cuenta con dos empleados que hacen el modelado y que trabajan 5 horas por día, con dos empleados que hacen la pintura y que trabajan 5,5 horas por día y cuentan con 70kg de barro diarios. Halla el número óptimo de jarrones que se pueden fabricar al día para que los ingresos sean máximos.

Llamamos x a los jarrones del tipo A e y a los jarrones de tipo B.

	Cantidad	Modelado	Pintura	Barro	Beneficios
Jarrón A	x	30x	40x	x	40x
Jarrón B	y	40y	30y	5y	35y
Total		30x+40y	40x+30y	x+5y	40x+35y

Las restricciones son: $\begin{cases} 30x + 40y \leq 600 \\ 40x + 30y \leq 660 \\ x + 5y \leq 70 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ y la función objetivo I(x,y) = 40x+35y



La región factible está acotada, por tanto existirá máximo y mínimo, aunque el enunciado nos pide el maximizar la función.

A(0,14) → $I_{(A)}$ = I(0,14) = 40·0+35·14 = 490€

B$(\frac{20}{11},\frac{150}{11})$ → I$(\frac{20}{11},\frac{150}{11})$= 40·$\frac{20}{11}$+35·$\frac{150}{11}$=$\frac{6050}{11}$ = 550€

C(12,6) → I(C) = I(12,6) = 40·12+35·6 = 690€

D$(\frac{33}{2}, 0)$ → I(D) = I$(\frac{33}{2}, 0)$ =40·$\frac{33}{2}$+35·0=660€

E(0,0) →I€ = I(0,0) = 40·0+35·0 = 0€

El máximo lo encontramos en el vértice C. Por tanto se deben realizar 12 jarrones del tipo A y 6 jarrones del tipo B para maximizar el beneficio que ascenderá a 690€

PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON LA REGIÓN FACTIBLE NO ACOTADA

42) En un comedor escolar se desea diseñar un menú para los alumnos que debe cumplir las siguientes especificaciones.

- **El número de calorías no ha de ser inferior a 2000.**
- **Debe contener un total de, al menos, 60 gr de proteínas.**
- **Debe contener un total de, al menos, 80 gr de grasas.**

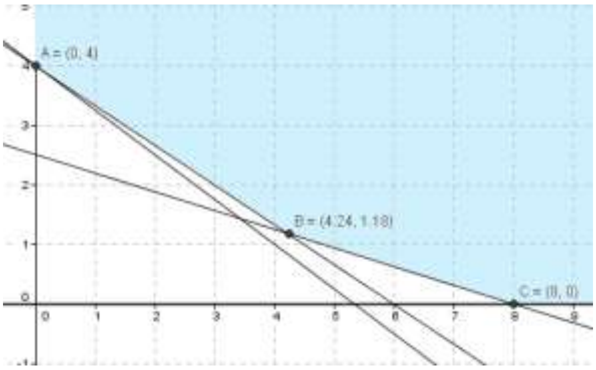
Para ello se dispone de dos platos con las siguientes características:

	Calorías	Proteínas	Grasas
1er Plato(100gr)	250	10	15
2º Plato(100gr)	800	15	20

El precio de 100 gr del segundo plato es doble del de 100 gr del primer plato.
Halla cuántos gramos se deben servir de cada plato para que el coste sea mínimo.

Llamamos x al número de platos de 100 gr e y al número de segundos platos de 100 gr.

Las restricciones son: $\begin{cases} 250x + 800y \geq 2000 \\ 10x + 15y \geq 60 \\ 15x + 20y \geq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ y la función objetivo será C(x,y) = x+2y



Como es una región factible no acotada, habrá o máximo o mínimo y se alcanzará en uno de los vértices.

A(0,4) → C(A) = C(0,4) = 0+2·4 = 8€
B(4,24;1,18) → C(B) = C(4,24;1,18) = 4,24+2·1,18 = 6,6€
C(8,0) → C(C) = C(8,0) = 8+2·0 = €8

El mínimo se encuentra en el vértice B.

Tomamos un punto de la región factible no acotada P(4,4) → C_P(4,4) = 4+2·4 = 12

Por tanto hay un mínimo y no un máximo y lo tendremos en el vértice B(4,24; 1,18)

Deben servir 424 gramos del primer plato y 118 gramos del segundo, siendo el coste de 6,6€ .

