

ACTIVIDADES

1. Página 210

$$f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2 \rightarrow F(x) = x^5 - x^3 + 2x + 3$$

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2 \rightarrow F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - 2x + 1$$

$$f(x) = 12x^2 + 6x \rightarrow F(x) = 4x^3 + 3x^2$$

2. Página 210

a) $2x^4 - 2x^2 + 5x$

c) $3e^x + x$

b) $\frac{2}{5}x^4$

d) $3\sqrt{x}$

3. Página 211

a) $\int (3x^2 - 2x + 1)dx = x^3 - x^2 + x + k$

e) $\int (3 - e^{-x})dx = 3x + e^{-x} + k$

b) $\int (2\cos x)dx = 2\sin x + k$

f) $\int (5 - 4x - \cos x)dx = 5x - 2x^2 - \sin x + k$

c) $\int (4x^3 - \sin x)dx = x^4 + \cos x + k$

g) $\int (5e^x + 2\cos x)dx = 5e^x + 2\sin x + k$

d) $\int (2x - e^x)dx = x^2 - e^x + k$

h) $\int (7\sin x + 4\cos x)dx = -7\cos x + 4\sin x + k$

4. Página 211

a) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + k$

b) $\int [2f(x) - g(x)]dx = 2\int f(x)dx - \int g(x)dx = 2F(x) - G(x) + k$

c) $\int \left[\frac{1}{2}f(x) - 2g(x) \right]dx = \frac{1}{2}\int f(x)dx - 2\int g(x)dx = \frac{1}{2}F(x) - 2G(x) + k$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]dx = -\int f(x)dx + b \cdot \int g(x)dx = -F(x) + b \cdot G(x) + k$

5. Página 212

a) $\int (x^2 + 3x - 2)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + k$

b) $\int \frac{3}{x^3}dx = \int 3x^{-3}dx = -\frac{3}{2x^2} + k$

c) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx = \int 3x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7} + k = \frac{12}{7}x\sqrt[4]{x^3} + k$

6. Página 212

$$a) \int (1-x)^2 dx = -\int (-1)(1-x)^2 dx = -\frac{(1-x)^3}{3} + k$$

$$b) \int (1-x^2)^2 dx = \int (1-2x^2+x^4) dx = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} + k$$

$$c) \int 2x\sqrt{x^2+3} dx \rightarrow \text{Tomamos } f(x) = x^2+3 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow \int 2x\sqrt{x^2+3} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+3)^3} + k.$$

7. Página 213

$$a) \int x(x^2+3) dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2+3) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+3)^2}{2} + k = \frac{(x^2+3)^2}{4} + k$$

$$b) \int (x-2)(x^2-4x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int (2x-4)(x^2-4x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-4x+1)^4}{4} + k = \frac{(x^2-4x+1)^4}{8} + k$$

8. Página 213

$$a) \int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int 2\sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(2x-1)^3} + k = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3} + k$$

$$b) \int x\sqrt{x^2-2} dx = \frac{1}{2} \int 2x\sqrt{x^2-2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(x^2-2)^3} + k = \frac{\sqrt{(x^2-2)^3}}{3} + k$$

$$c) \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + k$$

$$d) \int (x+1)e^{x^2+2x-1} dx = \frac{1}{2} \int (2x+2)e^{x^2+2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{x^2+2x-1} + k$$

9. Página 214

$$a) \int \frac{4x}{2x^2+1} dx = \ln|2x^2+1| + k$$

$$b) \int \frac{x^2}{x^3+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+3} dx = \frac{1}{3} \ln|x^3+3| + k$$

$$c) \int \frac{x+1}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x| + k$$

$$d) \int \frac{5x}{1-x^2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\frac{5}{2} \ln|1-x^2| + k$$

10. Página 214

$$a) \int \frac{4x^3}{x^4+2} dx = \ln|x^4+2| + k$$

$$b) \int \frac{4x^3}{(x^4+2)^2} dx = \int 4x^3(x^4+2)^{-2} dx = \frac{-1}{x^4+2} + k$$

$$c) \int \frac{4x^3}{\sqrt[3]{x^4+2}} dx = \int 4x^3(x^4+2)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^4+2)^2} + k$$

$$d) \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} dx = \frac{1}{2} \int (2x-2) \cdot (x^2-2x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2-2x)^{\frac{1}{2}} + k = \sqrt{x^2-2x} + k$$

11. Página 215

$$a) \int 3^{\frac{x}{2}} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{x}{2}} dx = 2 \cdot \frac{3^{\frac{x}{2}}}{\ln 3} + k$$

$$b) \int e^{x+1} dx = e^{x+1} + k$$

$$c) \int \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} dx = \frac{1}{4} \int 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + k$$

$$d) \int (e^{-3x} + e^{x-2}) dx = \int e^{-3x} dx + \int e^{x-2} dx = -\frac{1}{3} \int -3e^{-3x} dx + \int e^{x-2} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + e^{x-2} + k$$

12. Página 215

$$a) \int 7^{x^2+1} \cdot 2x dx = \frac{7^{x^2+1}}{\ln(7)} + k$$

$$c) \int \frac{3^{5x-1}}{7} dx = \frac{1}{35} \int 5 \cdot 3^{5x-1} dx = \frac{1}{35} \cdot \frac{3^{5x-1}}{\ln(3)} + k$$

$$b) \int 5e^{\frac{x}{2}+2} dx = 10 \int \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}+2} dx = 10e^{\frac{x}{2}+2} + k$$

$$d) \int \frac{x}{e^{x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int -2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + k$$

13. Página 216

$$a) \int \operatorname{sen}(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + k$$

$$c) \int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2} dx = -\cos \frac{x}{2} + k$$

$$b) \int \cos(x+1) dx = \operatorname{sen}(x+1) + k$$

$$d) \int \operatorname{sen}(-x) dx = \cos(-x) + k$$

14. Página 216

$$a) \int \frac{1}{\cos^2(x+1)} dx = \operatorname{tg}(x+1) + k$$

$$b) \int -3 \operatorname{sen}(2x+1) dx = -\frac{3}{2} \int 2 \operatorname{sen}(2x+1) dx = \frac{3}{2} \cos(2x+1) + k$$

$$c) \int (x+1) \cdot \cos(x^2+2x) dx = \frac{1}{2} \int (2x+2) \cdot \cos(x^2+2x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2+2x) + k$$

$$d) \int \frac{x}{\cos^2(x^2-3)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\cos^2(x^2-3)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x^2-3) + k$$

15. Página 217

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} dx = \frac{1}{5} \operatorname{arc} \operatorname{sen}(5x) + k$$

$$b) \int \frac{1}{1+(x-3)^2} dx = \operatorname{arctg}(x-3) + k$$

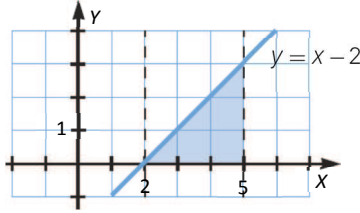
16. Página 217

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen}(2x-3) + k$$

$$b) \int \frac{x}{1+9x^4} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{1+(3x^2)^2} dx = \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(3x^2) + k$$

17. Página 218

a) Representamos el área que tenemos que calcular.



$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

b) Tomamos una sucesión de particiones: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = \left\{2, \frac{3}{n} + 2, \frac{2 \cdot 3}{n} + 2, \dots, \frac{(n-1) \cdot 3}{n} + 2, \frac{3n}{n} + 2 = 5\right\}$

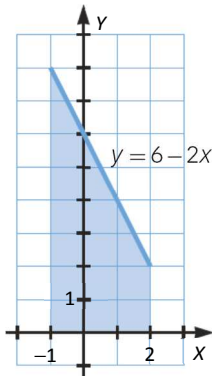
La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{3i-3}{n} \left(\frac{3i}{n} + 2 - \frac{3(i-1)}{n} - 2 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{3i-3}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (9i-9) = \frac{9(n-1)}{2n}$$

$$m_i = f(x_{i-1}) = x_{i-1} - 2 = \frac{3(i-1)}{n} + 2 - 2 = \frac{3i-3}{n} \quad \int_2^5 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n+9}{2n} \right) = \frac{9}{2} = 4,5$$

18. Página 218

a) Representamos el área que tenemos que calcular.



$$\text{Área} = \frac{3 \cdot 6}{2} + 3 \cdot 2 = 9 + 6 = 15$$

b) Tomamos una sucesión de particiones: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = \left\{-1, \frac{3}{n} - 1, \frac{2 \cdot 3}{n} - 1, \dots, \frac{3n}{n} - 1 = 2\right\}$

La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

$$m_i = f(x_i) = 6 - 2x_i = 6 - 2 \left(\frac{3i}{n} - 1 \right) = 6 + 2 - 2 \cdot \frac{3i}{n} = 8 - \frac{6i}{n} = \frac{8n-6i}{n}$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{8n-6i}{n} \left(\frac{3i}{n} - 1 - \frac{3(i-1)}{n} + 1 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{8n-6i}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (24n-18i) = \frac{3(5n-3)}{n}$$

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{15n-9}{n} \right) = 15$$

19. Página 219

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (-x^2 - 2) dx = \frac{-x^3}{3} - 2x + k$$

$$[F(x)]_4^7 = F(7) - F(4) = \frac{-7^3}{3} - 2 \cdot 7 + k - \left(\frac{-4^3}{3} - 2 \cdot 4 + k \right) = -99$$

20. Página 219

a) $\int_{-2}^2 (2x^3 - 4x + 3) dx = \left[\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 3x \right]_{-2}^2 = 6 + 6 = 12$

b) $\int_0^e \frac{-3x}{x^2 + 1} dx = \left[\frac{-3}{2} \ln|x^2 + 1| \right]_0^e = \frac{-3}{2} \ln|e^2 + 1| - 0 = \frac{-3}{2} \ln|e^2 + 1|$

21. Página 220

a) Área = $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$

b) Tomamos la sucesión de particiones: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = \left\{ 0, \frac{2 \cdot 1}{n}, \frac{2 \cdot 2}{n}, \dots, \frac{2n}{n} = 2 \right\}$

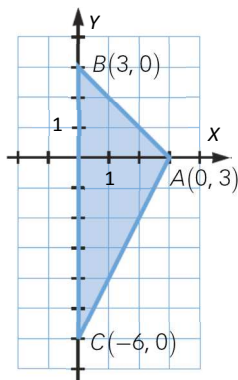
La altura de los rectángulos en cada intervalo es: $m_i = f(x_i) = -2x_i + 4 = -2 \cdot \frac{2i}{n} + 4 = \frac{-4i + 4n}{n}$

$$S_n = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{-4i + 4n}{n} \left(\frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{-4i + 4n}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (-8i + 8n) = \frac{4(n-1)}{n}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4(n-1)}{n} \right) = 4$$

c) $\int_0^2 (-2x + 4) dx = \left[-x^2 + 4x \right]_0^2 = (-2^2 + 4 \cdot 2) - 0 = 4$

