Representación de funciones

8

ACTIVIDADES

1. Página 182

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R}$ Im f = [0, +∞) b) $\text{Dom} f = \mathbb{R}$ Im f = [−1, 1]

2. Página 182

a) $x^2 - 3 > 0 \rightarrow (x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3}) > 0 \rightarrow \text{Dom} f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

b) $\sqrt{x+3} + 2x = 0 \rightarrow \sqrt{x+3} = -2x \rightarrow x+3 = 4x^2 \rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow \sqrt{1+3} + 2 \neq 0 \\ x = -\dfrac{3}{4} \rightarrow \sqrt{-\dfrac{3}{4} + 3} + 2\left(-\dfrac{3}{4}\right) = 0 \end{cases}$

$x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow \text{Dom} f = \left[-3, -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$

3. Página 183

a) $9 - 4x^2 \geq 0 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2} - x\right)\left(\dfrac{3}{2} + x\right) \geq 0 \rightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right] \rightarrow \text{Dom} f = \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{9-4x^2} = 0 \rightarrow 9 - 4x^2 = 0 \rightarrow (3+2x)(3-2x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right) \\ x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, 0\right) \end{cases}$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \sqrt{9-0} = 3 \rightarrow (0, 3)$

- La función es positiva en todo su domino, ya que la raíz cuadrada de un número mayor o igual que cero es siempre mayor o igual que cero.

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x \rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

  $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = 0 \rightarrow x = 0$

  $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \underline{|0} \end{array} \rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow x = 1$$

  $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

  Los puntos de corte con el eje X son (−2, 0), (0, 0), (1, 0) y (3,0).

- Corte con el eje Y: $f(0) = 0 \rightarrow$ El punto de corte con el eje Y es (0, 0).

- $f(-3) = 72 > 0 \rightarrow$ La función es positiva en $(-\infty, -2)$. $f(-1) = -8 < 0 \rightarrow$ La función es negativa en $(-2, 0)$.

  $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{25}{16} > 0 \rightarrow$ La función es positiva en $(0, 1)$. $f(2) = -8 < 0 \rightarrow$ La función es negativa en $(1, 3)$.

  $f(4) = 72 > 0 \rightarrow$ La función es positiva en $(0, 1)$.

4. Página 183

a) Por la actividad 2: $\text{Dom}\, f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

- Cortes con el eje X: $\ln(x^2-3) = 0 \to x^2-3 = 1 \to x^2-4 = 0 \to \begin{cases} x = 2 \to (2, 0) \\ x = -2 \to (-2, 0) \end{cases}$
- Corte con el eje Y:

  La función no está definida para $x = 0$; por tanto, no corta el eje Y.
- $f(-3) > 0$ $\quad f(-1,8) < 0$ $\quad f(1,8) < 0$ $\quad f(3) > 0$

  Entonces, la función es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $\left(-2, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right)$.

b) Por la actividad 2: $\text{Dom}\, f = \left[-3, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

- Cortes con el eje X:

  $$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}+2x} = 0 \to x^2-1 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \to (-1, 0) \\ x = 1 \to (1, 0) \end{cases}$$
- Corte con el eje Y:

  $$x = 0 \to f(0) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \to \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
- $f(-2) < 0$, $f\left(-\frac{4}{5}\right) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$

  Entonces, la función es positiva en $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$ y es negativa en $[-3, -1) \cup \left(-\frac{3}{4}, 1\right)$.

5. Página 184

a) $f(-x) = \ln\left((-x)^2-4\right)+2 = \ln\left(x^2-4\right)+2 = f(x) \to$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje Y.

b) $f(-x) = 3sen(-x) = 3(-sen\, x) = -3\, sen\, x = -f(x) \to$ $f(x)$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2-25} = \sqrt{2x^2-25} = f(x) \to$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje Y.

d) $f(-x) = -(-x)^2-27 = x^2-27 = f(x) \to$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje Y.

6. Página 184

a) $f(x+k\pi) = 1-5\cos\left(2(x+k\pi)\right) = 1-5\cos(2x+2k\pi) = 1-5[\cos 2x \cos 2k\pi - sen\, 2x\, sen\, 2k\pi] =$

$= 1-5[\cos 2x \cdot 1 - sen\, 2x \cdot 0] = 1-5\cos 2x = f(x)$

La función $f(x)$ es periódica de período π.

b) $f\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) = tg\left[2\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right] = tg(2x+k\pi) = \frac{tg\, 2x + tg\, k\pi}{1-tg\, 2x \cdot tg\, k\pi} = \frac{tg\, 2x + 0}{1-tg\, 2x \cdot 0} = tg\, 2x$

La función $f(x)$ es periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

7. Página 184

Sí, es una función periódica con período la unidad.

8. Página 185

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{1}{x^2+2x}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$

9. Página 185

a) $x^3-4x=0\to x\left(x^2-4\right)=0\to x(x+2)(x-2)=0\to \text{Dom} f=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{1}{0}=\infty\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{-1}{0}=\infty\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^3-4x}=\dfrac{1}{3}=\infty\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=2$.

b) $x^2-16>0\to x^2-16=0\to x=\pm 4\xrightarrow{x=0}0^2-16<0\to \text{Dom} f=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to -4^-}\log(x^2-16)=-\infty\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-4$.

$\lim\limits_{x\to -4^+}\log(x^2-16)=-\infty\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=4$.

c) $9-x^2>0\to(3+x)(3-x)>0\to \text{Dom} f=(-3,3)$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-\ln\left(9-x^2\right)\right)=+\infty\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=3$.

$\lim\limits_{x\to -3^+}\left(1-\ln\left(9-x^2\right)\right)=+\infty\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-3$.

10. Página 186

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^3+3x}=2\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^3+3x}=2\end{array}\right\}\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=2$.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{No existe } \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln x}{2x}\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2}=0\end{array}\right\}\to$ La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=0$.

11. Página 186

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

- Si $x \longrightarrow +\infty$, $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.
- Si $x \longrightarrow -\infty$, $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

- Si $x \longrightarrow +\infty$, $\frac{x}{x^2-1} - 0 > 0 \rightarrow f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \longrightarrow -\infty$, $\frac{x}{x^2-1} - 0 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

12. Página 187

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x(x^2+3)} = 0 \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2+3)} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+3} - x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 3x}{x^2+3} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = x$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+1}{x(2x^2-x)} = 0 \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

13. Página 187

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x(x^2+2)} = 0 \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x(x^2+x)} = \infty \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x \cdot x} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = x$.

$$f(x) - (mx + n) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x = \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x}$$

- Si $x \longrightarrow +\infty$, $\frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} > 0 \rightarrow$ $f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \longrightarrow -\infty$, $\frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} < 0 \rightarrow$ $f(x)$ está por debajo de la asíntota.

14. Página 188

a) $f(x)$ es polinómica $\longrightarrow$ $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{2}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{2x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{2x}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene ramas parabólicas cuando $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

b) $3x^2+4\neq 0$ en todo $\mathbb{R}\to \text{Dom}\, g=\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(3x^2+4)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\ln(3x^2+4)=+\infty\to\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x^2+4)}{x}=0\to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene una rama parabólica cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

15. Página 188

a) $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{3\}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2}{x-3}=\infty\to \text{Tiene asíntota vertical en } x=3.$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2}{x-3}=-\infty \qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x^2}{x-3}=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x-3}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x(x-3)}=2\to m=2\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x^2+6x}{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{x-3}=6\to n=6\end{array}\right\}\to y=2x+6 \text{ es asíntota oblicua de } f(x).$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene ramas parabólicas.

b) $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}\to$ La función no tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[1-e^x\right]=1\to y=1 \text{ es una asíntota horizontal de } f(x).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1-e^x\right]=-\infty\to \text{No tiene asíntota horizontal cuando } x\longrightarrow+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{x}=-\infty\to \text{La función no tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene una rama parabólica cuando $x \longrightarrow +\infty$.

16. Página 189

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0;\ x = -2$$

$f'(-3) > 0$ $f(-1{,}5) < 0$ $f(-0{,}5) < 0$ $f(1) > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$

$f'(-1) < 0$ $f(1) > 0$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

17. Página 189

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x\,e^x + \frac{x^2\,e^x}{2} = \frac{x\,e^x(2+x)}{2} = 0 \rightarrow x = 0;\ x = -2$$

$f'(-3) > 0$ $f'(-1) < 0$ $f(1) > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2, 0)$.

La función crece a la izquierda del -2 y decrece a la derecha $\rightarrow x = -2$ máximo:

$f(-2) = \dfrac{2}{e^2} \rightarrow P\left(-2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda del 0 y crece a la derecha $\rightarrow x = 0$ mínimo:

$f(0) = 0 \rightarrow Q(0, 0)$ es un mínimo.

b) $\text{Dom}\, f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \cdot (\ln x + 1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$f'\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$ $f'(1) > 0$

La función es decreciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

La función decrece a la izquierda del $\dfrac{1}{e}$ y crece a la derecha $\rightarrow x = \dfrac{1}{e}$ mínimo:

$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{2e} \rightarrow P\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{2e}\right)$ es un mínimo.

18. Página 190

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (2x+2)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2x+2}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$$ No tiene puntos de inflexión.

$f''(-2) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa en el intervalo $(-\infty, -1)$.

$f''(0) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava en el intervalo $(-1, +\infty)$.

b) $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x(4x^3+4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^4 - 8x^2 + 4}{(x^2+1)^4} = \frac{(-12x^2+4)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow -12x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$f''(-1) < 0$ $\qquad$ $f''(0) > 0$ $\qquad$ $f''(1) < 0$

$f(x)$ es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

$f(x)$ es cóncava en el intervalo $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión. $\qquad$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión.

19. Página 190

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x\,e^x + \frac{x^2\,e^x}{2} = \frac{x\,e^x(2+x)}{2}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + x\,e^x)(2+x) + x\,e^x}{2} = \frac{2\,e^x + x\,e^x + 2x\,e^x + x^2\,e^x + xe^x}{2} = \frac{e^x(x^2+4x+2)}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

$f''(-4) > 0$ $\qquad$ $f''(-1) < 0$ $\qquad$ $f''(0) > 0$

La función $f(x)$ es cóncava en el intervalo $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$.

La función $f(x)$ es convexa en el intervalo $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$.

$f\left(-2-\sqrt{2}\right) = \left(3+2\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}} \rightarrow P\left(-2-\sqrt{2}, \left(3+2\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}\right)$ es punto de inflexión.

$f\left(-2+\sqrt{2}\right) = \left(3-2\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}} \rightarrow Q\left(-2+\sqrt{2}, \left(3-2\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ es punto de inflexión.

b) $\text{Dom} f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\cdot(\ln x + 1)$$

$f''(x) = \dfrac{1}{2x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene puntos de inflexión.

La función $f(x)$ es cóncava o convexa en todo su dominio. $f''(e) > 0 \rightarrow$ La función es cóncava en $(0, +\infty)$.

20. Página 191

a) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow$ Corta al eje X en $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$ y $(-\sqrt{3},0)$.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje Y $(0, 0)$.

• Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 6x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3 - 6x) = +\infty$$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $(-1, 1)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -1$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = -1$ es un máximo:

$f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 1$ es un mínimo:

$f(1) = -4 \rightarrow (1, -4)$ es un mínimo.