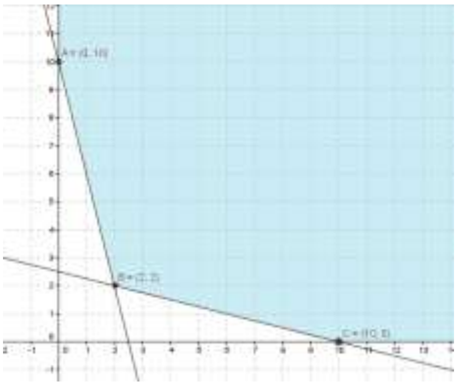
43) Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas. Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes. El lote del primer proveedor es tal que los contenidos de B y de A están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de A. El lote del segundo proveedor es tal que los contenidos de A y B están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de B. El primer proveedor vende cada lote a 10€ y el segundo al doble. Ambos proveedores nos venden lotes enteros o fracciones de ellos. ¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo?

Llamamos x a los lotes del primer proveedor e y a los lotes del segundo proveedor.

	Cantidad	A	B	Coste
Lote I	x	x	4x	10x
Lote II	y	4y	y	20y
Total		x+4y	4x+y	10x+20y

Las restricciones son: $\begin{cases} x + 4y \geq 10 \\ 4x + y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

La función objetivo será: C(x,y) = 10x+20y. Tenemos que minimizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.



Como es una región factible no acotada, habrá o máximo o mínimo y se alcanzará en uno de los vértices.

A(0,10) → C(A) = C(0,10) =10·0+20·10 = 200€

B(2,2) → C(B) = C(2,2) = 10·2+20·2 = 80€

C(10,0) → C(C) = C(10,0) = 10·10+20·0 = 100€

El mínimo se encuentra en el vértice B.

Tomamos un punto de la región factible no acotada P(10,10) → B_P(10,10) =10·10+20·10 = 300€

Por tanto hay un mínimo y no un máximo y lo tendremos en el vértice B(2,2)

Para que el coste sea mínimo debemos comprar 2 unidades del lote I y 2 lotes del lote II. El coste ascenderá a 80€.

44) (EBAU Asturias 2021 Julio) Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M1 y M2. Se sabe que cada lata de la marca M1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M2 es de 24 euros.

a) ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M1 y dos latas de la marca M2?

b) ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M1 que come ese día?

a) Se trata de un ejercicio de programación lineal. x → número de latas de la marca M1

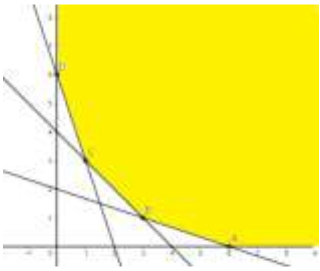
y → número de latas de la marca M2

	Cantidad	Hidratos de Carbono	Proteínas	Grasas	Precio
Latas M1	x	3x	3x	x	22x
Latas M2	y	y	9y	y	24y
Disponibilidad		Mínimo 6	Mínimo 18	Mínimo 4	

El objetivo es minimizar el coste: C(x)= 22x + 24y → Función Objetivo

Restricciones:

$$\begin{cases} 3x+y\geq 6 \\ 3x+9y\geq 18 \\ x+y\geq 4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+y\geq 6 \\ x+3y\geq 6 \\ x+y\geq 4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$



No se le podría dar 1 lata de M1 y 2 latas de M2 ya que la coordenada (1,2) queda fuera de la región factible y por lo tanto no cumpliría alguna de las restricciones planteadas por el problema.