22. Página 220



a) Área = $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 9}{2} = 13,5$

b) Área = $\int_0^3 (3-x) dx - \int_0^3 (2x-6) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 - \left[x^2 - 6x \right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} - 9 + 18 = \frac{27}{2} = 13,5$

23. Página 221

$$a) \text{ Área} = \int_{-1}^2 (4-x^2) dx - \int_2^3 (4-x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 - \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = 9 - \left(-\frac{7}{3} \right) = \frac{27}{3} + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$$

$$b) \text{ Área} = -\int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 8) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x \right]_{-1}^3 = -\left(9 - 9 - 24 + \frac{1}{3} + 1 - 8 \right) = \frac{92}{3} = 30, \bar{6}$$

24. Página 221

$$a) \text{ Área} = \int_{-2}^0 (3x^2 - 5x) dx - \int_0^1 (3x^2 - 5x) dx = \left[x^3 - \frac{5}{2}x^2 \right]_{-2}^0 - \left[x^3 - \frac{5}{2}x^2 \right]_0^1 = 8 + 10 - 1 + \frac{5}{2} = \frac{39}{2}$$

$$b) \text{ Área} = -\int_{-2}^{-1} (2x^3 + x^2 - x) dx + \int_{-1}^0 (2x^3 + x^2 - x) dx - \int_0^{\frac{1}{2}} (2x^3 + x^2 - x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^3 + x^2 - x) dx$$

$$\int_{-2}^{-1} (2x^3 + x^2 - x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(8 - \frac{8}{3} - 2 \right) = -\frac{1}{3} - 8 + \frac{8}{3} + 2 = -\frac{11}{3}$$

$$\int_{-1}^0 (2x^3 + x^2 - x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x^3 + x^2 - x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{32} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{96}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^3 + x^2 - x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{37}{96}$$

$$\text{Área} = \frac{11}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{96} + \frac{37}{96} = \frac{71}{16}$$

25. Página 222

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow 5x + 3x^2 - x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-3}^1 (2x^2 + 4x - 6) dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x \right]_{-3}^1 \right| = \left| \frac{2}{3} + 2 - 6 + 18 - 18 - 18 \right| = \frac{64}{3}$$

26. Página 222

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow (6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^4 (8x - 2x^2) dx \right| = \left| \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^4 \right| = \frac{64}{3}$$

27. Página 223

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow (x^3 - x) - 3x = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \right| = |-4 + 8| + |4 - 8| = 4 + 4 = 8$$

28. Página 223

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow (x^3 - 2x) - (-x^2) = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^1 \right| = \frac{8}{3} + \left| \frac{-5}{12} \right| = \frac{37}{12}$$

SABER HACER

29. Página 224

$$f(x) = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln|x^2 + 1| + k$$

$$f(0) = 1 \rightarrow \ln|1| + k = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow f(x) = \ln|x^2 + 1| + 1$$

30. Página 224

$$f(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + k$$

$$f(0) = 0 \rightarrow -\frac{2}{3} + k = 0 \rightarrow k = \frac{2}{3} \rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + \frac{2}{3}$$

31. Página 224

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - (2x + 1)^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - (2x + 1)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x + 1}{2}\right)^2}} dx = \frac{1}{2} \text{arc sen} \left(\frac{2x + 1}{2} \right) + k$$

32. Página 224

$$\int \frac{-x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx = \int \frac{-x^3}{x} dx - \int \frac{2x^2}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx = -\int x^2 dx - \int 2x dx + \int \frac{1}{x} dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + \ln|x| + k$$

33. Página 225

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

$$\int_{-2}^1 |x| dx = \int_{-2}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

34. Página 225

$$\int_0^2 (3kx^2 - 1) dx = [kx^3 - x]_0^2 = 8k - 2 = 2 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

35. Página 225

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$-x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow A \text{ debe estar en el intervalo } [-2, 2].$$

$$\text{Área} = \left| \int_a^2 (-x^2 + 4) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_a^2 \right| = \left| -\frac{8}{3} + 8 + \frac{a^3}{3} - 4a \right| = \left| \frac{a^3}{3} - 4a + \frac{16}{3} \right|$$

$$\text{Área} = 9 \rightarrow \left| \frac{a^3}{3} - 4a + \frac{16}{3} \right| = 9 \rightarrow \begin{cases} \frac{a^3}{3} + 4a - \frac{16}{3} = 9 \rightarrow -a^3 + 12a - 43 = 0 \\ \frac{a^3}{3} - 4a + \frac{16}{3} = 9 \rightarrow a^3 - 12a - 11 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación es en el caso de que $f(x)$ sea menor que 0, algo que, de momento, no nos interesa ya que es positiva en el intervalo $[-2, 2]$.

Resolvemos la segunda ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -12 & -11 \\ -1 & & -1 & 1 & 11 \\ \hline & 1 & -1 & -11 & 0 \end{array} \rightarrow a^3 - 12a - 11 = (a+1)(a^2 - a - 11) = 0 \rightarrow a = -1$$

$$a^2 - a - 11 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 11}}{2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2} \rightarrow \begin{cases} a \approx 3,85 > 2 \\ a \approx -2,85 < -2 \end{cases}$$

El valor de a buscado es -1 .

36. Página 226

Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas: $4x + 12 = 0 \rightarrow x = -3$

Calculamos los puntos de corte en el intervalo de integración:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-2}^{-1} (4x + 12) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 (x^2 - 4x + 3) dx \right| + \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| + \left| \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \\ &= \left| [2x^2 + 12x]_{-2}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_{-1}^1 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_3^4 \right| = 6 + \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{46}{3} \end{aligned}$$

37. Página 226

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$x^3 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad \int (x^3 - 9x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx \right| + \left| \int_0^3 (x^3 - 9x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-3}^0 \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 \right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2} = 40,5$$

38. Página 226

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^3 (x - 3)^2 dx \right| = \left| \int_0^3 x^2 - 6x + 9 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_0^3 \right| = |9 - 27 + 27| = 9 \text{ m}^2$$

Si para cada metro cuadrado se necesitan 12 litros de agua, en total se necesitarán $12 \cdot 9 = 108$ litros.

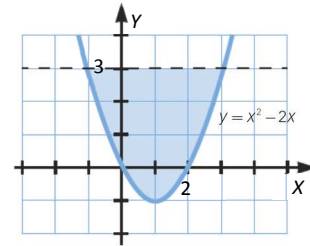
39. Página 227

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$x^2 - 2x = 3 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$



$$\text{Área}_1 = \left| \int_{-1}^3 (3 - x^2 + 2x) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \right| = \frac{32}{3}$$

$$\text{Área}_2 = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 \right| = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} = \text{Área}_1 - \text{Área}_2 = \frac{32}{3} - \frac{4}{3} = 12$$

40. Página 227

$$f(x) = \frac{|x|}{2} = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

Si $x < 0$, $-\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow x = -1$

Si $x \geq 0$, $\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow x = 1$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{2} \right) dx \right| + \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2} \right) dx \right| = \left| \left[\text{arc tg } x + \frac{1}{4}x^2 \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\text{arc tg } x - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 \right| =$$

$$= \left| \text{arc tg } 0 - \text{arc tg } (-1) - \frac{1}{4} \right| + \left| \text{arc tg } 1 - \frac{1}{4} - \text{arc tg } 0 \right| = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

ACTIVIDADES FINALES

41. Página 228

- a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1 \rightarrow F'(x) = 15x^4 - 2 \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.
- b) $F(x) = (x^5 - 2)^3 \rightarrow F'(x) = 15x^4(x^5 - 2)^2 \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.
- c) $F(x) = \frac{2-x}{x^3} + 7 \rightarrow F'(x) = \frac{2x-6}{x^4} \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.
- d) $F(x) = \frac{x-1}{x^2} - 3 \rightarrow F'(x) = \frac{-x+2}{x^3} \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.
- e) $F(x) = \ln\sqrt{x^2+2x} \rightarrow F'(x) = \frac{x+1}{x^2+2x} \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.
- f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11 \rightarrow F'(x) = -10xe^{-x^2} \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.
- g) $F(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x} \rightarrow F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.
- h) $F(x) = \cos^2 x - 1492 \rightarrow F'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x = -\operatorname{sen} 2x \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

42. Página 228

- a) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + k$ $F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = x^3 + 1$
- b) $f(x) = \frac{4}{5x} \rightarrow F(x) = \frac{4}{5} \ln|x| + k$ $F(1) = 4 \rightarrow k = 4 \rightarrow F(x) = \frac{4}{5} \ln|x| + 4$
- c) $f(x) = \operatorname{sen} 3x \rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + k$ $F(\pi) = -\frac{1}{3} \rightarrow k = -\frac{2}{3} \rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{2}{3}$
- d) $f(x) = e^{2x} \rightarrow F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + k$ $F(0) = \frac{2}{3} \rightarrow k = \frac{1}{6} \rightarrow F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{6}$
- e) $f(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 1) \rightarrow F(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3x}{4} + k$ $F(1) = \frac{1}{4} \rightarrow k = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

43. Página 228

- a) $F(x) = 1001x + k \rightarrow F'(x) = 1001$
- b) $F(x) = x^2 + k \rightarrow F'(x) = 2x$
- c) $F(x) = \frac{x^2}{2} + k \rightarrow F'(x) = x$
- d) $F(x) = x^3 + k \rightarrow F'(x) = 3x^2$
- e) $F(x) = \frac{x^3}{3} + k \rightarrow F'(x) = x^2$
- f) $F(x) = x^4 + k \rightarrow F'(x) = 4x^3$
- g) $F(x) = x^{n+1} + k \rightarrow F'(x) = (n+1)x^n$
- h) $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \rightarrow F'(x) = x^n$

44. Página 228

- a) $F(x) = \sqrt{x} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- b) $F(x) = 2\sqrt{x} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- c) $F(x) = 2\sqrt{x+1} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
- d) $F(x) = 2\sqrt{x-4} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$
- e) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+10} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+10}}$
- f) $F(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