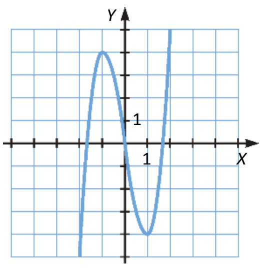
• Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = 12x = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0$ hay un punto de inflexión $\rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 8x^2 - x^4 = x^2(8 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow$ Corta al eje X en $(0,0)$, $(2\sqrt{2},0)$ y $(-2\sqrt{2},0)$.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

• Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -2$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = -2$ es un máximo:

$f(-2) = 16 \rightarrow (-2, 16)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 0$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 0$ es un mínimo:

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un mínimo.

La función crece a la izquierda de $x = 2$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = 2$ es un máximo:

$f(2) = 16 \rightarrow (2, 16)$ es un máximo.

• Concavidad y convexidad:

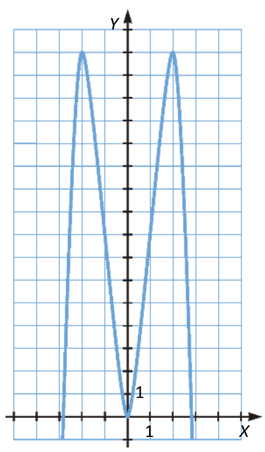
$f''(x) = -12x^2 + 16 = 4(4 - 3x^2) = 0 \rightarrow x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

En $\left(-\infty, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ hay punto de inflexión $\rightarrow \left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{80}{9}\right)$ es punto de inflexión.

La función es cóncava a la izquierda de $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ hay punto de inflexión $\rightarrow \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{80}{9}\right)$ es punto de inflexión.



21. Página 191

a) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 12x^3 - 4x = 2x(3x^4 - 6x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1{,}51 \end{cases}$ → Corta al eje X en $(0,0)$, $(1{,}51;0)$ y $(-1{,}51;0)$.

  $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje Y en (0, 0).

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 30x^4 - 36x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 1{,}14$

  En $(-\infty; -1{,}14) \cup (1{,}14, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En $(-1{,}14; 1{,}14)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = -1{,}14$ y decrece a la derecha → $x = -1{,}14$ es un máximo:

  $f(-1{,}14) = 10{,}79 \rightarrow (-1{,}14; 10{,}79)$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = 1{,}14$ y crece a la derecha → $x = 1{,}14$ es un mínimo:

  $f(1{,}14) = -10{,}79 \rightarrow (1{,}14;-10, 79)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 120x^3 - 72x = 24x(5x^2 - 3) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 0{,}77 \end{cases}$

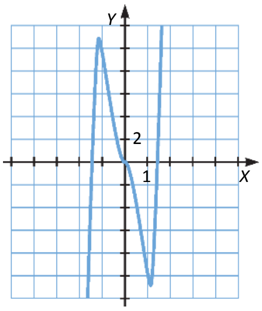
  En $(-\infty; -0{,}77) \cup (0; 0{,}77)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  En $(-0{,}77; 0) \cup (0{,}77, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  La función es convexa a la izquierda de $x = -0{,}77$ y cóncava a la derecha → En $x = -0{,}77$ hay punto de inflexión → $(-0{,}77; 6{,}93)$ es punto de inflexión.

  La función es cóncava a la izquierda de $x = 0$ y convexa a la derecha → En $x = 0$ hay punto de inflexión → (0, 0) es punto de inflexión.

  La función es convexa a la izquierda de $x = 0{,}77$ y cóncava a la derecha → En $x = 0{,}77$ hay punto de inflexión → $(0{,}77; -6{,}93)$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$$f(x)=0 \rightarrow x^3+x^4=x^3(1+x)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \rightarrow \text{ Corta al eje } X \text{ en } (0,0) \text{ y } (-1,0).$$

$x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow$ Corta al eje Y en (0, 0).

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3+x^4\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3+x^4\right)=+\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=3x^2+4x^3=x^2(3+4x)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

En $\left(-\frac{3}{4},0\right)\cup(0,+\infty)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x=-\frac{3}{4}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x=-\frac{3}{4}$ es un mínimo:

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=-0{,}11 \rightarrow \left(-\frac{3}{4},-0{,}11\right)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

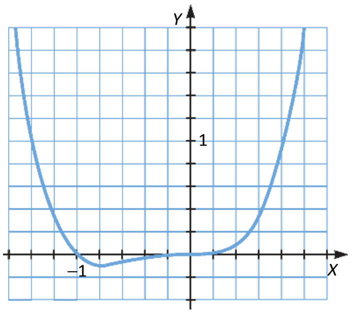
$$f''(x)=6x+12x^2=6x(1+2x) \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

En $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

La función es cóncava a la izquierda de $x=-\frac{1}{2}$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x=-\frac{1}{2}$ hay punto de inflexión $\rightarrow$ $\left(-\frac{1}{2};-0{,}06\right)$ es punto de inflexión.

La función es convexa a la izquierda de $x=0$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x=0$ punto de inflexión $\rightarrow$ (0, 0) es punto de inflexión.



22. Página 192

a) • $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \rightarrow \dfrac{x^2-5}{x}=0 \rightarrow x^2-5=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{5} \rightarrow$ Corta al eje X en $\left(-\sqrt{5},0\right)$ y $\left(\sqrt{5},0\right)$.

No corta al eje Y porque en $x=0$ no está definida.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-5}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-5}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-5}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-5}{x^2} = 1 \rightarrow m=1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-5}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-5}{x} = 0 \rightarrow n=0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y=x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

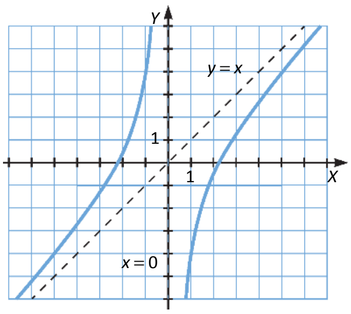
$f'(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2} > 0 \rightarrow$ La función $f(x)$ es creciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = -\dfrac{10}{x^3} \neq 0 \rightarrow$ La función $f(x)$ no presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.



b) • $x^3 + x = x\left(x^2+1\right) = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow \text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

$g(x)=0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^3+x} = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ No corta al eje X porque no está definida para $x=0$.

No corta al eje Y porque la función no está definida para $x=0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3+x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x^2+1} = 0 \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^3+x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^3+x} = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$g'(x) = \frac{-x^4+x^2}{\left(x^3+x\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \to x = \pm 1$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $g'(x) < 0 \to g(x)$ es decreciente.

En $(-1, 0) \cup (0, 1)$, $g'(x) > 0 \to g(x)$ es creciente.

$x = -1 \to g(-1) = -\frac{1}{2} \to \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo.

$x = 1 \to g(1) = \frac{1}{2} \to \left(1, \frac{1}{2}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$g''(x) = \frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \to 2x^3 - 6x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

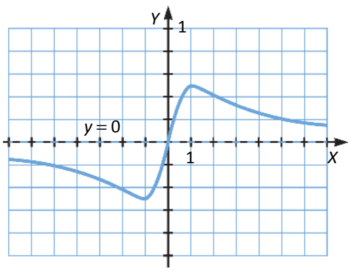
En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$, $g''(x) < 0 \to g(x)$ es convexa.

En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, $g''(x) > 0 \to g(x)$ es cóncava.

$x = -\sqrt{3} \to g\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \to \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ es punto de inflexión.

$x = 0 \to g(0) = 0 \to (0, 0)$ es punto de inflexión.

$x = \sqrt{3} \to g\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \to \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ es punto de inflexión.



23. Página 192

a) • $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3 - 3}{x} = 0 \rightarrow x^3 - 3 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow (\sqrt[3]{3}, 0)$ corta al eje X.

No tiene corte con el eje Y porque la función no está definida para $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3}{x^2} = \infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 + 3 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}} \simeq -1{,}14$

En el intervalo $\left(-\infty, \sqrt[3]{-\frac{3}{2}}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $\left(\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}} \rightarrow f\left(\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4} \simeq 3{,}93 \rightarrow \left(\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4}\right)$ es un mínimo.

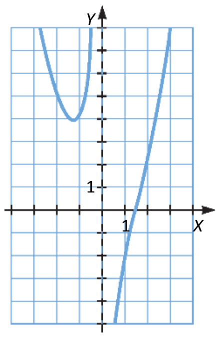
• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \frac{2x^3 - 6}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^3 - 6 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3}$

En $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{3}, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(0, \sqrt[3]{3})$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

$x = \sqrt[3]{3} \rightarrow f(\sqrt[3]{3}) = 0 \rightarrow (\sqrt[3]{3}, 0)$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$g(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^4 - 3x}{x} = 0 \rightarrow x^4 - 3x = 0 \rightarrow x\left(x^3 - 3\right) = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$ corta al eje X.

No tiene corte con el eje Y porque la función no está definida para $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 - 3x}{x} \rightarrow \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^3 - 3}{1} = -3 \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x^2} = \infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{x} = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$g'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es creciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es creciente.

No presenta máximos ni mínimos, ya que la función no está definida en $x = 0$.

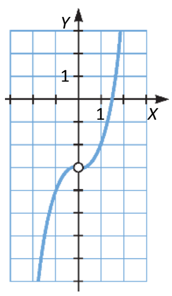
• Concavidad y convexidad:

$g''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es cóncava.

No presenta puntos de inflexión, ya que en $x = 0$ la función no está definida.



24. Página 193

a) • $2x+1\geq 0 \to x\geq -\frac{1}{2} \to \text{Dom}\, f=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

• Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \to \sqrt{2x+1}=0 \to x=-\frac{1}{2} \to \left(-\frac{1}{2},0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0)=\sqrt{1}=1 \to (0,1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{x}=0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

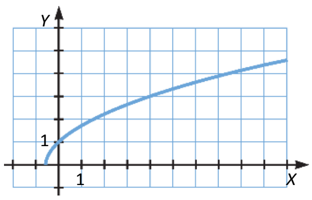
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \to$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x)=\frac{-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, f \to$ La función es siempre convexa y no tiene puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f=[0,+\infty)$

• Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \to 2x+\sqrt{x}=0 \to x=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0)=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{x}\right)=+\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x}=2\\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica:

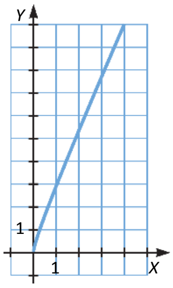
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{x}\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0\ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0\ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



25. Página 193

a) • $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow \text{Dom} f = [-2, 2]$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0) = \sqrt{4} = 2 \rightarrow (0, 2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  No tiene asíntotas horizontales, ni asíntotas oblicuas, ni ramas parabólicas, ya que la función no está definida cuando $x \rightarrow +\infty$ ni cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

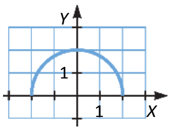
  En el intervalo (–2, 0), $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo (0, 2), $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  $x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \dfrac{-4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} < 0\ \forall x \in \text{Dom} f \rightarrow$ La función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom} f = [0, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to x + \sqrt{x} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = \sqrt{1} = 1 \to (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{x}\right) = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

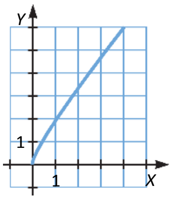
Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{x}\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \to$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0 \ \forall x \in \text{Dom} f \to$ La función es siempre convexa y no tiene puntos de inflexión.