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \geq 6 \rightarrow 5 \geq 6 \rightarrow \text{No lo cumple} \\ x + 3y \geq 6 \rightarrow 1 + 3 \cdot 2 \geq 6 \rightarrow 7 \geq 6 \rightarrow \text{ lo cumple} \\ x + y \geq 4 \rightarrow 1 + 2 \geq 4 \rightarrow 3 \geq 4 \rightarrow \text{No lo cumple} \\ x \geq 0 \rightarrow 1 \geq 0 \rightarrow \text{ lo cumple} \\ y \geq 0 \rightarrow 2 \geq 0 \rightarrow \text{ lo cumple} \end{cases}$$

b) Calculamos los vértices:

A $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ A(6,0) → C(A) = C(6,0)= 22·6+24·0 = 132€

B $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow$ B(3,1) → C(B) = C(3,1) = 22·3+24·1 = 90€

C $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow$ C(1,3) → C(C) = C(1,3) = 22·1+24·3 = 94€

D $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow$ D(0,6)→ C(D) = C(0,6) = 22·0+24·6 = 144€

Como se trata de una región factible no acotada,

Tomamos un punto de la región factible no acotada P(10,10) → B_P(10,10) =22·10+24·10 = 460€

Por tanto hay un mínimo y no un máximo y lo tendremos en el vértice B(3,1)

Para que el coste de la alimentación sea mínimo se debe alimentar a la mascota con 3 latas tipo M1 y con 1 lata tipo M2, siendo el coste de 90 €.

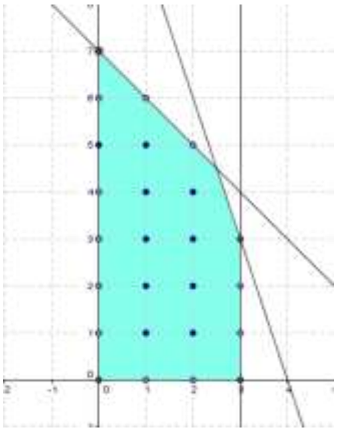
PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON RESOLUCIÓN GRÁFICA

45)Una fábrica produce chaquetas. Tres máquinas, de cortar, coser y teñir se emplean en la producción. Fabricar una chaqueta representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser tres horas y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser una hora y la de teñir ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser doce y la de cortar siete. Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y cinco por cada pantalón. ¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

Llamamos x al número de chaquetas e y al número de pantalones.

	Cantidad	Cortar	Coser	Teñir	beneficio
Chaquetas	x	x	3x	x	8x
Pantalones	y	y	y	0	5y
Total		x+y	3x+y	x	8x+5y

Las restricciones son: $\begin{cases} x+y \le 7 \\ 3x+y \le 12 \\ x \le 3 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{cases}$ siendo x,y enteros. La función objetivo será B(x,y) = 8x+5y



Calculamos los vértices:

A(0,7) → B(A) = B(0,7) = 8·0+5·7 = 35€

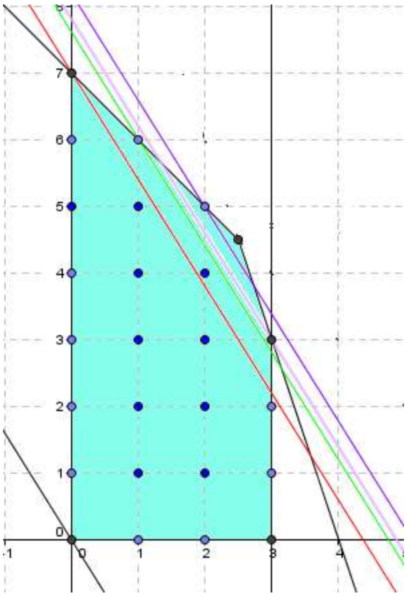
B(2,5;4,5) → B(B) = B(2,5;4,5) = 8·2,5+5·4,5 = 42,5€ → No valdría porque no sería una solución entera.

C(3,3) → B(C) = B(3,3) = 8·3+5·3=24+15 = 39€

D(3,0) → B(D) = B(3,0) = 8·3+5·0 = 24 €

E(0,0) → B(E) = B(0,0) = 8·0+5·0 = 0 €

Nos damos cuenta que el máximo se encuentra en el vértice B, pero esta solución no nos sirve porque x e y no son enteros.



Trazamos la recta 8x + 5y=0 y vamos dibujando rectas paralelas por las diferentes soluciones.

Aquel punto por el que pase la recta más alejada será el máximo buscado.

En este caso como solución entera será el punto (2,5)

Por lo tanto debemos fabricar 2 chaquetas y 5 pantalones para conseguir el máximo beneficio, el cual asciende a:

B(2,5) = 8x+5y=8·2+5·5=16 + 25=41 €