45. Página 228

a) $F(x) = 19\ln|x| + k \rightarrow F'(x) = \frac{19}{x}$

b) $F(x) = \frac{\ln|x|}{19} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{19x}$

c) $F(x) = \ln|19 + x| + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{19 + x}$

d) $F(x) = 2\ln|2x + 3| + k \rightarrow F'(x) = \frac{4}{2x + 3}$

e) $F(x) = \frac{1}{x} + k \rightarrow F'(x) = -\frac{1}{x^2}$

f) $F(x) = -\operatorname{arctg} x + k \rightarrow F'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

46. Página 228

a) $F(x) = e^x + k \rightarrow F'(x) = e^x$

b) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + k \rightarrow F'(x) = e^{2x}$

c) $F(x) = \frac{e^{5x+55}}{5} + k \rightarrow F'(x) = e^{5x+55}$

d) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^x$

e) $F(x) = \frac{2^{x-7}}{\ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^{x-7}$

f) $F(x) = \frac{2^{9x+5}}{9\ln 2} + k \rightarrow F'(x) = 2^{9x+5}$

47. Página 228

a) $F(x) = \operatorname{sen} x + k \rightarrow F'(x) = \cos x$

b) $F(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + k \rightarrow F'(x) = \cos 3x$

c) $F(x) = \operatorname{sen}(x + 3) + k \rightarrow F'(x) = \cos(x + 3)$

d) $F(x) = -3\cos x + k \rightarrow F'(x) = 3\operatorname{sen} x$

e) $F(x) = -\cos(x - \pi) + k \rightarrow F'(x) = \operatorname{sen}(x - \pi)$

f) $F(x) = -3\cos(x - \pi) + k \rightarrow F'(x) = 3\operatorname{sen}(x - \pi)$

48. Página 228

a) Porque la derivada de una función polinómica siempre es otra función polinómica.

b) El grado de $F(x)$ es $n + 1$, considerando que $f(x)$ es un polinomio o que n sea distinto de -1 .

49. Página 228

a) $\int (2x - 3)dx = x^2 - 3x + k$

b) $\int (3x^2 + 4x - 2)dx = x^3 + 2x^2 - 2x + k$

c) $\int \left(\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 6x - 1 \right) dx = \frac{3}{16}x^4 - x^3 + 3x^2 - x + k$

d) $\int (x - 1)^3 dx = \frac{(x - 1)^3}{4} + k$

e) $\int (x + 3)^2 dx = \frac{(x + 3)^3}{3} + k$

f) $\int (1 - 2x)^2 dx = \frac{-1}{2} \int (-2) \cdot (1 - 2x)^2 dx = \frac{-1(1 - 2x)^3}{2 \cdot \frac{3}{3}} + k = \frac{-1}{6}(1 - 2x)^3 + k$

g) $\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5 \right) dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - 5x + k$

h) $\int (x - 3x + 2) dx = \int (-2x + 2) dx = -x^2 + 2x + k$

50. Página 228

a) $\int 2\sqrt{x} dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + k$

b) $\int 2\sqrt{3x} dx = 2\sqrt{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4\sqrt{3}}{3} x^{\frac{3}{2}} + k = \frac{4}{3}\sqrt{3x^3} + k$

c) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right) dx = 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + k$

d) $\int (\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

e) $\int (2 + \sqrt{x}) dx = 2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$

f) $\int (2 + \sqrt{3x}) dx = 2x + \frac{2}{3}\sqrt{3x^3} + k$

g) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x \right) dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{2} + k$

h) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{2x}} + \frac{4}{\sqrt[4]{4x}} \right) dx = \sqrt{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 2\sqrt{2} \int x^{-\frac{1}{4}} dx = 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{8\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{4}} + k = 2\sqrt{2x} + \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt[4]{x^3} + k$

51. Página 228

a) $\int \frac{4}{x-2} dx = 4\ln|x+2| + k$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx = \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + k$

c) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4} \right) dx = 2\ln|x+3| - \ln|x-4| + k$

d) $\int \frac{1}{(x+4)^2} dx = -\frac{1}{x-4} + k$

e) $\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3} \right) dx = \frac{-1}{x-1} + 7\ln|x+3| + k$

f) $\int \left(\frac{2}{(x+3)^3} + \frac{5}{(x-3)^2} \right) dx = \frac{-1}{(x+3)^2} - \frac{5}{(x-3)} + k$

52. Página 229

a) $\int e^{x-2} dx = e^{x-2} + k$

b) $\int (e^x + 1) dx = e^x + x + k$

c) $\int (e^{2x} + 2^x) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{2^x}{\ln 2} + k$

d) $\int \left(xe^{x^2} + \frac{4}{3}x^3 \right) dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{3}x^4 + k$

e) $\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + k$

f) $\int (2e^x - 3x^2) dx = 2e^x - x^3 + k$

g) $\int \left(5e^{\frac{x}{2}} + 2 \cdot 3^x \right) dx = 10e^{\frac{x}{2}} + 2 \frac{3^x}{\ln 3} + k$

h) $\int (x2^{x^2+2x} + 2^{x^2+2x}) dx = \frac{1}{2} \int (2x+2) \cdot 2^{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{x^2+2x}}{\ln 2} + k$

53. Página 229

a) $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \text{sen}(2x) + k$

b) $\int 4 \text{sen}(x + \pi) dx = -4 \cos(x + \pi) + k$

c) $\int 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) dx = -9 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) + k$

d) $\int 5 \text{sen}(2x - \pi) dx = \frac{-5}{2} \cos(2x - \pi) + k$

e) $\int 3 \sec^2\left(\frac{1}{5}x\right) dx = 15 \int \frac{\frac{1}{5} dx}{\cos^2\left(\frac{1}{5}x\right)} = 15 \text{tg}\left(\frac{1}{5}x\right) + k$

f) $\int \frac{7}{\text{sen}^2(3x)} dx = \frac{7}{3} \int \frac{3}{\text{sen}^2(3x)} dx = -\frac{7}{3} \text{cotg}(3x) + k$

g) $\int \frac{5}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)} dx = 15 \int \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)} dx = 15 \text{tg}\left(\frac{x}{3}\right) + k$

h) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \text{arc sen } x + k$

i) $\int \frac{3}{x^2+1} dx = 3 \text{arctg } x + k$

j) $\int \frac{1}{(3x)^2+1} dx = \frac{1}{3} \text{arctg}(3x) + k$

54. Página 229

a) Consideramos $\int x^2 dx$ y comprobamos que no coincide con el producto $\int x dx \cdot \int x dx$.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \rightarrow \int x dx \cdot \int x dx = \frac{x^4}{4} + k$$

Entonces la afirmación es cierta.

b) Consideramos $\int 1 dx$ y comprobamos que no coincide con $\frac{\int x dx}{\int x dx}$.

$$\int 1 dx = \int \frac{x}{x} dx = x + k$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{\int x dx}{\int x dx} = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} + k = 1 + k$$

Entonces la afirmación es cierta.

55. Página 229

- a) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + k$
- b) $\int \frac{8x-3}{4x^2-3x+1} dx = \ln|4x^2-3x+1| + k$
- c) $\int \frac{6x^2+1}{2x^3+x-9} dx = \ln|2x^3+x-9| + k$
- d) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} dx = -\ln|\operatorname{cos} x| + k$
- e) $\int \operatorname{cot} x dx = \int \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln|\operatorname{sen} x| + k$
- f) $\int 3x^2 \operatorname{sen} x^3 dx = -\operatorname{cos} x^3 + k$
- g) $\int (2x+1)\operatorname{sen}(x^2+x+5) dx = -\operatorname{cos}(x^2+x+5) + k$
- h) $\int 6x \operatorname{cos}(3x^2-5) dx = \operatorname{sen}(3x^2-5) + k$
- i) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + k$
- j) $\int 6xe^{3x^2} dx = e^{3x^2} + k$
- k) $\int (3x^2+1)e^{x^3+x} dx = e^{x^3+x} + k$
- l) $\int (12x^2-6x)e^{4x^3-3x^2+7} dx = e^{4x^3-3x^2+7} + k$
- m) $\int xe^{7x^2} dx = \frac{e^{7x^2}}{14} + k$
- n) $\int \frac{-2}{4+x^2} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = -\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + k$
- ñ) $\int \frac{-2}{\sqrt{3-x^2}} dx = \frac{-2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} dx = -2\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{3}} + k$
- o) $\int x^3 e^{x^2} = \frac{1}{2} \int te^t dt = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2-1) + k$ (con $t = x^2$ y $dt = 2x dx$)
- p) $\int \frac{x+\ln x}{x} dx = \int dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = x + \int \frac{\ln x}{x} dx = x + \frac{\ln^2 x}{2} + k$
- q) $\int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx = \operatorname{arctg} x + \frac{2}{x} + 3\ln|x| + k$

56. Página 229

- a) $\int \frac{x}{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-3| + k$
- b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{t} + k = \frac{1}{2} \sqrt{x^4+3} + k$
 $t = x^4 + 3 \rightarrow dt = 4x^3 dx \rightarrow x^3 dx = \frac{1}{4} dt$
- c) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{cos} x} dx = \ln|1-\operatorname{cos} x| + k$
- d) $\int \frac{3+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$
 $3 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 3 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x - \sqrt{1-x^2} + k$
 $t = 1-x^2 \rightarrow dt = -2x dx \rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$
- e) $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{2x}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx =$
 $= \int \frac{2x}{x^2} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \ln|x^2| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$
- f) $\int \frac{2\operatorname{cos} x}{3+\operatorname{sen} x} dx = 2\ln|3+\operatorname{sen} x| + k$
- g) $\int \frac{x}{x^2+2^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|x^2+2^4| + k$
 $t = x^2 + 2^4 \rightarrow dt = 2x dx$
- h) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{6} \sqrt{t} + k = \frac{1}{3} \sqrt{1+3x^2} + k$
 $t = 1+3x^2 \rightarrow dt = 6x dx \rightarrow x dx = \frac{1}{6} dt$
- i) $\int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{-1}{x^2+1} dx =$
 $= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + k$
- j) $\int \frac{8}{x^2+4} dx = \int \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx = 4 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx =$
 $= 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + k$

57. Página 229

$$F(x) = \int (x+1)(x^2+2x+6) dx = \int (x^3+3x^2+8x+6) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + 4x^2 + 6x + k$$

$$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + 4x^2 + 6x + 1$$

58. Página 229

$$f(x) = \int \frac{a}{1+x} dx = a \ln|1+x| + k$$

$$f(0) = 1 \rightarrow a \ln 1 + k \rightarrow k = 1 \qquad f(1) = -1 \rightarrow a \ln 2 + 1 = -1 \rightarrow a = \frac{-2}{\ln 2}$$

La función es: $f(x) = \frac{-2}{\ln 2} \ln|1+x| + 1$

59. Página 229

$$F(x) = \int \frac{-x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + k$$

$$F(\sqrt{2}) = 3 \rightarrow \frac{1}{2} \ln|1-2| + k = 3 \rightarrow k = 3$$

La función primitiva es: $F(x) = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + 3$

60. Página 229

Sabemos que f pasa por el origen de coordenadas, por lo que: $f(0) = 0$.