26. Página 194

a) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to e^{-x} - 2 = 0 \to x = -\ln 2 \to (-\ln 2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = 1 - 2 = -1 \to (0, -1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = -2 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota horizontal en } y = -2 \text{ cuando } x \to +\infty.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x} - 2}{x} = -\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

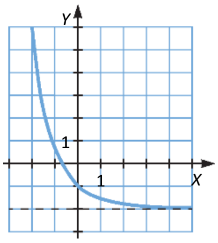
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{-x} - 2\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = -e^{-x} < 0\ \forall x \in \text{Dom} f \to$ La función es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = e^{-x} > 0\ \forall x \in \text{Dom} f \to$ La función es siempre cóncava y no presenta puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \to 3 + e^{\frac{x}{2}} \neq 0\ \forall x \in \text{Dom} f \to$ La función no corta al eje X.

  $f(0) = 3 + e^0 = 4 \to (0, 4)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+e^{\frac{x}{2}}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+e^{\frac{x}{2}}\right) = 3\end{array}\right\} \to \text{Tiene una asíntota horizontal en } y = 3 \text{ cuando } x \to -\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+e^{\frac{x}{2}}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3+e^{\frac{x}{2}}}{x} = 0\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene una rama parabólica:

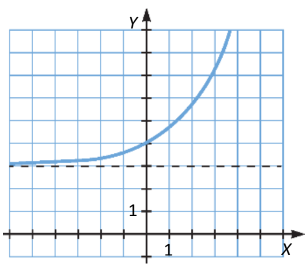
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3+e^{\frac{x}{2}}\right) = +\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > 0\ \forall x \in \text{Dom} f \to$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} > 0\ \forall x \in \text{Dom} f \to$ La función es cóncava en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



27. Página 194

a) • $\text{Dom}\, f = [0, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} > 0\ \forall\ x \in \text{Dom}\, f \to$ La función no corta al eje X.

$f(0) = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right) = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} > 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \to$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

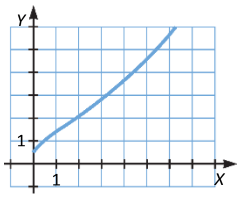
• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{8x\sqrt{x}} = 0 \to x = 1$

En el intervalo (0, 1), $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

$x = 1 \to f(1) = \frac{e}{2} \to \left(1, \frac{e}{2}\right)$ es un punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} \neq 0\ \forall x \in \text{Dom}\, f \to$ La función no corta al eje X.

$f(0) = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}}{x}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene ramas parabólicas:

$$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=+\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{2}}=0\to x=0$$

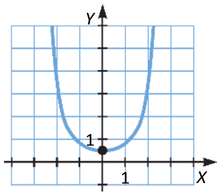
  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente.

  $x=0\to f(0)=\frac{1}{2}\to\left(0,\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}\left(1+x^2\right)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ La función es siempre cóncava y no presenta puntos de inflexión.



28. Página 195

a) - $2x-4>0\to x>2\to \text{Dom}\, f=(2,+\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0\to \ln(2x-4)=0\to 2x-4=1\to x=\frac{5}{2}\to\left(\frac{5}{2},0\right)$ es el punto de corte con el eje X.

  No tiene puntos de corte con el eje Y, ya que la función no está definida para $x=0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\ln(2x-4)\right]=-\infty\to$ Asíntota vertical en $x=2$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2x-4)\right]=+\infty\to$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x-4)}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

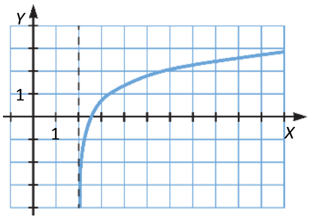
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(2x-4)]=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=\dfrac{1}{x-2}>0\ \forall x\in \text{Dom}\, f\rightarrow$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, f\rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



b) • $4-2x>0\rightarrow x<2\rightarrow \text{Dom}\, f=(-\infty,2)$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow \ln(4-2x)=0\rightarrow 4-2x=1\rightarrow x=\dfrac{3}{2}\rightarrow\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0)=\ln 4\rightarrow(\ln 4,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}[\ln(4-2x)]=-\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[\ln(4-2x)]=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(4-2x)}{x}=0\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

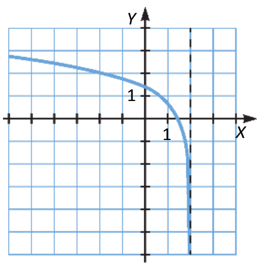
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[\ln(4-2x)]=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=\dfrac{1}{x-2}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, f\rightarrow$ La función es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, f\rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



29. Página 195

a) • $x^2-3>0 \rightarrow x^2>3 \rightarrow \text{Dom} f=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

• Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \rightarrow \ln\left(x^2-3\right)=0 \rightarrow x^2-3=1 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow (-2,0)$ y $(2,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

No tiene corte con el eje *Y*, ya que la función no está definida para $x=0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=-\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-\sqrt{3}$.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=-\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=\sqrt{3}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x}=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]=+\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

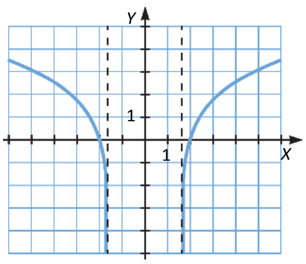
$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}\neq 0\ \forall x\in\text{Dom} f \rightarrow$ La función no presenta máximos ni mínimos.

En el intervalo $\left(-\infty,\sqrt{3}\right)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En el intervalo $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x)=\dfrac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2}<0\ \forall x\in\text{Dom} f \rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no tiene puntos de inflexión.



b) • $3-x^2>0 \rightarrow x^2<3 \rightarrow \text{Dom} f=\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

• Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \rightarrow \ln\left(3-x^2\right)=0 \rightarrow 3-x^2=1 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \rightarrow \left(-\sqrt{2},0\right)$ y $\left(\sqrt{2},0\right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0)=\ln 3 \rightarrow (0,\ln 3)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\sqrt{3}^+} \left[\ln\left(3-x^2\right)\right] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = -\sqrt{3}$.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-} \left[\ln\left(3-x^2\right)\right] = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = \sqrt{3}$.

No tiene asíntotas horizontales, ni oblicuas, ni ramas parabólicas, porque la función no está definida cuando $x \to -\infty$ ni cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-3} = 0 \to x = 0$

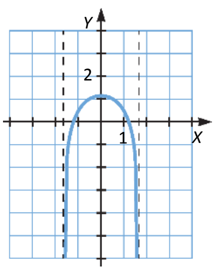
En el intervalo $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

$x = 0 \to f(0) = \ln 3 \to (0, \ln 3)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{-2x^2-6}{\left(x^2-3\right)^2} < 0\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f \to$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



30. Página 196

- $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Continuidad:

Las funciones de cada tramo son continuas, pero la función no es continua en $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = e^0 = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to$ Salto de discontinuidad finito en $x = 1$.

- Cortes con los ejes:

$f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f \to$ No corta al eje X.

$f(0) = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \to \left(0, \dfrac{1}{e^2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} e^{2x-2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)^2 = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{x}=+\infty\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

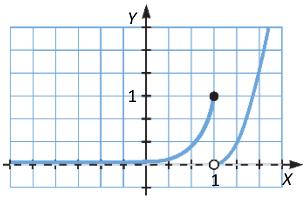
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=\begin{cases}2e^{2x-2} & \text{si} \quad x\le 1\\ 2(x-1) & \text{si} \quad x>1\end{cases}\to f'(x)>0\ \forall x\in \text{Dom} f\to$ Es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x)=\begin{cases}4e^{2x-1} & \text{si} \quad x\le 1\\ 1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}\to f''(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ La función es siempre cóncava y no tiene puntos de inflexión.



31. Página 196

- $\text{Dom} f=\mathbb{R}$
- Continuidad:

Las funciones de cada tramo son continuas, pero la función no es continua en $x=-2$:

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=0\ne 3=\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)\to$ Salto de discontinuidad finito en $x=-2$.

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\to\begin{cases}\ln(-1-x)=0\to x=-2\to(-2,0)\\ 4-\sqrt{x+3}=0\to x=13\to(13,0)\end{cases}$ son los puntos de corte con el eje X.

$f(0)=4-\sqrt{3}\to\left(0,4-\sqrt{3}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(-1-x)\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[4-\sqrt{x+3}\right]=-\infty\end{array}\right\}\to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-1-x)}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-\sqrt{x+3}}{x}=0\end{array}\right\}\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(-1-x)\right]=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[4-\sqrt{x+3}\right]=-\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

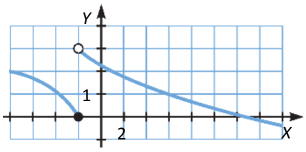
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x\le -2\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{x+3}} & \text{si} \quad x>-2\end{cases} \rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R} \rightarrow$$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x\le -2\\ \dfrac{1}{4(x+3)\sqrt{x+3}} & \text{si} \quad x>-2\end{cases} \rightarrow f''(x)\ne 0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow$$ La función no tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

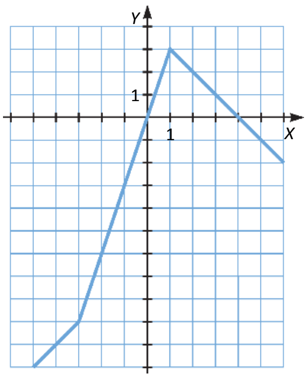


32. Página 197

a) $$f(x)=\begin{cases}-x-3+2x-2-1 & \text{si} \quad x<-3\\ x+3+2x-2-1 & \text{si} \quad -3\le x\le 1\\ x+3-2x+2-1 & \text{si} \quad 1<x\end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases}x-6 & \text{si} \quad x<-3\\ 3x & \text{si} \quad -3\le x\le 1\\ -x+4 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$

Se trata de representar cada una de las rectas en su correspondiente intervalo. Teniendo en cuenta la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de ellas:

$y=x-6\rightarrow\begin{cases}m=1\\ n=-6\end{cases}$ $\qquad y=3x\rightarrow\begin{cases}m=3\\ n=0\end{cases}$ $\qquad y=-x+4\rightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=4\end{cases}$



b) Representaremos la función sin tener en cuenta el valor absoluto: $f(x) = x - x^3$.

- $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow x-x^3=x(1-x^2)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\pm 1\end{cases}\rightarrow (0,0),\ (1,0)$ y $(-1,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-x^3\right) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-x^3\right) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 1-3x^2 = 0 \to x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

  En $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \to f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \to \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ es un mínimo.

  $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \to f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \to \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

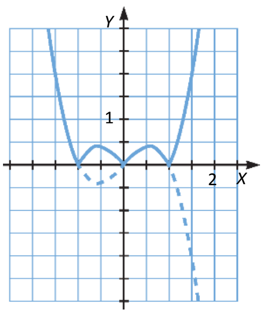
  $f''(x) = -6x = 0 \to x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un punto de inflexión.

Una vez representada la función sin valor absoluto, dibujamos las partes negativas como positivas, haciendo una simetría respecto del eje X.



33. Página 197

a) $f(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1-e^{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Sean $g(x) = 1-e^{-x}$ y $h(x) = 1-e^{x}$.

- $\text{Dom}\, g = \text{Dom}\, h = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $g(x)=0\rightarrow 1-e^{-x}=0\rightarrow x=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte de $g(x)$ con el eje X.

  $h(x)=0\rightarrow 1-e^{x}=0\rightarrow x=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje X.

  $g(0)=1-e^{0}=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte de $g(x)$ con el eje Y.