Además, ese es un punto de inflexión, entonces: $f''(0) = 0$.

Como la pendiente de la recta tangente en $(0, 0)$ es 5, podemos concluir que: $f'(0) = 5$.

Finalmente, tenemos:

$$f'''(x) = 24x - 6$$

$$f''(x) = \int (24x - 6) dx = 12x^2 - 6x + k \rightarrow f''(0) = k = 0 \rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6x$$

$$f'(x) = \int (12x^2 - 6x) dx = 4x^3 - 3x^2 + k \rightarrow f'(0) = 5 \rightarrow k = 5 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5$$

$$f(x) = \int (4x^3 - 3x^2 + 5) dx = x^4 - x^3 + 5x + k \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow f(x) = x^4 - x^3 + 5x$$

61. Página 229

$$f''(x) = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + k \rightarrow f''(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow f''(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$f'(x) = \int \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + k \rightarrow f'(0) = 5 \rightarrow k = 5 \rightarrow f'(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 5$$

$$f(x) = \int \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 5 \right) dx = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 5x + k \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow f(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 5x$$

62. Página 229

$$F(x) = \int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2x + 2\cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \ln|x + \cos x| + k$$

$$F(0) = 2 \rightarrow 0 + k = 2 \rightarrow k = 2 \rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|x + \cos x| + 2$$

63. Página 229

$$f'(x) = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$$

$$f(x) = \int (-\cos x + k) dx = -\operatorname{sen} x + kx + l$$

$$f(0) = 1 \rightarrow l = 1 \rightarrow f(x) = -\operatorname{sen} x + kx + 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \rightarrow -1 + \frac{\pi}{2}k + 1 = \pi \rightarrow k = 2 \rightarrow f(x) = -\operatorname{sen} x + 2x + 1$$

64. Página 229

$$f'(x) = \int (6x + 2) dx = 3x^2 + 2x + k$$

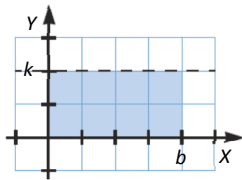
f tiene un mínimo relativo en $A(1, 3)$; por tanto, $f(1) = 3$ y $f'(1) = 0$.

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3 + 2 + k = 0 \rightarrow k = -5 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x - 5) dx = x^3 + x^2 - 5x + k \rightarrow f(1) = 3 \rightarrow 1 + 1 - 5 + k = 3 \rightarrow k = 6 \rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 6$$

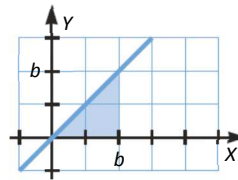
65. Página 230

a) Es el área de un rectángulo de base b y altura k .



$$\text{Área} = b \cdot k$$

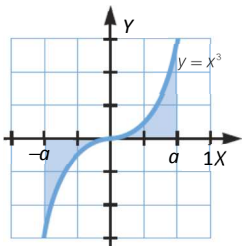
b) Es el área de un triángulo de base b y altura b .



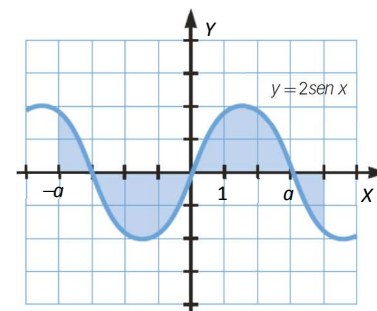
$$\text{Área} = \frac{b \cdot b}{2}$$

66. Página 230

a)



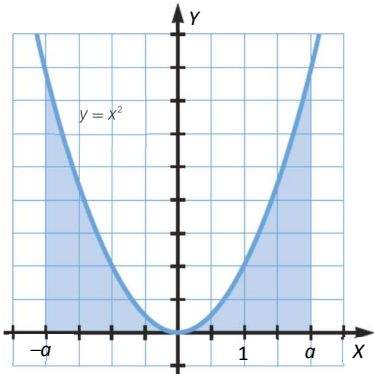
b)



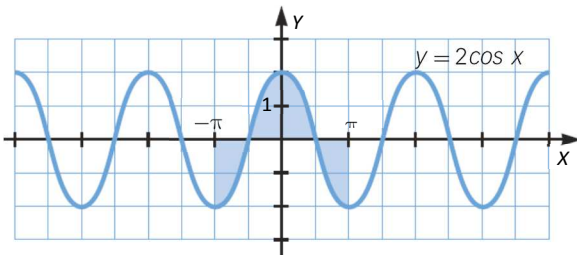
En ambos casos son funciones impares, por lo que el área de la región correspondiente al intervalo $[0, a]$ es igual que la del intervalo $[-a, 0]$ pero de signo contrario. La integral definida en un intervalo centrado en cero es nula.

67. Página 230

- a) La integral de esta función no puede ser nula en ningún intervalo. Es una función par que toma siempre valores positivos.



- b) La integral de esta función sí puede ser nula, pero no en todos los intervalos centrados en cero.



Vemos que, en el intervalo $(-\pi, \pi)$, la integral se anula porque el área comprendida entre la parte positiva de la función y el eje de abscisas es igual a la región comprendida entre este eje y la parte negativa. Así, tenemos que la integral es nula en todos los intervalos de la forma $(-k\pi, k\pi)$, con $k \in \mathbb{N}$.

68. Página 230

- a) Geométricamente es el área de dos triángulos con misma base y altura.

$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 16 \qquad \int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^0 (-x) dx + \int_0^4 x dx = \frac{16}{2} + \frac{16}{2} = 16$$

- b) Geométricamente es el área de un trapecio de bases 6 y 2, y altura 2.

$$\text{Área} = \frac{6+2}{2} \cdot 2 = 8 \qquad \int_{-2}^4 g(x) dx = \int_{-2}^0 (x+2) dx + \int_0^2 2 dx + \int_2^4 (4-x) dx = 2 + 4 + 2 = 8$$

- c) Geométricamente es la diferencia del área de dos triángulos.

$$\text{Área} = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = -\frac{5}{2} \qquad \int_{-2}^3 h(x) dx = \int_{-2}^3 (x-1) dx = \int_{-2}^1 (x-1) dx + \int_1^3 (x-1) dx = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = -\frac{5}{2}$$

69. Página 230

Buscamos la expresión algebraica de la función: $f(x) = \begin{cases} 6x+6 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 6 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x+8 & \text{si } 1 < x \leq 4 \end{cases}$

Calculamos la integral.

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 (6x+6) dx + \int_0^1 6 dx + \int_1^4 (-2x+8) dx = [3x^2 + 6x]_{-1}^0 + [6x]_0^1 + [-x^2 + 8x]_1^4 = 3 + 6 + 9 = 18$$

70. Página 230

$$a) \int_0^4 (2+x) dx = \int_0^4 2 dx + \int_0^4 x dx = 2 \int_0^4 dx + \int_0^4 x dx = [2x]_0^4 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 + 8 = 16$$

$$b) \int_{-3}^2 x^2 dx = \int_{-3}^0 x^2 dx + \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 9 + \frac{8}{3} = \frac{35}{3}$$

$$c) \int_0^2 (x^2 - 3x + 5) dx = \int_0^2 x^2 dx - 3 \int_0^2 x dx + 5 \int_0^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 5[x]_0^2 = \frac{8}{3} - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = \frac{20}{3}$$

71. Página 230

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^0 (-2x) dx + \int_0^4 3x dx = [-x^2]_{-2}^0 + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^4 = 4 + 24 = 28$$

72. Página 230

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 (-2x + 5) dx + \int_1^3 (x^2 + 2) dx = [-x^2 + 5x]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_1^3 = -1 + 5 + 1 + 5 + 9 + 6 - \frac{1}{3} - 2 = \frac{68}{3}$$

73. Página 230

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y $F(x) = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ es una primitiva de $f(x)$. Así, podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^2 \frac{1}{9+x^2} dx = \left[\frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3}$$

Geoméricamente es el área de la región limitada por la curva, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$.

74. Página 230

$f(x)$ es continua en $[0, 5; 1]$. Podemos aplicar la regla de Barrow siempre que exista una primitiva de la función. Realizamos el cambio de variable:

$$t = e^x \rightarrow dt = e^x dx \quad x \in [0, 5; 1] \rightarrow t \in [\sqrt{e}, e]$$

$$\int_{0,5}^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{t^2 + 1} dt = [\operatorname{arc} \operatorname{tg} t]_{\sqrt{e}}^e = \operatorname{arc} \operatorname{tg} e - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{e}$$

75. Página 230

$$a) \int_1^5 (2 + 4x^3) dx = [2x + x^4]_1^5 = 635 - 3 = 632$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$c) \int_1^9 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) dx = \left[\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3}\right]_1^9 = \left(\frac{27}{4} \sqrt[3]{9} + 18\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{27}{4} \sqrt[3]{9} + \frac{199}{12}$$

$$d) \int_0^1 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1$$

$$e) \int_0^1 (2e^x - 4x^2) dx = \left[2e^x - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^1 = 2e - \frac{4}{3} - 2 = 2e - \frac{10}{3}$$

$$f) \int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}} dx = [6\sqrt{x}]_1^4 = (12 - 6) = 6$$

76. Página 230

$$a) \int_2^3 (2^x + \sqrt{2x}) dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{2x^3} \right]_2^3 = \left[\frac{2^3}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{2 \cdot 3^3} \right] - \left[\frac{2^2}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{2 \cdot 2^3} \right] = \frac{4}{\ln 2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

$$b) \int_2^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln|x| + \frac{1}{x} \right]_2^4 = \left(\ln 4 + \frac{1}{4} \right) - \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) = \ln 2 - \frac{1}{4}$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x^2 dx = \left[-\frac{\cos x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi^2}{4} \right) - 1 \right)$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| + \ln|\cos 0| = -\ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right|$$

77. Página 230

$$a) \int_1^3 \frac{3}{x+2} dx = [3\ln|x+2|]_1^3 = 3\ln 5 - 3\ln 3 = 3\ln \frac{5}{3}$$

$$b) \int_0^3 \frac{2x}{x^2+1} dx = [\ln|x^2+1|]_0^3 = \ln 10 - \ln 1 = \ln 10$$

$$c) \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$d) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

78. Página 230

a) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t = x^2 + 1 \rightarrow dt = 2x dx \quad x \in [0, 1] \rightarrow t \in [1, 2]$$

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} [\sqrt{t^3}]_1^2 = \frac{1}{3}(\sqrt{8} - 1)$$

$$b) \int_0^7 (x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} \right]_0^7 = \frac{3}{4}(16 - 1) = \frac{45}{4}$$

$$c) \int_0^1 \frac{3}{x^2+1} dx = [3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x]_0^1 = 3(\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0) = \frac{3\pi}{4}$$

$$d) \int_0^{\pi} 3 \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{3}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{3}{4} [\cos 2x]_0^{\pi} = -\frac{3}{4}(1 - 1) = 0$$

79. Página 230

$$a) \int_0^b (x+x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} = 0 \rightarrow \frac{b^2}{6}(3+2b) = 0 \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

b) $\int_{-2}^2 (4 + bx) dx = \left[\frac{bx^2}{2} + 4x \right]_{-2}^2 = 2b + 8 - 2b + 8 = 16 \neq 2 \rightarrow$ No hay ningún valor de b que lo cumpla.

80. Página 230

Como ambas funciones son continuas, tenemos que:

$$\int_1^3 g(x) dx = \int_1^2 g(x) dx + \int_2^3 g(x) dx$$

Hallamos el valor de cada uno de los sumandos.

$$\int_1^2 2f(x) dx = 3 \rightarrow 2 \int_1^2 f(x) dx = 3 \rightarrow \int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_2^3 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \int_2^3 f(x) dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx = 3 \rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = 3 \rightarrow \frac{3}{2} + \int_1^2 g(x) dx = 3 \rightarrow \int_1^2 g(x) dx = \frac{3}{2}$$

$$3 \int_2^3 [f(x) - g(x)] dx = 3 \rightarrow 3 \int_2^3 f(x) dx - 3 \int_2^3 g(x) dx = 3 \rightarrow \int_2^3 f(x) dx - \int_2^3 g(x) dx = 1 \rightarrow \int_2^3 g(x) dx = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^3 g(x) dx = \int_1^2 g(x) dx + \int_2^3 g(x) dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

81. Página 231

a) $\int_0^2 (e^x + 3e^{-x}) dx = [e^x - 3e^{-x}]_0^2 = e^2 - 3e^{-2} - 1 + 3 = \frac{e^4 + 2e^2 - 3}{e^2}$

b) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t = \sqrt{x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} x dx \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow t \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt = 2 \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (\sec^2 t) dt = 2 [\operatorname{tg} t]_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 2 \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) - 2 \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4}} \right)$$

c) $\int_0^2 \frac{1}{3x^2 + 4} dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{3}}{x^2 + \frac{4}{3}} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4} \left(x^2 + \frac{4}{3} \right)} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)^2 + 1} dx =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^2 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

d) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+2)^2 + 1} dx = [\operatorname{arc} \operatorname{tg} (x+2)]_{-2}^{-1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0 = \frac{\pi}{4}$

82. Página 231

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2x + 1) dx + \int_0^2 2^x dx + \int_2^3 \frac{-4x}{x-4} dx = [x^2 + x]_{-1}^0 + \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^2 + 4 \int_2^3 \left(\frac{4}{x-4} - 1 \right) dx =$$

$$= -2 + \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 4[4 \ln |x-4| - x]_2^3 = -2 + \frac{3}{\ln 2} - 12 - 16 \ln 2 + 8 = \frac{3}{\ln 2} - 16 \ln 2 - 6$$

83. Página 231

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (x^2 + 2a \cos x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (ax^2 + b) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2a \operatorname{sen} x \right]_0^{\pi} + \left[\frac{ax^3}{3} + bx \right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + \frac{8a\pi^3}{3} - \frac{a\pi^3}{3} + 2b\pi - b\pi = \frac{\pi^3(7a+1)}{3} + b\pi$$

84. Página 231

a) $\int_0^3 (3x^2 + 2x + a) dx = [x^3 + x^2 + ax]_0^3 = 27 + 9 + 3a = 12 \rightarrow a = -8$

b) $\int_2^6 \frac{a}{x} dx = [a \ln |x|]_2^6 = a \ln 6 - a \ln 2 = a \ln 3 \rightarrow a \ln 3 = 1 - \ln 3 \rightarrow a = \frac{1}{\ln 3} - 1$

85. Página 231

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \left[\frac{-1}{1+e^x} \right]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{1+e^a} = -\frac{1}{4} \rightarrow e^a = 3 \rightarrow a = \ln 3$$

86. Página 231

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ es $-12 \rightarrow f'(3) = -12$.

$$f'(x) = 2ax \rightarrow f'(3) = 6a \rightarrow -12 = 6a \rightarrow a = -2$$

Luego la función es: $f(x) = -2x^2 + b$

$$6 = \int_0^6 f(x) dx = \int_0^6 (-2x^2 + b) dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + bx \right]_0^6 = -144 + 6b \rightarrow b = 25 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 25$$

87. Página 231

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$p''(x) = 6ax + 2b$$

Pasa por el punto $(0, 1) \rightarrow p(0) = 1 \rightarrow d = 1$.

El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión $\rightarrow p''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$.

Tiene un máximo en $x = 1 \rightarrow p'(1) = 0 \rightarrow 3a + c = 0$.

$$\frac{5}{4} = \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + cx + 1) dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{cx^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 \rightarrow a + 2c = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ a + 2c = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{c = -3a} a - 6a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}$$

Luego, el polinomio es: $p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$

88. Página 231

Hallamos las raíces por el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & 8 \\ -2 & & -2 & 8 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array} \rightarrow f(x) = (x+2)(x^2 - 4x + 4) = (x+2)(x-2)^2$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-3}^{-2} (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) dx \right| + \left| \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x \right]_{-3}^{-2} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x \right]_{-2}^2 \right| \\ &= \left| -\frac{44}{3} + \frac{15}{4} \right| + \left| \frac{20}{3} + \frac{44}{3} \right| = \frac{131}{12} + \frac{64}{3} = \frac{387}{12} = \frac{129}{4} \end{aligned}$$

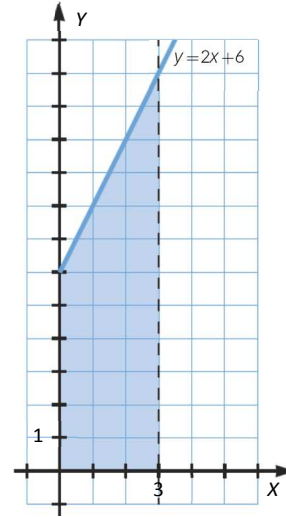
89. Página 231

Calculamos los puntos de intersección:

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 6 \qquad \begin{cases} y = 2x + 6 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow y = 12$$

$$\int_0^3 (2x + 6) dx = [x^2 + 6x]_0^3 = 9 + 18 = 27$$

$$\text{Área} = \frac{(12+6) \cdot 3}{2} = 27$$



90. Página 231

$$\text{a) } -x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \text{Área} = \left| \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 \right| = \left| -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 \right| = \frac{32}{3}$$

$$\text{b) } x^3 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \text{Área} = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 \right| = 4 + 4 = 8$$

$$\text{c) } -x^3 + 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \text{Área} = \left| \int_{-3}^0 (-x^3 + 9x) dx \right| + \left| \int_0^3 (-x^3 + 9x) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} \right]_{-3}^0 \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} \right]_0^3 \right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$$

$$\text{d) } x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \text{Área} = \left| \int_{-3}^3 (x^2 - 9) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_{-3}^3 \right| = |9 - 27 + 9 - 27| = 36$$

$$\text{e) } x^3 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \text{Área} = \left| \int_0^1 (x^3 - x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{12}$$

$$f) \quad -x^3 + x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^0 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \right| + \left| \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 \right| = \\ &= \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right| + \left| -4 + \frac{8}{3} + 4 \right| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

91. Página 231

$$f(x) = 0 \rightarrow x = 3 \quad \text{Área} = \left| \int_3^4 \sqrt{x-3} dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x-3)^3} \right]_3^4 \right| = \left| \frac{2}{3} - 0 \right| = \frac{2}{3}$$

92. Página 231

$$f(x) = 0 \rightarrow x = 2 \quad f(x) = 2 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 (\sqrt{4-2x} - 2) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(4-2x)^3} - 2x \right]_0^2 \right| = \left| -4 + \frac{8}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

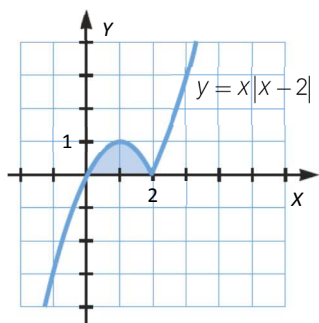
93. Página 231

$$f(x) = 0 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos x \right) dx \right| + \left| \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{2}x + \text{sen } x \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \right| + \left| \left[\frac{1}{2}x + \text{sen } x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \right| = \left| \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

94. Página 231

a)



$$b) \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = x|x-2| \end{cases} \rightarrow x|x-2| = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Escribimos la función definida a trozos: $f(x) = x|x-2| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

95. Página 231

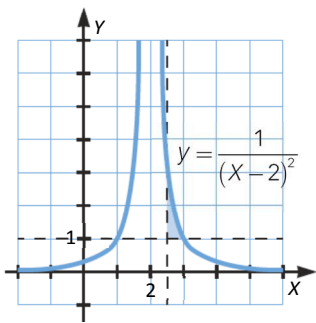
$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \in [-1, 3]$$

Escribimos la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^2 - 4) dx \right| = \left| \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2 \right| + \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_2^3 \right| = \left| \frac{16}{3} + \frac{11}{3} \right| + \left| -3 + \frac{16}{3} \right| = \frac{27}{3} + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$$

96. Página 231

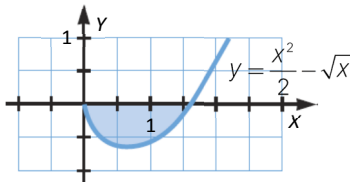
$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$



$$\text{Área} = \left| \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{-1}{x-2} - x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \right| = \left| -1 - 3 + 2 + \frac{5}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