  $h(0)=1-e^{0}=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Ni $g(x)$ ni $h(x)$ tienen asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{-x}\right)=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{x}\right)=1\end{array}\right\}\rightarrow h(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{x}}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^{x}}{x}=0\end{array}\right\}\rightarrow h(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $g(x)$ y $h(x)$ tienen una rama parabólica:

  $$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-e^{-x}\right)=-\infty$$

  $$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{x}\right)=-\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x)=e^{-x}>0\ \forall x\in \text{Dom}\, g\rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

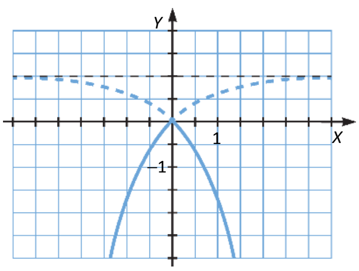
  $h'(x)=-e^{x}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, h\rightarrow$ La función es decreciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $g''(x)=-e^{-x}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, g\rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

  $h''(x)=-e^{x}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, h\rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



b) $f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2-4\right) & \text{si} \quad x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\\ \ln\left(4-x^2\right) & \text{si} \quad x\in(-2,2)\end{cases}$

Sea $g(x)=\ln\left(x^2-4\right)$ y $h(x)=\ln\left(4-x^2\right)$

- $\text{Dom}\, g=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ $\qquad\qquad$ $\text{Dom}\, h=(-2,2)$

- Cortes con los ejes:

  $g(x)=0\rightarrow\ln\left(x^2-4\right)=0\rightarrow x^2-4=1\rightarrow x=\pm\sqrt{5}\rightarrow\left(-\sqrt{5},0\right)$ y $\left(\sqrt{5},0\right)$ son los puntos de corte de $g(x)$ con el eje X.

  $h(x)=0\rightarrow\ln\left(4-x^2\right)=0\rightarrow 4-x^2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{3}\rightarrow\left(-\sqrt{3},0\right)$ y $\left(\sqrt{3},0\right)$ son los puntos de corte de $h(x)$ con el eje X.

  La función $g(x)$ no tiene corte con el eje Y.

  $h(0)=\ln 4\rightarrow(0,\ln 4)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ tiene asíntotas verticales en } x=-2 \text{ y en } x=2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left[\ln\left(4-x^2\right)\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left[\ln\left(4-x^2\right)\right]=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow h(x) \text{ tiene asíntotas verticales en } x=-2 \text{ y en } x=2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ no tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{x}=0\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $h(x)$ no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas porque no está definida cuando $x\longrightarrow-\infty$ ni cuando $x\longrightarrow+\infty$.

  $g(x)$ tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}\neq0\ \forall x\in\text{Dom}\, g\rightarrow$ La función no presenta máximos ni mínimos.

  En el intervalo $(-\infty,-2)$, $g'(x)<0\longrightarrow g(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(2,+\infty)$, $g'(x)>0\longrightarrow g(x)$ es creciente.

  $h'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=0\rightarrow x=0$

  En el intervalo $(-2, 0)$, $h'(x)>0\longrightarrow h(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $h'(x)<0\longrightarrow h(x)$ es decreciente.

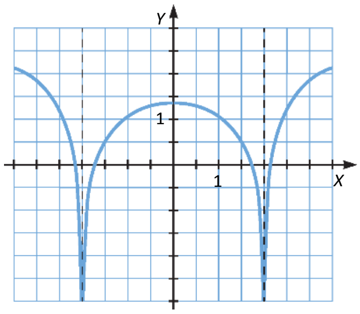
  $x=0\rightarrow h(0)=\ln 4\rightarrow(0,\ln 4)$ es un máximo de $h(x)$.

- Concavidad y convexidad:

$$g''(x)=\frac{-2\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, g \rightarrow$$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

$$h''(x)=\frac{-2\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom}\, h \rightarrow$$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

Por último, para representar *f*(*x*), representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



34. Página 198

$x+2\neq 0\rightarrow x\neq -2$ $\qquad \frac{1}{x+2}\geq 0\rightarrow x+2>0\rightarrow x>-2$ $\qquad \sqrt{\frac{1}{x+2}}>0\rightarrow x+2>0\rightarrow x>-2$

$\text{Dom}\, f=(-2,+\infty)$

35. Página 198

$$f(-x)=\frac{5\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}\right)}{(-x)^2+2}=\frac{5\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2+2}=f(x)\rightarrow$$ La función es simétrica respecto el eje de ordenadas.

36. Página 198

$$y=\frac{x+1}{2}\rightarrow m=\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{2}$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+1}{x^2-x}=a\rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2+1}{x-1}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-2}\right)=\frac{1}{2}$$

37. Página 199

$f'(x)>0$ en $(-\infty,-2)\cup(2,6)\rightarrow f(x)$ crece. $\qquad f'(x)<0$ en $(-2,2)\cup(6,+\infty)\rightarrow f(x)$ decrece.

$f'(x)=0\rightarrow x=x_1,\ x=x_2,\ x=x_3$

Mínimos: $x=x_2$ $\qquad$ Máximos: $x=x_1,\ x=x_3$

$f'(x)$ decrece en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\rightarrow f(x)$ es convexa.

$f'(x)$ crece en $(0, 4)\rightarrow f(x)$ es cóncava.

$f''(x)=0\rightarrow$ Estos serán los máximos o mínimos de $f'(x)$.

$x=0$ y $x=4$ son puntos de inflexión.

38. Página 199

$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Punto de corte: (0, 0)

Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -2$

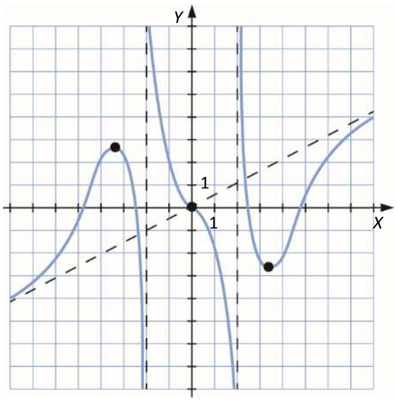
Asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x$

Crece en $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right) \cup \left(\sqrt{12}, +\infty\right)$

Máximo: $\left(\sqrt{12}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Decrece en $\left(-\sqrt{12}, -2\right) \cup (-2, 2) \cup \left(2, \sqrt{12}\right)$

Mínimo: $\left(-\sqrt{12}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



39. Página 200

- Simetría:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

Es simétrica respecto el origen de coordenadas, solo hay que estudiar la función en el intervalo $(0, +\infty)$.

- $\text{Dom} f = (0, +\infty) - \{1\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{\left(x^2 - 1\right)^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función *f*(*x*) es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

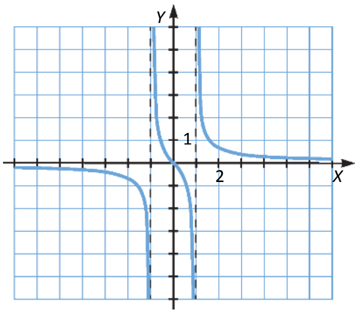
$$f''(x)=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=0\rightarrow x=0$$

En el intervalo $(0,1)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(1,+\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

$x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$ es punto de inflexión.

Se dibuja la gráfica teniendo en cuenta la simetría de la función:



40. Página 200

$$f(x)=\frac{|x|}{|x|-1}=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x<0\\[2mm] \dfrac{x}{x-1} & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Sean $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ y $h(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

- $\text{Dom}\, g=\mathbb{R}-\{-1\}$ $\qquad\qquad$ $\text{Dom}\, h=\mathbb{R}-\{1\}$

- Cortes con los ejes:

$g(x)=0\rightarrow\dfrac{x}{x+1}=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte de *g* con el eje *X*.

$h(x)=0\rightarrow\dfrac{x}{x-1}=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte de *h* con el eje *X*.

$g(0)=\dfrac{x}{x+1}=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte de *g* con el eje *Y*.

$h(0)=\dfrac{x}{x-1}=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte de *h* con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow g(x) \text{ tiene asíntota vertical en } x=-1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow h(x) \text{ tiene asíntota vertical en } x=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1\end{array}\right\}\to g(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1\end{array}\right\}\to h(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y=1.$$

Ni $g(x)$ ni $h(x)$ tienen ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in \text{Dom } g\to$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

$h'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in \text{Dom } h\to$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$g''(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom } g\to$ La función no presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -1)$, $g''(x)>0\to g(x)$ es cóncava.

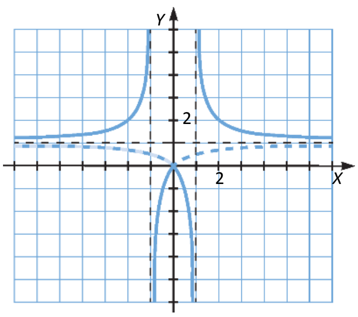
En el intervalo $(-1, +\infty)$, $g''(x)<0\to g(x)$ es convexa.

$h''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}\neq 0\ \forall x\in \text{Dom } h\to$ La función no presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 1)$, $h''(x)<0\to h(x)$ es convexa.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $h''(x)>0\to h(x)$ es cóncava.

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



41. Página 201

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+b \rightarrow f'(1)=3a+b=0 \\ f(1)=a+b+1=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a+b=0 \\ a+b=-1 \end{array}\right\} \rightarrow a=\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}$$

42. Página 201

a) $\left.\begin{array}{l} B(5)=10 \\ \lim\limits_{x\to 5^-}(-t^2+7t)=10 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} 10=10 \end{array}\right\} \rightarrow$ $B(t)$ es continua en $t=5$.

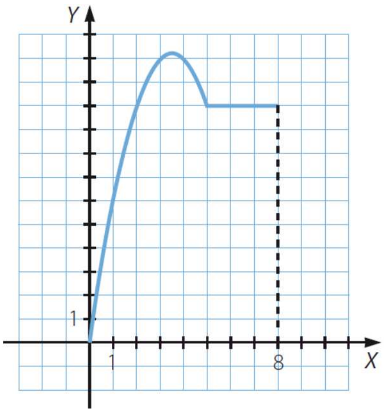
- En $[0,5)$:

  $B'(t)=-2t+7=0 \rightarrow t=\frac{7}{2}$

  $B''(t)=-2<0 \rightarrow$ La función es siempre convexa, y en $t=\frac{7}{2}$ se alcanza un máximo, por lo que en $\left(0,\frac{7}{2}\right)$ es creciente y en $\left(\frac{7}{2},5\right)$ es decreciente.

  $B(0)=0$ $\qquad$ $B\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{49}{4}$

- En $[5,8]$: $B(t)=10$



El beneficio esperado aumenta durante los tres primeros años y medio, hasta alcanzar el valor 12,25 millones de euros. Luego disminuye hasta el quinto año, alcanzando los 10 millones de euros y, a partir de ahí, permanece constante hasta el octavo año.

b) $B(t)=11{,}25 \rightarrow -t^2+7t=11{,}25 \rightarrow t^2-7t+11{,}25=0 \rightarrow \begin{cases} x=2{,}5 \\ x=4{,}5 \end{cases}$

El beneficio esperado es de 11,25 millones a los dos años y medio y a los cuatro años y medio.

ACTIVIDADES FINALES

43. Página 202

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 3x - 9 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Puntos de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = -x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow (-3, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow (-2, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$

44. Página 202

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \dfrac{x+6}{x-2} = 0 \rightarrow x = -6 \rightarrow (-6, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-3\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 3} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -\dfrac{4}{3} \rightarrow \left(0, -\dfrac{4}{3}\right)$

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -\dfrac{3}{4} \rightarrow \left(0, -\dfrac{3}{4}\right)$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \dfrac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

45. Página 202

a) $\text{Dom}\, y = (-\infty, 4]$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{4-x} - 3 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow (-5, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

b) $\text{Dom}\, y = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{3x+4} - 5 = 0 \rightarrow x = 7 \rightarrow (7, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

c) $\text{Dom}\, y = [-5, 5]$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{25-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{x^2+9} - 5 = 0 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow (-4, 0), (4, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$

46. Página 202

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = x \cdot e^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 2^x - 1 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 2 - 2^{\frac{1}{x}} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 9 - 3^{2-\frac{1}{x}} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene puntos de corte.

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

47. Página 202

a) $\text{Dom}\, y = (-3, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \log_3(3x+9) = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{3} \rightarrow \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

b) $\text{Dom}\, y = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \ln\left(x^2 + 2x\right) = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2} \rightarrow \left(-1-\sqrt{2}, 0\right), \left(-1+\sqrt{2}, 0\right)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

c) $\text{Dom}\, y = (-2, 4)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \log_2\left(\frac{2+x}{4-x}\right) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Puntos de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

d) $\text{Dom}\, y = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x}{\log_2(x-1)} \neq 0 \ \forall x \in \text{Dom}\, f \rightarrow$ No tiene puntos de corte.

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

48. Página 202

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $\text{Dom}\, y = [0, +\infty)$

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

49. Página 202

a) $(-\infty, -4) \cup \{-3, +3\}$

b) $(4, +\infty) \cup \{-3, +3\}$

c) $(-\infty, -4]$

d) $(-\infty, -2) \cup \{3\}$

e) $(2, +\infty) \cup \{-3\}$

f) $[4, +\infty)$

50. Página 202

a) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Dom $y = (-\infty, -2) \cup [0, 1] \cup (3, +\infty)$

c) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

d) Dom $y = \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}, -2\right) \cup \left(2, \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

51. Página 202

a) Dom $y = (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Dom $y = [3, 4) \cup (4, 7)$

c) Dom $y = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

d) Dom $y = [-5, -1) \cup (-1, 2]$

52. Página 202

a) $f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3 \rightarrow$ No es simétrica.

d) $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2 - 9} = \dfrac{-3x}{x^2 - 9} = -\dfrac{3x}{x^2 - 9} = -f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

e) $f(-x) = \dfrac{\ln|-x|}{-x + 4} = \dfrac{\ln|x|}{-x + 4} \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(-x) = \left(2(-x)^2 - 1\right)^2 = \left(2x^2 - 1\right)^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

53. Página 202

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje Y.

$f(-x) = \dfrac{-x-1}{(-x)^2} = \dfrac{-x-1}{x^2} \rightarrow$ No es simétrica.

b) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{e^{-x}} = x^2\, e^x \rightarrow$ No es simétrica.

c) $25 - x^2 \geq 0 \rightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow \text{Dom}\, y = [-5, 5]$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$f(-x) = \sqrt{25 - (-x)^2} = \sqrt{25 - x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

d) $4-x^2\geq 0\rightarrow (2-x)(2+x)\geq 0\rightarrow x\in[-2,2]\rightarrow \text{Dom } y=[-2,2]$

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0\rightarrow \sqrt{4-x^2}=0\rightarrow x=\pm 2\rightarrow (-2,0),(2,0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=2\rightarrow (0,2)$

$f(-x)=\sqrt{4-(-x)^2}=\sqrt{4-x^2}=f(x)\rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

e) $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0\rightarrow 7-2x^2=0\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\rightarrow\left(-\sqrt{\frac{7}{2}},0\right),\left(\sqrt{\frac{7}{2}},0\right)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=7\rightarrow (0,7)$

$f(-x)=7-2(-x)^2=7-2x^2=f(x)\rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

f) $x^2-2x+7\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow \text{Dom } y=\mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0\rightarrow \sqrt{x^2-2x+7}\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow$ No tiene.

Punto de corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=\sqrt{7}\rightarrow\left(0,\sqrt{7}\right)$

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-2(-x)+7}=\sqrt{x^2+2x+7}\rightarrow$ No es simétrica.

54. Página 202

a) $f(x+2k\pi)=2sen(x+2k\pi)=2[sen\ x\ cos\ 2k\pi-cos\ x\ sen\ 2k\pi]=2[sen\ x\cdot 1-cos\ x\cdot 0]=2\ sen\ x=f(x)$

La función es periódica de periodo 2π.

b) $f(x+k\pi)=sen(2x+2k\pi)=sen\ 2x\ cos\ 2k\pi-cos\ 2x\ sen\ 2k\pi=sen\ 2x\cdot 1-cos\ 2x\cdot 0=sen\ 2x=f(x)$.

La función es periódica de periodo π.

c) $f(x+6k\pi)=3sen\left(\frac{x}{3}+2k\pi\right)=3\left[sen\frac{x}{3}cos\ 2k\pi-cos\frac{x}{3}sen\ 2k\pi\right]=3\left[sen\frac{x}{3}\cdot 1-cos\frac{x}{3}\cdot 0\right]=3\ sen\frac{x}{3}=f(x)$

La función es periódica de periodo 6π.

d) $f(x+k\pi)=2tg(x+k\pi)=2\ tg(x+k\pi)=2\frac{tg\ x+tg\ k\pi}{1-tg\ x\cdot tg\ k\pi}=2\frac{tg\ x+0}{1-tg\ x\cdot 0}=2\ tg\ x=f(x)$

La función es periódica de periodo π.

e) $f\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=tg\left[2\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right]=tg(2x+k\pi)=\frac{tg\ 2x+tg\ k\pi}{1-tg\ 2x\cdot tg\ k\pi}=\frac{tg\ 2x+0}{1-tg\ 2x\cdot 0}=tg\ 2x=f(x)$

La función es periódica de periodo $\frac{\pi}{2}$.

f) $f(x+3k\pi)=3\ tg\left(\frac{x}{3}+k\pi\right)=3\frac{tg\frac{x}{3}+tg\ k\pi}{1-tg\frac{x}{3}\cdot tg\ k\pi}=3\frac{tg\frac{x}{3}+0}{1-tg\frac{x}{3}\cdot 0}=3\ tg\frac{x}{3}=f(x)$

La función es periódica de periodo 3π.

55. Página 202

a) $f\left(x+\frac{2k\pi}{3}\right)=cos(3x+2k\pi)=cos\,3x\,cos\,2k\pi-sen\,3x\,sen\,2k\pi=cos\,3x\cdot 1-sen\,3x\cdot 0=cos\,3x=f(x)$

La función es periódica de periodo $\frac{2\pi}{3}$.

b) $f(x+k\pi)=sen^2(x+k\pi)=\frac{1-cos(2x+2k\pi)}{2}=\frac{1-(cos\,2x\,cos\,2k\pi-sen\,2x\,sen\,2k\pi)}{2}=$

$=\frac{1-(cos\,2x\cdot 1-sen\,2x\cdot 0)}{2}=\frac{1-cos\,2x}{2}=sen^2x=f(x)$

La función es periódica de periodo π.

c) $f(x+2k\pi)=3\,cos(x+2k\pi)=3(cos\,x\,cos\,2k\pi-sen\,x\,sen\,2k\pi)=3()cos\,x\cdot 1-sen\,x\cdot 0=3\,cos\,x=f(x)$

La función es periódica de periodo 2π.

d) $f(x+2k\pi)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)cos\,2k\pi-cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)sen\,2k\pi=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 1-cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 0=$

$=sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$

56. Página 202

a) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x+6\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x+6\right)=+\infty$

b) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2\right)=+\infty$

c) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^3-2x-1\right)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^3-2x-1\right)=+\infty$

d) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^4+3x^2-x-1\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^4+3x^2-x-1\right)=-\infty$

57. Página 202

a) Dom $y=\mathbb{R}\to$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

b) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \frac{5x}{x^2-9} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{5x}{x^2-9} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{5x}{x^2-9} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x}{x^2-9} = 0 \end{array}\right\} \to \text{ Asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

c) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{2x}{x+1} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 2.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \frac{4x^2}{x^2-9} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{4x^2}{x^2-9} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x^2}{x^2-9} = 4 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x^2}{x^2-9} = 4 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 4.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

e) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^2+7}{2x+4} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^2+7}{2x+4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2+7}{2x+4} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2+7}{2x^2+4x} = \frac{3}{2} \to m = \frac{3}{2} \\ \lim\limits_{x\to \infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{3x^2+7}{2x+4} - \frac{3}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{-6x+7}{2x+4}\right) = -3 \to n = -3 \end{array}\right\} \to \text{Tiene una asíntota oblicua en } y = \frac{3x-6}{2}.$$

f) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x^4}{x^3 - x} = \infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = -\infty$

58. Página 203

a) $y = 1$

b) $x = -1 \qquad x = 1 \qquad y = 0$

c) $y = 0$

d) $x = -1 \qquad y = \frac{x - 1}{2}$

e) $y = -x \qquad y = x$

59. Página 203

a) $\text{Dom}\, y = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

No tiene asíntotas verticales porque la función está definida en los extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x = -2 \end{array}\right\} \to \text{Tiene asíntota oblicua en } y = x - 2.$$

b) $\text{Dom}\, y = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

No tiene asíntotas verticales porque la función está definida en los extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} - x = 0 \end{array}\right\} \to \text{Tiene asíntota oblicua en } y = x.$$

c) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = 0 \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

d) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = 0 \to$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x\sqrt{x}} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2}{x\sqrt[3]{x}} = \infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

f) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = 0 \to$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x\sqrt[4]{|x|}} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

60. Página 203

a) $\text{Dom } y = (-3, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} (\log_3(3x + 9)) = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\log_3(3x + 9)) = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_3(3x + 9)}{x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

b) $\text{Dom}\, y = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\ln\left(x^2+2x\right)\right) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+2x\right)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

c) $\text{Dom}\, y = (-2, 4)$

$\lim\limits_{x\to -2+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \left(\log_2\left(\dfrac{2+x}{4-x}\right)\right) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(\log_2\left(\dfrac{2+x}{4-x}\right)\right) = +\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 4$.

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas porque la función no está definida cuando $x \longrightarrow -\infty$ ni cuando $x \longrightarrow +\infty$.

d) $\text{Dom}\, y = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

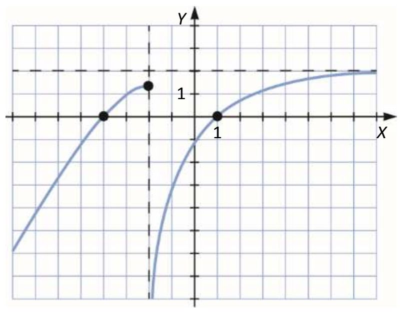
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x}{\log_2(x-1)}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{\log_2(x-1)}\right) = \infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log_2(x-1)}\right) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x \cdot \log_2(x-1)} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

61. Página 203

Repuesta abierta. Por ejemplo:



62. Página 203

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+3x-2}{bx+5}=3<\infty\to a=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{bx+5}=\dfrac{3}{b}=3\to b=1\end{array}\right\}\to f(x)=\dfrac{3x-2}{x+5}$$

$\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{-5\}$

$\lim\limits_{x\to-5} f(x)=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{3x-2}{x+5}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-5$.

63. Página 203

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+3x-2}{bx^2+5x}=\dfrac{a}{b}=m=1\to a=b\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax^2+3x-2-ax^2-5x}{ax+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x-2}{ax+5}\right)=\dfrac{-2}{a}=n=2\to a=b=-1\end{array}\right\}\to f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{-x+5}$$

$\lim\limits_{x\to5} f(x)=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-x^2+3x-2}{-x+5}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=5$.