97. Página 231

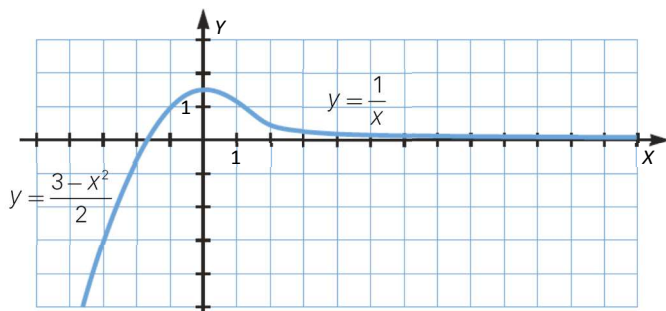
a)



$$\text{b) } f(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases} \qquad \text{Área} = \left| \int_0^{\sqrt[3]{4}} \left(\frac{x^2}{2} - \sqrt{x} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right]_0^{\sqrt[3]{4}} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{4}{3} - 0 \right| = \frac{2}{3}$$

98. Página 231

a)



b) $f(x) = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{3}}^1 \frac{3-x^2}{2} dx \right| + \left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx \right| = \left| \left[\frac{3}{2}x - \frac{x^3}{6} \right]_{-\sqrt{3}}^1 \right| + \left| [\ln x]_1^2 \right| = \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \ln 2 = \frac{4}{3} + \sqrt{3} + \ln 2$$

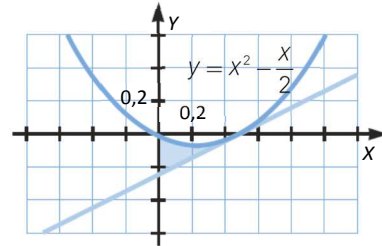
99. Página 231

Calculamos la recta tangente:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{2} \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + n \rightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + n \rightarrow n = -\frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$



$$\text{Área} = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - x^2 + \frac{x}{2} \right) dx \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{4} - x^2 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} \right| = \left| -\frac{1}{24} \right| = \frac{1}{24}$$

100. Página 232

$$f(2) = 1 \rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 1$$

$$f(0) = 0 \rightarrow d = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(2) = 12a + 4b + c = 0$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow f''(2) = 12a + 2b = 0$$

Entonces: $a = \frac{1}{8}, b = -\frac{3}{4}, c = \frac{3}{2}$ y $d = 0$.

Por lo tanto: $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$

Segmento: $y = \frac{1}{2}x$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x \right) dx \right| = \left| \int_0^2 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \right| = \left| \frac{1}{2} - 2 + 2 \right| = \frac{1}{2}$$

101. Página 232

Calculamos la recta tangente:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow f'(-1) = 7$$

$$f(-1) = -3$$

$$y = 7x + n \rightarrow -3 = -7 + n \rightarrow n = 4 \rightarrow y = 7x + 4$$

Hallamos los puntos de corte:

$$x^3 - 2x^2 = 7x + 4 \rightarrow x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^4 (7x + 4 - x^3 + 2x^2) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^4 \right| = \left| -64 + \frac{128}{3} + 56 + 16 + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{7}{2} + 4 \right| = \frac{625}{12}$$

102. Página 232

La función es derivable en 0; por tanto, será continua en este punto. Así, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} (a + b \operatorname{sen} x) \rightarrow 1 = a$$

Además, por ser f derivable en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0} b \cos x \rightarrow 1 = b$$

Definimos la función: $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \end{cases}$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^0 e^x dx \right| + \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen} x) dx \right| = \left| [e^x]_{-2}^0 \right| + \left| [x - \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = |1 - e^{-2}| + \left| \frac{\pi}{2} + 1 \right| = 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e^2}$$

103. Página 232

a) $x + 1$ y 2^x son continuas en los intervalos en los que están definidas, por lo que basta con estudiar lo que ocurre en los extremos de los intervalos.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1 \\ f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1 \end{array} \right\} \rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2^x = 4 \\ f(2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x - 4} = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow f(x) \text{ presenta una discontinuidad de salto finito en } x = 2.$$

La expresión $\frac{2}{x - 4}$ no es continua cuando el denominador se anula.

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2}{x - 4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{x - 4} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow f(x) \text{ presenta una discontinuidad de salto infinito en } x = 4.$$

b) $f(x) = \frac{2}{x - 4} \quad \forall x \geq 2 \rightarrow f(3) = -2$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x - 4)^2} \quad \forall x \geq 2 \rightarrow f'(3) = -1$$

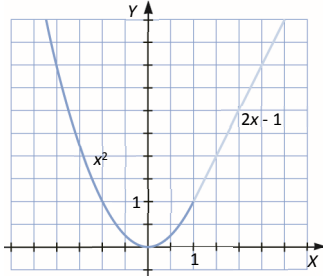
$$y = -x + n \rightarrow -2 = -1 \cdot 3 + n \rightarrow n = 1$$

La recta tangente en $x = 3$ es $y = -x + 1$.

$$\begin{aligned} \text{c) Área} &= \left| \int_{-1}^0 (x + 1) dx \right| + \left| \int_0^2 2^x dx \right| + \left| \int_2^3 \frac{2}{x - 4} dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^2 \right| + \left| [2 \ln |x - 4|]_2^3 \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{2} + 1 \right| + \left| \frac{3}{\ln 2} \right| + |2 \cdot 0 - 2 \ln 2| = \frac{1}{2} + \frac{3}{\ln 2} + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

104. Página 232

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ a) \quad f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{La función es continua en cualquier intervalo.}$$

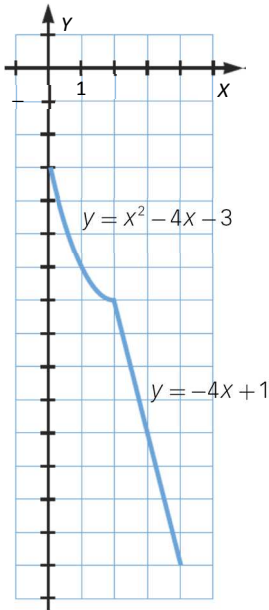


b) $x^2 = 2x - 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 x^2 dx \right| + \left| \int_1^2 2x - 1 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right| + \left| [x^2 - x]_1^2 \right| = 1 + 2 = 3$$

105. Página 232

a)



b) $\text{Área} = \left| \int_0^2 (x^2 - 4x - 3) dx \right| + \left| \int_2^4 (x + 1) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^2 \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_2^4 \right| = \left| \frac{8}{3} - 8 + 6 \right| + |8 + 4 - 2 - 2| = \frac{172}{3}$

106. Página 232

$$\text{Área} = \int_1^a (2x + 1) dx = [x^2 + x]_1^a = a^2 + a - 2$$

$$\text{Área} = 18 \rightarrow a^2 + a - 2 = 18 \rightarrow a^2 + a - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -5 \end{cases}$$

Si consideramos que $1 < a$, tenemos que $a = 4$.

107. Página 232

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^a (-x^2 + 9) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_{-1}^a \right| = \left| -\frac{a^3}{3} + 9a - \frac{1}{3} + 9 \right| = \left| -\frac{a^3}{3} + 9a + \frac{26}{3} \right|$$

$$\text{Área} = 24 \rightarrow -\frac{a^3}{3} + 9a + \frac{26}{3} = 24 \rightarrow \begin{cases} a = -1 - 2\sqrt{6} \\ a = 2 \\ a = 2\sqrt{6} - 1 \end{cases}$$

Si consideramos que $-1 < a$, tenemos que $a = 2$ o $a = 2\sqrt{6} - 1$.

108. Página 232

a) $\int \frac{2}{x+1} dx = 2\ln|x+1| + K$

b) $\text{Área} = [\ln|x+1|]_2^k = \ln|k+1| - \ln 3 = \ln\left(\frac{k+1}{3}\right)$

$$\text{Área} = \ln 2 \rightarrow \ln\left(\frac{k+1}{3}\right) = \ln 2 \rightarrow \frac{k+1}{3} = 2 \rightarrow \begin{cases} k+1 = 6 \rightarrow k = 5 \\ -k-1 = 6 \rightarrow k = -6 \end{cases}$$

Como $k > 2 \rightarrow$ La solución es $k = 5$.

109. Página 232

Hallamos los puntos de corte:

$$x^2 + 2 = 2x + 2 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 (x^2 + 2 - 2x - 2) dx \right| = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 \right| = \left| \frac{8}{3} - 4 \right| = \frac{4}{3}$$

110. Página 232

Calculamos las rectas que determinan los lados del triángulo.

El lado que contiene los vértices $(-5, 0)$ y $(2, 0)$ está en la recta $y = \frac{2}{5}x + 2$.

El lado que contiene los vértices $(-5, 0)$ y $(0, 0)$ está en la recta $y = 0$.

El lado que contiene a los vértices $(0, 0)$ y $(2, 0)$ está en la recta $x = 0$.

$$\text{Área} = \left| \int_{-5}^0 \left(\frac{2}{5}x + 2 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{5} + 2x \right]_{-5}^0 \right| = 5$$

111. Página 232

Hallamos los puntos de corte: $2 + x - x^2 = x^2 - 3x + 2 \rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 (2 + x - x^2 - x^2 + 3x + 2) dx \right| = \left| \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \right| = \left| \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 \right| = \left| -\frac{16}{3} + 8 \right| = \frac{8}{3}$$

112. Página 232

La ecuación de la bisectriz es $y = x$.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 - 2 = x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^2 (x^2 - 2 - x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 \right| = \left| \frac{8}{3} - 4 - 2 + \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

113. Página 232

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^3 - 2x = -x^2 \rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 2x + x^2) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - 2x + x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right| = \\ &= \left| -4 + 4 + \frac{8}{3} \right| + \left| \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = -x^2 + 3x - 1 \rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right| + \left| 4 - \frac{8}{3} - 4 \right| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

114. Página 232

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\frac{|x|}{2} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \begin{cases} -\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow x^3 + x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ \frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{2} \right) dx \right| + \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx \right| = \left| \left[\text{arc tg } x + \frac{x^2}{4} \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\text{arc tg } x - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{\pi - 1}{2}$$

115. Página 232

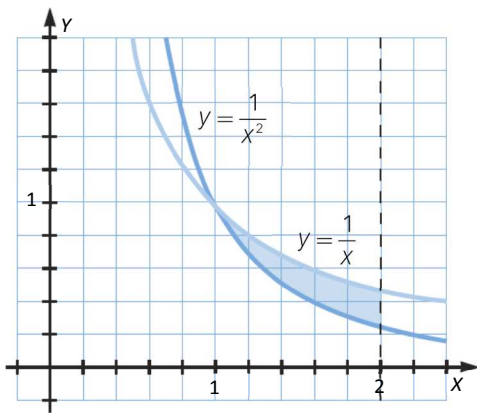
Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\frac{8}{x} = \sqrt{x} \rightarrow 8 = x\sqrt{x} \rightarrow x = 4$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_4^8 \left(\frac{8}{x} - \sqrt{x} \right) dx \right| = \left| \left[8 \ln x - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_4^8 \right| = \left| 8 \ln 8 - \frac{16}{3} \sqrt{8} - 8 \ln 4 + \frac{8}{3} \sqrt{4} \right| = \left| 24 \ln 2 - \frac{32}{3} \sqrt{2} - 16 \ln 2 + \frac{16}{3} \right| = \\ &= \left| \frac{16 - 32\sqrt{2}}{3} + 8 \ln 2 \right| \end{aligned}$$