64. Página 203

a) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{9-(-x)^2}=\dfrac{x^2}{9-x^2}=f(x)\to$ La función es simétrica respecto del eje Y.

b) $\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2}{9-x^2}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2}{9-x^2}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{9-x^2}=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{9-x^2}=-1\end{array}\right\}\to \text{ Asíntota horizontal en } y=-1.$$

65. Página 203

a) $f(-x)=\dfrac{-(-x)^3}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\dfrac{-x^3}{x^2-4}=-f(x)\to$ Simetría respecto del origen.

b) $\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3}{x^2-4}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3}{x^3-4x}=-1=m\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^3+x^3-4x}{x^2-4}\right)=0=n\end{array}\right\}\to \text{Tiene asíntota oblicua en } y=-x.$$

66. Página 203

a) $f(-x)=(-x)\cdot e^{-(-x)^2}=-x\cdot e^{-x^2}=-\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=-f(x)\rightarrow$ Simetría respecto del origen de coordenadas.

$\text{Dom} f=\mathbb{R}\rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{-x^2}\right)=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Tiene asíntota horizontal en } y=0.$$

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene asíntotas horizontales.

b) $f(-x)=\frac{1}{2}\ln|-x|=\frac{1}{2}\ln|x|=f(x)\rightarrow$ Simetría respecto del eje Y.

$\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\ln|x|=-\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln|x|}{x}=0\rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

67. Página 203

a) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$

$$y'=3x^2+12x-15=0\rightarrow\begin{cases}x=-5\\ x=1\end{cases}$$

En $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$, $y'>0\rightarrow$ Función creciente.

En $(-5, 1)$, $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

En $x=-5$ presenta un máximo, y en $x=1$, un mínimo.

b) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}-\{0\}$

$$y'=\frac{4x^2-1}{x^2}=0\rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

En $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, $y'>0\rightarrow$ Función creciente.

En $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $y'<0\rightarrow$ Función decreciente.

En $x=-\frac{1}{2}$ presenta un máximo, y en $x=\frac{1}{2}$, un mínimo.

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{3\}$

$y' = \frac{-2}{(x-3)^3} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

En $(-\infty, 3)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $(3, +\infty)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 72x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases}$

En $(18, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $(-\infty, 0) \cup (0, 18)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $x = 18$ presenta un mínimo.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = \frac{3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3}{2} = 0 \rightarrow 3^x - \frac{1}{3^x} = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 1 = 0 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $(0, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

f) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{3x^4 - 2}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

En $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $\left(-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $x = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ presenta un máximo, y en $x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, un mínimo.

68. Página 203

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \geq 0 \rightarrow \text{Dom } y = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$y' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 \rightarrow x = 1$, que no está en el dominio.

En $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $(2, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

b) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$y' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 2\ln x = 1 \rightarrow x = \sqrt{e}$

En $(0, \sqrt{e})$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $(\sqrt{e}, +\infty)$ $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

c) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{4\}$

$y' = \dfrac{-8}{(x-4)^2} < 0 \rightarrow$ La función es decreciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} = 0 \rightarrow x(2 - x\ln 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{\ln 3} \end{cases}$$

En $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{\ln 3}, +\infty\right)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $\left(0, \dfrac{2}{\ln 3}\right)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = \dfrac{2}{\ln 3}$ un máximo.

69. Página 204

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{-2x^2 + 4}{e^x} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

b) $x = -\sqrt{2} \rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{-4\sqrt{2} + 4}{e^{-\sqrt{2}}} \rightarrow \left(-\sqrt{2}, \dfrac{-4\sqrt{2} + 4}{e^{-\sqrt{2}}}\right)$ es un mínimo.

$x = \sqrt{2} \rightarrow f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2} + 4}{e^{\sqrt{2}}} \rightarrow \left(\sqrt{2}, \dfrac{4\sqrt{2} + 4}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ es un máximo.

70. Página 204

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \rightarrow$ Es simétrica respecto del eje Y.

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 1.$$

$|x| > 1 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 1} - 1 > 0 \rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

Como tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$, no tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

e) $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=0\rightarrow x=0$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

f) $x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$ es máximo.

No presenta mínimos.

71. Página 204

a) $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{0\}$

b) Cortes con el eje X: $f(x)=0\rightarrow\dfrac{x+1}{x^2}=0\rightarrow x=-1\rightarrow(-1,0)$

Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x=0$.

c) $f(-x)=\dfrac{(-x)+1}{(-x)^2}=\dfrac{-x+1}{x^2}\rightarrow$ No es simétrica par ni impar.

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}=\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

Tiene asíntota horizontal cuando $x\rightarrow+\infty$ y cuando $x\rightarrow-\infty$. Por tanto, no tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

e) $f'(x)=\dfrac{-x-2}{x^3}=0\rightarrow x=-2$

En $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $f'(x)<0\rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(-2,0)$, $f'(x)>0\rightarrow f(x)$ es creciente.

f) $x=-2\rightarrow f(-2)=\dfrac{-1}{4}\rightarrow\left(-2,\dfrac{-1}{4}\right)$ es un mínimo.

No presenta máximos.

72. Página 204

a) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+2$

$y''=6x-6=0\rightarrow x=1$

En $(-\infty,1)$, $y''<0\rightarrow$ Función convexa.

En $(1,+\infty)$, $y''>0\rightarrow$ Función cóncava.

En $x=1$ presenta un punto de inflexión.

b) $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}-\{-2\}$

$y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}$

$y''=\dfrac{-8}{(x+2)^3}\neq 0$ en $\mathbb{R}\rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty,-2)$, $y''>0\rightarrow$ Función cóncava.

En $(-2,+\infty)$ $y''<0\rightarrow$ Función convexa.

c) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 16x$ $\qquad$ $y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

En $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ presenta puntos de inflexión.

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y' = \frac{-4x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$ $\qquad$ $y'' = \frac{12x^2 + 4x}{\left(x^2 - 1\right)^3} \neq 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(1, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

73. Página 204

a) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$y' = e^x\left(2x + x^2\right)$ $\qquad$ $y'' = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $\left(-\infty, -2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{2}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $\left(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.

b) $\text{Dom}\, y = (0, +\infty) - \{1\}$

$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ $\qquad$ $y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

En $(0, 1) \cup \left(e^2, +\infty\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(1, e^2\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.

c) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$y' = 1 - \cos x$ $\qquad$ $y'' = \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

En $(2k'\pi, 2k'\pi + \pi)$ con $k' \in \mathbb{Z}$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $((2k' - 1)\pi, 2k'\pi)$ con $k' \in \mathbb{Z}$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ presenta puntos de inflexión.

d) $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

$y'' = \frac{-16}{\left(x^2 - 16\right)\sqrt{x^2 - 16}} < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

74. Página 204

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$f(x) = 3x^2 - 18x + 18 = 0 \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

En $\left(-\infty, 3-\sqrt{3}\right) \cup \left(3+\sqrt{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

En $(-\infty, 3)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(3, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$x = 3 \rightarrow f(3) = 0 \rightarrow (3, 0)$ es punto de inflexión.

$\left.\begin{array}{l} f'(3) = -9 \rightarrow m = -9 \\ y = -9x + n \rightarrow 0 = -9 \cdot 3 + n \rightarrow n = 27 \end{array}\right\} \rightarrow y = -9x + 27$ es la recta tangente a $f(x)$ que pasa por el punto (3, 0).

75. Página 204

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{ax} + xa\, e^{ax} = e^{ax}(1 + ax) = 0 \rightarrow 1 + ax = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{a} = -2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

En $(-\infty, -2)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(-2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

$f''(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{x}{4}\right) = 0 \rightarrow x = -4$

En $(-\infty, -4)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-4, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$f''(-2) > 0 \rightarrow \left(-2, \frac{-2}{e}\right)$ es un mínimo.

76. Página 204

$\text{Dom}\, f = (0, +\infty)$

$f'(x) = 1 + \frac{a}{x} = 0 \rightarrow x = -a = 3 \rightarrow a = -3 \rightarrow f(x) = x - 3\ln x$

En $(-\infty, 3)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(3, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

$f''(x) = \frac{3}{x^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

$f''(3) > 0 \rightarrow \left(3, 3(1 - \ln 3)\right)$ es un mínimo.

77. Página 204

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2x + a = 0 \rightarrow f'(2) = 8 + a = 0 \rightarrow a = -8 \\ f(2) = b - 12 = 0 \rightarrow b = 12 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -\frac{4}{3}$$

En $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$$f''(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

En $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$f''(2) = 10 > 0 \rightarrow (2, 0)$ es un mínimo.

78. Página 204

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a = 0 \rightarrow x = \frac{-a}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow a = -4 \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \rightarrow b = -3 - 2a = 5 \\ f(1) = 1 - 4 + 5 + c = 2 + c = 0 \rightarrow c = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = \frac{5}{3}$$

En $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(1, \frac{5}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

En $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

79. Página 204

a) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow (4, 0), (-2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = -8 \rightarrow (0, -8)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2x - 8) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x - 8) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$

  En el intervalo $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

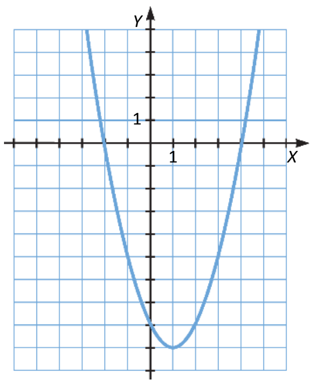
  En el intervalo $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 1$ es un mínimo:

  $f(1) = -9 \rightarrow (1, -9)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 2 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x^2 = x^2(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=0 \to 3x^2-2x=x(3x-2)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

En $(-\infty,\ 0)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x=\dfrac{2}{3}$ y crece a la derecha $\to$ $x=\dfrac{2}{3}$ es un mínimo:

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{27} \to \left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{27}\right)$ es un mínimo.

La función crece a la izquierda de $x = 0$ y decrece a la derecha $\to x = 0$ es un máximo:

$f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un máximo.

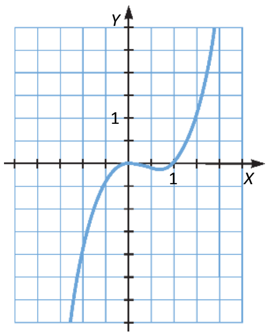
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=6x-2=0 \to x=\frac{1}{3}$$

En el intervalo $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{27} \to \left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{27}\right)$ punto de inflexión.



c) - $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \to 2x^3=0 \to x=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$f(0)=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

  En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente $\rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

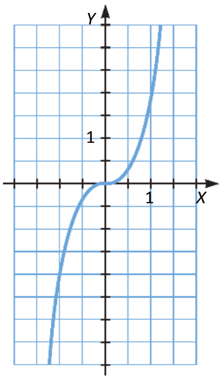
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 12x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ punto de inflexión.



d) • $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x+1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (2, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 2) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 - x + 2) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

  En $\left(-\infty, \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ y decrece a la derecha $\rightarrow$ $x = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ es un mínimo.

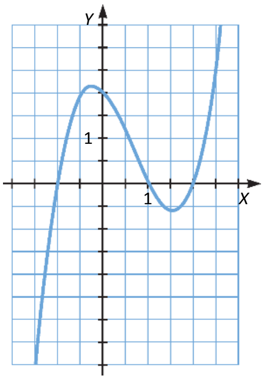
- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 6x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

En el intervalo $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

$x = \frac{2}{3}$ punto de inflexión.



e) - $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{2} = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente $\rightarrow f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos.

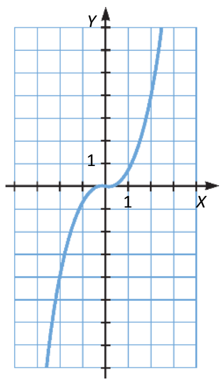
- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 3x = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.



f) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (1, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2} \right) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2} \right) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = x - \dfrac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

En el intervalo $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty \right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

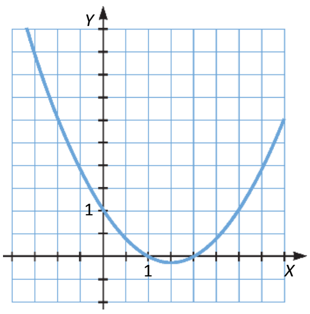
En el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{3}{2} \right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = \dfrac{3}{2}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \dfrac{3}{2}$ es un mínimo:

$f\left(\dfrac{3}{2} \right) = -\dfrac{1}{8} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{8} \right)$ es un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



g) • $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + \dfrac{9}{4} = 0 \rightarrow x = \pm \dfrac{3}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 0 \right), \left(\dfrac{3}{2}, 0 \right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = \dfrac{9}{4} \rightarrow \left(0, \dfrac{9}{4} \right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 + \dfrac{9}{4} \right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2 + \dfrac{9}{4} \right) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = -2x = 0 \to x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

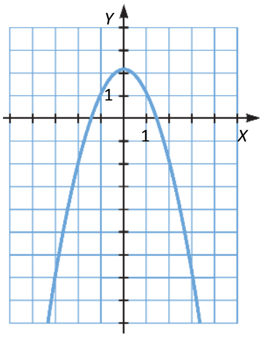
  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = 0$ y decrece a la derecha $\to$ $x = 0$ es un máximo:

  $f(0) = \frac{9}{4} \to \left(0, \frac{9}{4}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = -2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



80. Página 204

a) - $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \to x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \to \begin{cases} x = 4 \\ x = \pm 1 \end{cases} \to (4, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \to y = 4 \to (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \to 3x^2 - 8x - 1 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$

  En $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

  En el intervalo $\left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}, \frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = \frac{4-\sqrt{19}}{3}$ y decrece a la derecha $\to$ $x = \frac{4+\sqrt{19}}{3}$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = \frac{4+\sqrt{19}}{3}$ y crece a la derecha $\to$ $x = \frac{4+\sqrt{19}}{3}$ es un mínimo.

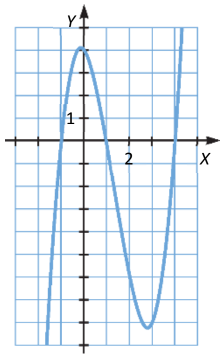
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

  En el intervalo $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

  En el intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

  $x = \frac{4}{3}$ es punto de inflexión.



b) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  No se pueden encontrar por Ruffini los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 12x + 4\right) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 12x + 4\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y' = 3(x - 2)^2 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función siempre creciente.

  No presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

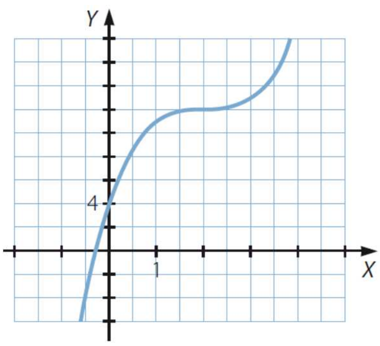
  $y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

  En el intervalo (2, +∞), $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

  En el intervalo (–∞; 2), $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

  En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.

Por último, como en (–∞, 2) la función es creciente, la imagen de 0 es positiva y $\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 12x + 4\right) = -\infty$, hay un punto de corte en (–∞, 0).



c) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow x^3 + 3x = x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

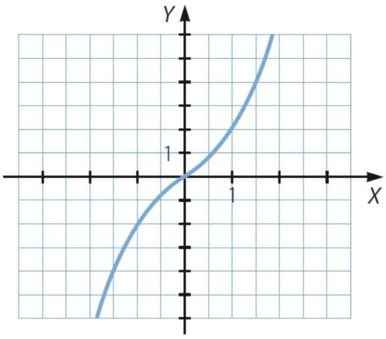
• Concavidad y convexidad:

$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Es cóncava.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Es convexa.

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



d) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{7} \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (-\sqrt{7}, 0), (\sqrt{7}, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 7 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 7)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

En $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En $x = -2$ y en $x = 2$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

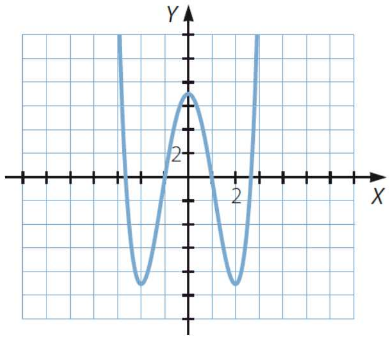
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

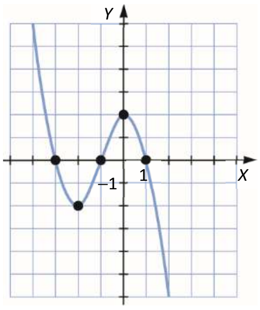
En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

En $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ presenta puntos de inflexión.



81. Página 204



Como es una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ En el intervalo $(-\infty, -2)$ es decreciente.

Como corta al eje *X* en (−3, 0) y en (−1, 0) → En el intervalo $(-2, 0)$ es creciente.

Como vuelve a cortar al eje *X* en (1, 0) y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ → En el intervalo $(0, -\infty)$ es decreciente.

Por tanto, en el punto (−2, −2) tienen un mínimo, y en el punto (0, 2) tiene un máximo.

Además, en algún punto del intervalo $(-2, 0)$ debe tener un punto de inflexión donde pase de cóncava a convexa.

82. Página 205

a) $f'(x) = 3x^2 + a = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-a}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow a = -4$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

La función es positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

c) $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

d) En $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ tiene un máximo. En $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ tiene un mínimo.

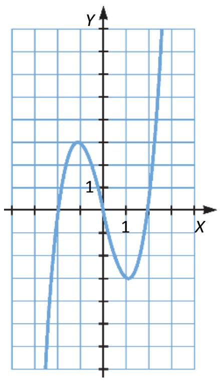
e) $f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.

f)



El recorrido de la función es todo $\mathbb{R}$.

83. Página 205

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $f''(x) = 6x + 2a$

Tiene un extremo relativo en $x = 2$ $\rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0$ $\rightarrow f''(0) = 0 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow b = -12$

Pasa por el punto (1, –5) $\rightarrow f(1) = 1 + a + b + c = -5 \rightarrow 1 - 12 + c = -5 \rightarrow c = 6$

Por tanto, la función es: $f(x) = x^3 - 12x + 6$

Para obtener su representación gráfica, analizamos sus características:

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$
- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 6 = 0 \rightarrow$ Las soluciones de esta ecuación dan son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$ es el punto de corte con el eje *Y*.
- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=0 \rightarrow 3x^2-12=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

  En el intervalo $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(-2, 2)$, $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un máximo y en $x=2$ un mínimo.

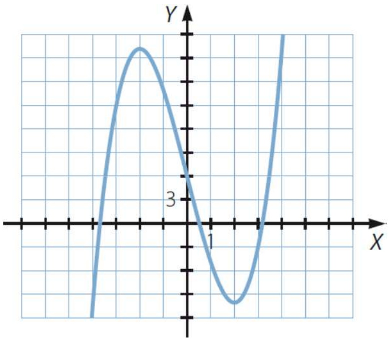
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=6x=0 \rightarrow x=0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es convexa.

  En $x=0$ presenta un punto de inflexión.



84. Página 205

a) $x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

b) $f(x)=0 \rightarrow \dfrac{3x^2}{x^2-1}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0 \longrightarrow f(0)=0 \longrightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

c) La función es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en el intervalo $(-1,1)$.

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=3\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{x^2-1}=3\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=3.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

e) $f'(x)=\dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}=0 \rightarrow x=0$

En $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

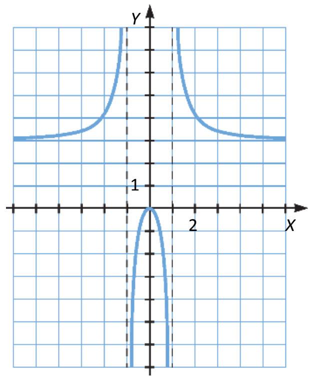
En $(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

f) En $x = 0$ presenta un máximo.

g) $f''(x) = \dfrac{6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $f''(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es cóncava.

En $(-1,1)$, $f''(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es convexa.



85. Página 205

a) $x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) $f(x)=0 \rightarrow \dfrac{-x^2}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \longrightarrow f(0) = 0 \longrightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

c) La función es positiva en el intervalo $(-\infty, -1)$ y negativa en el intervalo $(-1, +\infty)$.

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x^2}{x+1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x^2}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2}{x+1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2}{x^2+x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{-x^2}{x+1} + x\right) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 1 \rightarrow n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = -x+1.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

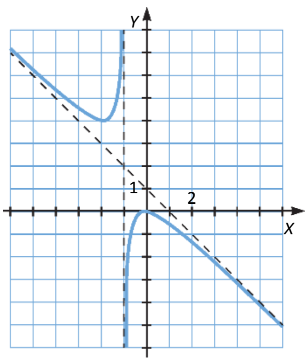
e) $f'(x) = \dfrac{-x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

En $(-2,-1)\cup(-1,0)$, $f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -2$ la función tiene un mínimo y en $x = 0$ un máximo.

f)



86. Página 205

a) $x^2-4=0\rightarrow x=\pm 2\rightarrow \text{Dom} f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$f(x)=0\rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-4}=0\rightarrow x=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^3-4x}=1\rightarrow m=1\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{x^2-4}\right)=0\rightarrow n=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y=x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x\rightarrow +\infty$ y cuando $x\rightarrow -\infty$.

c) $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=0\rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=\pm 2\sqrt{3}\end{cases}$

En $(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3},+\infty)$, $f'(x)>0\rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-2\sqrt{3},-2)\cup(-2,2)\cup(2,2\sqrt{3})$, $f'(x)<0\rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x=-2\sqrt{3}$ la función tiene un máximo y en $x=2\sqrt{3}$ un mínimo.

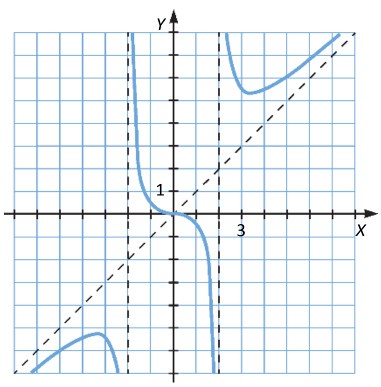
d) $f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=0\rightarrow x=0$

En $(-\infty,-2)\cup(0,2)$, $f''(x)<0\rightarrow f(x)$ es convexa.

En $(-2,0)\cup(2,+\infty)$, $f''(x)>0\rightarrow f(x)$ es cóncava.

En $x=0$ presenta un punto de inflexión.

e)



87. Página 205

a) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida en $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-1}{x} \right) = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota oblicua en $y = x$.