116. Página 232

a)



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \rightarrow x = 1$

$$\text{Área} = \left| \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \right| = \left| \left[\ln x + \frac{1}{x} \right]_1^2 \right| = \left| \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 \right| = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

117. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $1 = \frac{1}{x} \rightarrow x = 1$

$$\text{Área} = \left| \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx \right| = \left| [x - \ln |x|]_1^2 \right| = 2 - \ln 2 - 1 + \ln 1 = 1 - \ln 2$$

118. Página 232

Hallamos los puntos de corte para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$: $\text{sen } 2x = \cos x \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\text{sen } 2x - \cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen } 2x - \cos x) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \text{sen } x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \right| + \left| \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \text{sen } x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

119. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = (x-2)^2 \rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \qquad (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 x^2 dx \right| + \left| \int_1^2 (x-2)^2 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^2 \right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

120. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $2 = x$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 (2-x) dx \right| = \left| \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \right| = 2$$

121. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $\sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16$

$$\text{Área} = \left| \int_0^{16} (\sqrt{x} - 4) dx \right| = \left| \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4x \right]_0^{16} \right| = \left| \frac{128}{3} - 64 \right| = \frac{64}{3}$$

122. Página 232

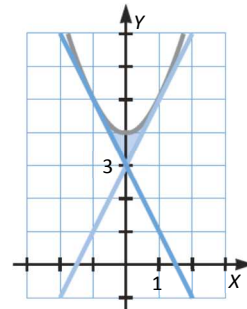
$$y(-1) = 5 \qquad y(1) = 5$$

$$f(x) = x^2 + 4 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow \begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 2 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$$y = -2x + n \rightarrow 5 = 2 + n \rightarrow n = 3 \rightarrow y = -2x + 3$$

$$y = 2x + n \rightarrow 5 = 2 + n \rightarrow n = 3 \rightarrow y = 2x + 3$$



$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 (x^2 + 4 + 2x - 3) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 + 4 - 2x - 3) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

123. Página 232

$$x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = e^2$$

$$\text{Recta: } m = \frac{e^2 - 1}{2} \rightarrow y = \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) x + n \rightarrow 1 = n \rightarrow y = \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) x + 1$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 \left(\left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) x + 1 - e^x \right) dx \right| = \left| \left[\left(\frac{e^2 - 1}{4} \right) x^2 + x - e^x \right]_0^2 \right| = |e^2 - 1 + 2 - e^2 + 1| = 2$$

124. Página 233

a) $f(1) = 2 \rightarrow 1 + a + b = 2 \rightarrow b = 1 - a$

$g(1) = 2 \rightarrow 1 + c = 2 \rightarrow c = 1$

La función es: $g(x) = x^3 + 1$

$g'(x) = 3x^2 \rightarrow g'(1) = 3$

$f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(1) = 3 \rightarrow 2 + a = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 0$

La función es: $f(x) = x^2 + x$

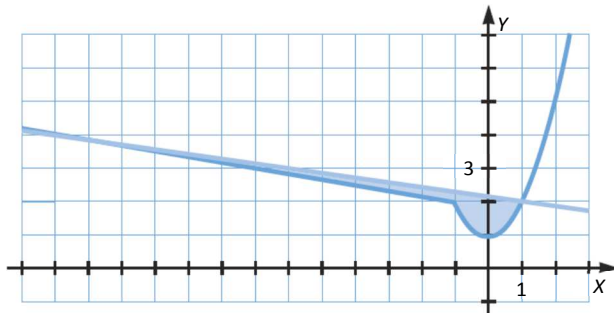
b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 + x = x^3 + 1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^1 (x^2 + x - x^3 - 1) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - x \right]_{-1}^1 \right| = \left| \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 \right| = \frac{4}{3}$$

125. Página 233

a)



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\frac{15-x}{7} = \sqrt{3-x} \rightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = -6 \end{cases} \qquad \frac{15-x}{7} = x^2 + 1 \rightarrow x = 1$$

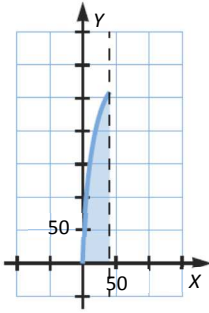
$$\text{Área} = \left| \int_{-13}^{-6} \left(\sqrt{3-x} - \frac{15}{7} + \frac{x}{7} \right) dx \right| + \left| \int_{-6}^{-1} \left(\sqrt{3-x} - \frac{15}{7} + \frac{x}{7} \right) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 \left(x^2 + 1 - \frac{15}{7} + \frac{x}{7} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{2}{3} \sqrt{(3-x)^3} - \frac{15}{7}x + \frac{x^2}{14} \right]_{-13}^{-6} \right| + \left| \left[-\frac{2}{3} \sqrt{(3-x)^3} - \frac{15}{7}x + \frac{x^2}{14} \right]_{-6}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8}{7}x + \frac{x^2}{14} \right]_{-1}^1 \right| =$$

$$= \left| -18 + \frac{90}{7} + \frac{18}{7} + \frac{128}{3} - \frac{195}{7} - \frac{169}{14} \right| + \left| -\frac{16}{3} + \frac{15}{7} + \frac{1}{14} + 18 - \frac{90}{7} - \frac{18}{7} \right| + \left| \frac{1}{3} - \frac{8}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{3} - \frac{8}{7} - \frac{1}{14} \right| =$$

$$= \left| -18 + \frac{90}{7} + \frac{18}{7} + \frac{128}{3} - \frac{195}{7} - \frac{169}{14} \right| + \left| -\frac{16}{3} + \frac{15}{7} + \frac{1}{14} + 18 - \frac{90}{7} - \frac{18}{7} \right| + \left| \frac{1}{3} - \frac{8}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{3} - \frac{8}{7} - \frac{1}{14} \right| = \frac{1}{6} + \frac{23}{42} + \frac{34}{21} = \frac{7}{3}$$

126. Página 233



$$\text{Área} = \int_0^{40} 30\sqrt{2x+1} \, dx = \left[10\sqrt{(2x+1)^3} \right]_0^{40} = 7290 - 10 = 7280$$

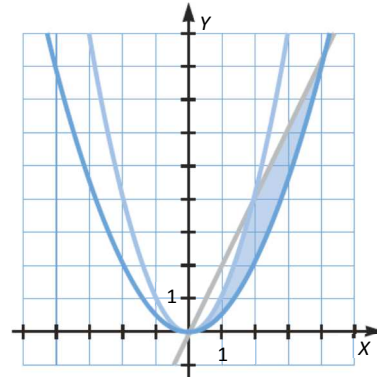
127. Página 233

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = \frac{x^2}{2} \rightarrow x = 0$$

$$f(x) = h(x) \rightarrow x^2 = 2x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(x) = h(x) \rightarrow \frac{x^2}{2} = 2x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



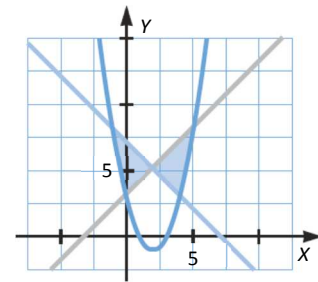
$$\text{Área} = \left| \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx \right| + \left| \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{6} - x^2 \right]_2^4 \right| = \left| \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{32}{3} - 16 - \frac{4}{3} + 4 \right| = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$

b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$f(x) = g(x) \rightarrow x + 3 = x^2 - 4x + 3 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$f(x) = h(x) \rightarrow x + 3 = -x + 7 \rightarrow x = 2$$

$$g(x) = h(x) \rightarrow x^2 - 4x + 3 = -x + 7 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$



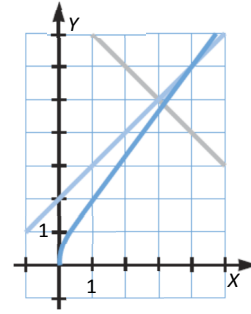
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^0 (-x + 7 - x^2 + 4x - 3) dx \right| + \left| \int_0^2 (x + 3 + x - 7) dx \right| + \left| \int_2^4 (x + 3 + x - 7) dx \right| + \left| \int_4^5 (x + 3 - x^2 + 4x - 3) dx \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^0 (-x^2 + 3x + 4) dx \right| + \left| \int_0^2 (2x - 4) dx \right| + \left| \int_2^4 (2x - 4) dx \right| + \left| \int_4^5 (-x^2 + 5x) dx \right| = \\ &= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^0 \right| + \left| [x^2 - 4x]_0^2 \right| + \left| [x^2 - 4x]_2^4 \right| + \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right]_4^5 \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right| + |4 - 8| + |-4 + 8| + \left| -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} + \frac{64}{3} - 40 \right| = \frac{13}{6} + 4 + 4 + \frac{13}{6} = \frac{37}{3} \end{aligned}$$

c) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$f(x) = g(x) \rightarrow -x + 8 = x + \sqrt{x} \rightarrow x = \frac{33}{8} - \frac{\sqrt{65}}{8} \simeq 3,12$$

$$f(x) = h(x) \rightarrow -x + 8 = x + 2 \rightarrow x = 3$$

$$g(x) = h(x) \rightarrow x + \sqrt{x} = x + 2 \rightarrow x = 4$$



$$\text{Área} = \left| \int_3^{3,12} (x + 2 + x - 8) dx \right| + \left| \int_{3,12}^4 (x + \sqrt{x} - x - 2) dx \right| = \left| [x^2 - 6x]_3^{3,12} \right| + \left| \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 2x \right]_{3,12}^4 \right| =$$

$$= \left| (3,12)^2 - 6 \cdot 3,12 - 9 + 18 \right| + \left| \frac{16}{3} - 8 - \frac{2}{3} \sqrt{(3,12)^3} + 2 \cdot 3,12 \right| = 0,01 + 0,1 = 0,11$$

128. Página 233

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = -\sqrt{x}$$

$$h(x) = \frac{3-x}{2}$$

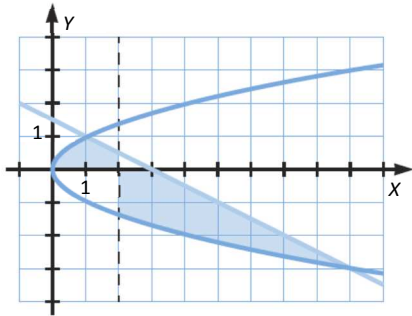
Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$f(x) = h(x) \rightarrow \sqrt{x} = \frac{3-x}{2} \rightarrow x = 1$$

$$g(x) = h(x) \rightarrow -\sqrt{x} = \frac{3-x}{2} \rightarrow x = 9$$

$$f(x) = 0 \rightarrow g(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$h(x) = 0 \rightarrow x = 3$$



$$\text{Área} = \left| \int_0^1 \sqrt{x} dx \right| + \left| \int_1^2 \frac{3-x}{2} dx \right| + \left| \int_2^3 -\sqrt{x} dx \right| + \left| \int_3^9 \left(\sqrt{x} - \frac{3-x}{2} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 \right| + \left| \left[-\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_2^3 \right| + \left| \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{4} \right]_3^9 \right| =$$

$$= \left| \frac{2}{3} \right| + \left| 3 - 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \right| + \left| -2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} \right| + \left| 18 - \frac{27}{2} + \frac{81}{4} - 2\sqrt{3} + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right| =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3} + 27 - 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{3} + \frac{341}{12}$$

129. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 2\sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases} \quad \text{Área} = \left| \int_0^{\sqrt[3]{4}} (2\sqrt{x} - x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{4}} \right| = \left| \frac{8}{3} - \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

130. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 - 1 = ax - 1 \rightarrow x(x - a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^a (x^2 - ax) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^a \right| = \left| \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right| = \left| \frac{a^3}{6} \right| = 36 \rightarrow \frac{a^3}{6} = 36 \rightarrow a = 6$$

$$\left| \frac{a^3}{6} \right| = -36 \rightarrow a = -6$$

131. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2 + 4 = a \rightarrow x^2 = 4 - a \rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{4-a} \\ x = -\sqrt{4-a} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} (x^2 - 4 + a) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x + ax \right]_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} \right| =$$

$$= \left| \frac{(\sqrt{4-a})^3}{3} - 4(\sqrt{4-a}) + a\sqrt{4-a} + \frac{(\sqrt{4-a})^3}{3} - 4(\sqrt{4-a}) + a\sqrt{4-a} \right| =$$

$$= \left| 2 \cdot \frac{(\sqrt{4-a})^3}{3} - 8(\sqrt{4-a}) + 2a\sqrt{4-a} \right| = \left| \sqrt{4-a} \left(\frac{2}{3}(4-a) - 8 + 2a \right) \right| = \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} \right|$$

$$\text{Área} = \frac{4}{3} \rightarrow \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} \right| = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} = \frac{4}{3} \rightarrow (4-a)^3 = 1 \rightarrow a = 3 \\ \frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} = -\frac{4}{3} \rightarrow (4-a)^3 = -1 \rightarrow a = 5 \end{cases}$$

132. Página 233

Si $a \geq 1$, las funciones no determinan una región cerrada.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$1 - x^2 = a \rightarrow x^2 = 1 - a \rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{1-a} \\ x = -\sqrt{1-a} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} (x^2 - 1 + a) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x + ax \right]_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \right| = \left| \frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} - \sqrt{1-a} + a\sqrt{1-a} + \frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} - \sqrt{1-a} + a\sqrt{1-a} \right| =$$

$$= \left| 2 \cdot \frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} - 2(\sqrt{1-a}) + 2a\sqrt{1-a} \right| = \left| \sqrt{1-a} \left(\frac{2}{3}(1-a) - 2 + 2a \right) \right| = \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3} \right| = \frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3} \quad \forall a \in (-\infty, 1]$$

133. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área total} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Entonces el área de cada una de las parcelas será la mitad, es decir, $\frac{2}{3}$.

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

$$\text{Área} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3} \rightarrow a\sqrt{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a^3 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \rightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

134. Página 233

a) Para que la curva y la recta delimiten una región del plano, tienen que cortarse en dos puntos.

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + m \rightarrow x^2 = 3 + m \rightarrow x = \pm\sqrt{3+m}$$

Si $3 + m = 0 \rightarrow m = -3 \rightarrow$ La curva y la recta se cortarán solamente en un punto, en $x = 0$.

Si $3 + m < 0 \rightarrow m < -3 \rightarrow$ La raíz no existe, por lo que las funciones no se cortan.

Si $3 + m > 0 \rightarrow m > -3 \rightarrow$ Las dos funciones delimitan una región en el plano.

b) Las primeras coordenadas de los puntos de corte serán: $-\sqrt{3+m}$ y $\sqrt{3+m}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}} (x^2 + 2x - 3 - 2x - m) dx \right| = \left| \int_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}} (x^2 - 3 - m) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - (3+m)x \right]_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}} \right| = \\ &= \left| \frac{(3+m)\sqrt{3+m}}{3} - (3+m)\sqrt{3+m} + \frac{(3+m)\sqrt{3+m}}{3} - (3+m)\sqrt{3+m} \right| = \left| -\frac{4(3+m)\sqrt{3+m}}{3} \right| = \frac{4(3+m)\sqrt{3+m}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \frac{4(3+m)\sqrt{3+m}}{3} = 36 \rightarrow (3+m)\sqrt{3+m} = 27 \rightarrow (3+m)^2(3+m) = 27^2 \rightarrow (3+m)^3 = (3^2)^3 \rightarrow 3+m = 9 \rightarrow m = 6$$

135. Página 233

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x + 2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

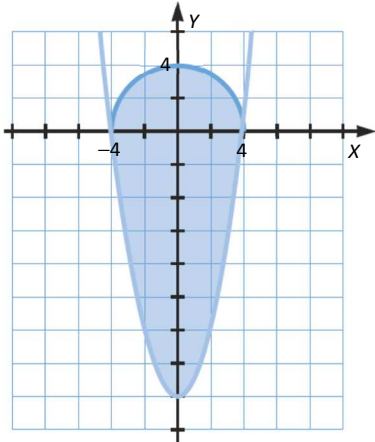
$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^1 (x + 2 - 4 + x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 \right| = \left| \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} - 2 - 4 + \frac{8}{3} \right| = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

b) Basta con tomar una recta paralela al eje X, $y = a$, de tal forma que:

$$a \cdot 2 = \frac{9}{2} \rightarrow a = \frac{9}{4} \rightarrow p(x) = \frac{9}{4}$$

136. Página 233

- a) La ecuación de una circunferencia es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. En este caso tenemos una circunferencia de radio 4; por tanto, la función que tenemos es $y = \sqrt{16 - x^2}$.



- b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\sqrt{16 - x^2} = x^2 - 16 \rightarrow 16 - x^2 = x^4 - 32x^2 + 16^2 \rightarrow x^4 - 31x^2 + 240 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \\ x = \sqrt{15} \\ x = -\sqrt{15} \end{cases}$$

Como solo tomamos el sentido positivo de la circunferencia, las funciones se cortan en $x = -4$ y $x = 4$.

$$\text{Área} = \left| \int_{-4}^4 (\sqrt{16 - x^2} - x^2 + 16) dx \right| = \left| \int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx \right| + \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-4}^4 \right|$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$x = 4 \operatorname{sen} t \rightarrow dx = 4 \cos t dt \quad x \in [-4, 4] \rightarrow t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx \right| + \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-4}^4 \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-4}^4 \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4 \cos t \sqrt{16 - 16 \operatorname{sen}^2 t} dt \right| =$$

$$= -\frac{64}{3} + 64 - \frac{64}{3} + 64 + \left| 16 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt \right| = \frac{256}{3} + \left| 16 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dx \right| = \frac{256}{3} + \left| 8 \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right| = \frac{256}{3} + 8\pi$$

c) $\left(\frac{256}{3} + 8\pi \right) \cdot 3 = 331,40 \text{ €}$

d) $\frac{256}{3} + 8\pi = 110,47 \text{ m}^2$

Tendría que comprar 3 paquetes de 50 m², es decir, se gastaría 300 €. Le compensa la oferta.

137. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $6kx^2 + x = 0 \rightarrow x(6kx + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{6k} \end{cases}$

$$\left| \int_0^k (6kx^2 + x) dx \right| = \left| \left[2kx^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^k \right| = \left| 2k^4 + \frac{k^2}{2} \right| = 2k^4 + \frac{k^2}{2} \text{ porque } k > 0.$$

$$\text{Por tanto: } 2k^4 + \frac{k^2}{2} = k^4 + (k^2 - 2)^2 \rightarrow 4k^4 + k^2 = 2k^4 + 2k^4 - 8k^2 + 8 \rightarrow 9k^2 - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ k = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Como buscamos el valor positivo de $k \rightarrow k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 292

El beneficio viene dado por: $R(x) = 2300 - (x - 50)^2$

Vendiendo 30 pares: $R(30) = 2300 - (30 - 50)^2 = 1900$

Vendiendo 25 pares: $R(25) = 2300 - (25 - 50)^2 = 1675$

2. Página 292

Con la venta de 50 pares de zapatillas se obtiene el beneficio máximo, por lo que si los precios no varían, los beneficios empezarían a disminuir.

Si se venden menos de 50 pares, la empresa obtiene beneficios, pero no llegan al beneficio máximo.

3. Página 292

Veamos para qué valores de x la función de beneficio es positiva. Para ello, buscaremos los puntos en los que dicha función se anula:

$$R(x) = 0 \rightarrow 2300 - (x - 50)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -10(\sqrt{23} - 5) \simeq 2,04 \\ x_2 = 10(5 + \sqrt{23}) \simeq 97,96 \end{cases}$$

La función de beneficio se anula en $x = 2,04$ y en $x = 97,96$. Comprobemos que en valores intermedios la función es positiva, tomando, por ejemplo, $x = 10$.

$$R(10) = 700 > 0$$

Tenemos, por tanto, que la función de beneficio toma valores positivos en el intervalo $(2,04; 97,96)$, pero como estamos trabajando con pares de zapatos, los valores deben ser enteros, por lo que diremos que obtenemos beneficio en el intervalo $[3, 97]$.

4. Página 292

Como ya hemos hallado el intervalo en el que se obtiene beneficio, el mínimo beneficio se obtendrá en alguno de los extremos del intervalo. Veamos en cuál:

$$R(3) = 91 = R(97)$$

En ambos extremos se obtiene el mismo beneficio, que es de 91 €.