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

• Crecimiento y decrecimiento:

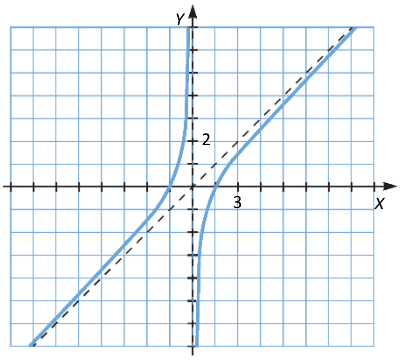
$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

• Concavidad y convexidad:

$y'' = -\dfrac{2}{x^3} \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.



b) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\infty \to$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\infty \to$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-1}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-1}=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota horizontal en } y=0.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x\to +\infty$ y cuando $x\to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y'=\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

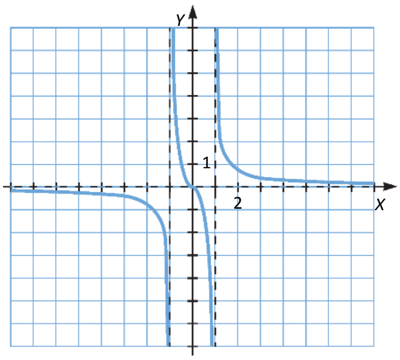
- Concavidad y convexidad:

$y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0\to x=0$

En $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, $y''<0\to$ La función es convexa.

En $(-1,0)\cup(1,+\infty)$, $y''>0\to$ La función es cóncava.

En $x=0$ tiene un punto de inflexión.



c) - $\text{Dom } y=\mathbb{R}-\{0\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0\to\frac{4-x^2}{x}=0\to x=\pm 2\to(-2,0),(2,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x=0\to y=0\to(0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4-x^2}{x}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4-x^2}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4-x^2}{x}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^2}{x^2}=-1\to m=-1\\ \lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right)=0\to n=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=-x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

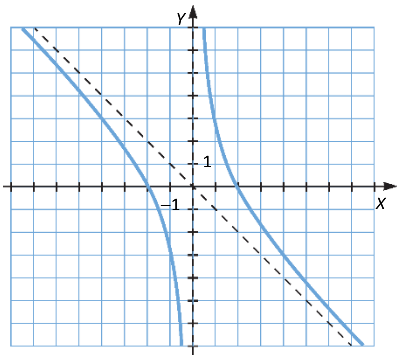
$y'=\dfrac{-(x^2+4)}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\to$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$y''=\dfrac{8}{x^3}\neq 0\to$ No tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y''<0\to$ La función es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y''>0\to$ La función es cóncava.



d) - $\text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-1, 1\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\to\dfrac{x^3}{x^2-1}=0\to x=0\to(0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\to y=0\to(0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty\to$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1\to m=1\\ \lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=0\to n=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -\sqrt{3}$ la función tiene un máximo y en $x = \sqrt{3}$ un mínimo.

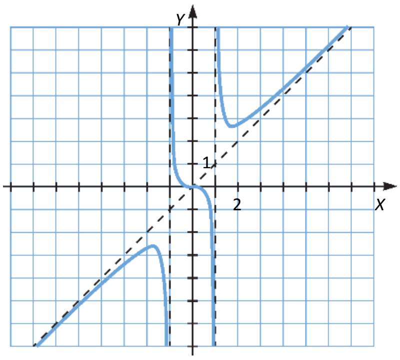
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.

En $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.



88. Página 205

a) • $1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \frac{x^2-4}{1-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-4}{1-x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-4}{1-x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-4}{1-x^2} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{1-x^2} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = -1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \quad 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

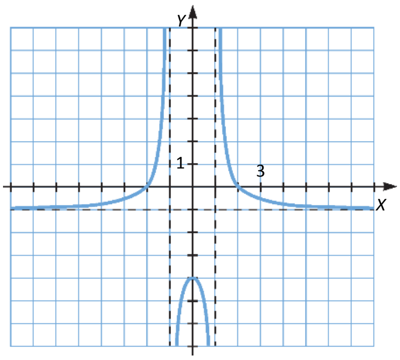
En $x = 0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{6\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3} \neq 0 \rightarrow \text{ No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo (–1, 1), $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.



b) • $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -\dfrac{1}{4} \rightarrow \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = -1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$y' = \frac{6x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

  En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En $(0, 2) \cup (2, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

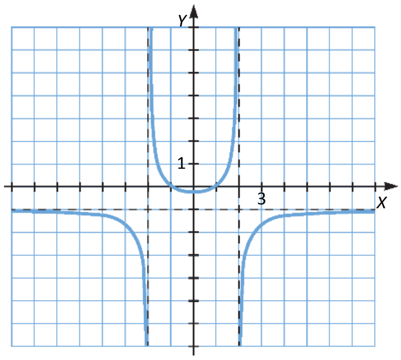
  En $x = 0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $$y'' = \frac{-6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \rightarrow \text{ No hay puntos de inflexión.}$$

  En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En el intervalo (–2, 2), $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) • $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

  $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 1.$$

  No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$y' = \frac{6x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

  En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

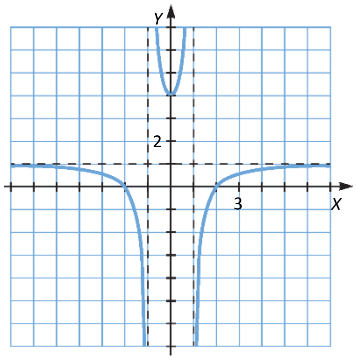
  En $x = 0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-1, 1)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



d) •

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \frac{1-x^2}{4-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{4} \rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -2} \frac{1-x^2}{4-x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim_{x \to 2} \frac{1-x^2}{4-x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^2}{4-x^2} = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{4-x^2} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-6x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(0, 2) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

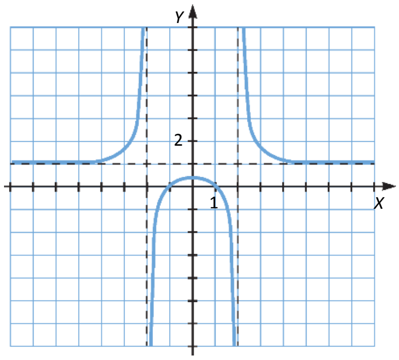
En $x = 0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{6\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}\neq 0\rightarrow \text{No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $y''>0\longrightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-2,2)$, $y''<0\longrightarrow$ Función convexa.



89. Página 205

a) • $\text{Dom } y=\mathbb{R}-\{-2\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0\rightarrow\frac{x}{x+2}=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x}{x+2}=\infty\rightarrow$ Asíntota vertical en $x=-2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+2}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}=1\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x\longrightarrow+\infty$ y cuando $x\longrightarrow-\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

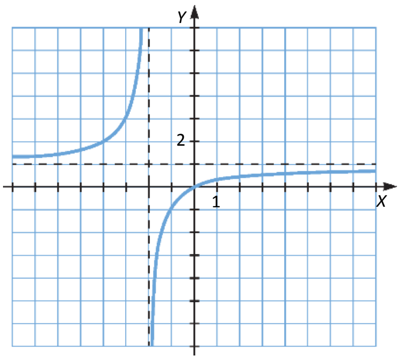
$y'=\frac{2}{(x+2)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$y''=\frac{-4}{(x+2)^3}\neq 0\rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty,-2)$, $y''>0\longrightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-2,+\infty)$, $y''<0\longrightarrow$ Función convexa.



b) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2\}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x+2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x+2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+2x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-2x}{x+2}\right) = -2 \rightarrow n = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x - 2.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

En $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(-4, -2) \cup (-2, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

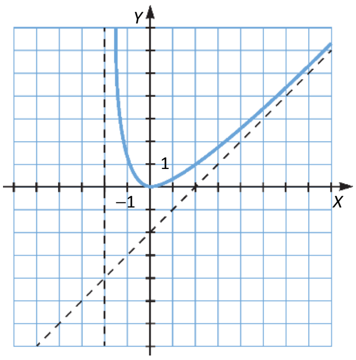
En $x = -4$, la función tiene un máximo, y en $x = 0$, un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{8}{(x+2)^3} \neq 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2\}$

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^3}{x+2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3}{x+2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 2x} = \infty \rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

Tiene dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, -3)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = -3$, la función tiene un mínimo.

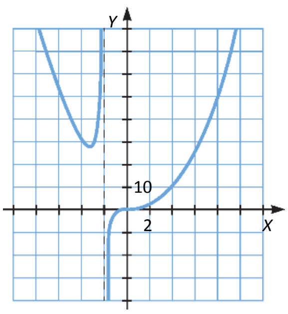
• Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2x\left(x^2 + 6x + 12\right)}{(x+2)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo (–2, 0), $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión.



d) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \frac{x^3}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x+2)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x+2)^2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x+2)^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-4x^2 - 4x}{(x+2)^2} = -4 \rightarrow n = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x - 4.$$

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas oblicuas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

En $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En el intervalo $(-6, -2)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = -6$ la función tiene un máximo.

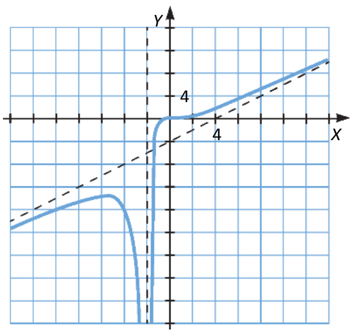
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{24x}{(x+2)^4} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión.



90. Página 205

a) • $x^2 = 0 \to x = 0 \to \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \to \frac{x-1}{x^2} = 0 \to x = 1 \to (1, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

  No tiene punto de corte con el eje Y porque no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} = \infty \to$ Asíntota vertical en $x = 0$.

  $\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^2} = 0 \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

  No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \frac{-x+2}{x^3} = 0 \to x = 2$

  En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

  En $x = 2$ presenta un máximo.

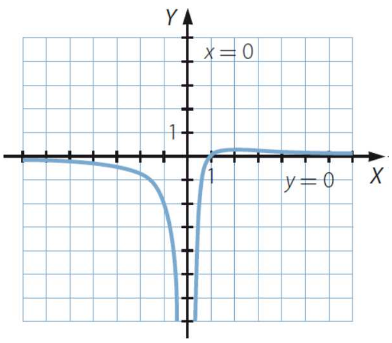
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \frac{2x-6}{x^4} = 0 \to x = 3$

  En $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

  En el intervalo $(3, +\infty)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.

  En $x = 3$ presenta un punto de inflexión.



b) • $x - 3 = 0 \to x = 3 \to \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{3\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \to \frac{x-2}{x-3} = 0 \to x = 2 \to (2, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $x = 0 \to y = \frac{2}{3} \to \left(0, \frac{2}{3}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-3}=\infty \rightarrow$$ Asíntota vertical en $x=3$.

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x-2}{x-3}=1\rightarrow$$ Asíntota horizontal en $y=1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

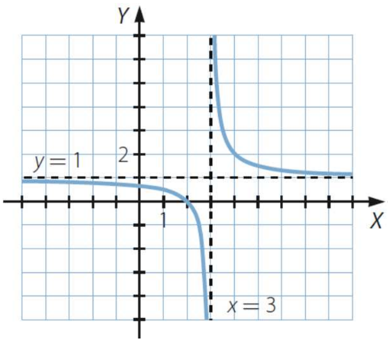
$$y'=\frac{-1}{(x-3)^2}<0\rightarrow$$ La función es decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2}{(x-3)^3}\neq 0\rightarrow$$ No presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 3)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(3, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) - $x+1=0\rightarrow x=-1\rightarrow \text{Dom}\, y=\mathbb{R}-\{-1\}$

- Cortes con los ejes:

$y=0\rightarrow \frac{x^2}{x+1}=0\rightarrow x=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\rightarrow y=0\rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{x+1}=\infty \rightarrow$$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{x^2+x}=1\rightarrow m=1\\ \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x}{x+1}=-1\rightarrow n=-1\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y=x-1.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

En $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

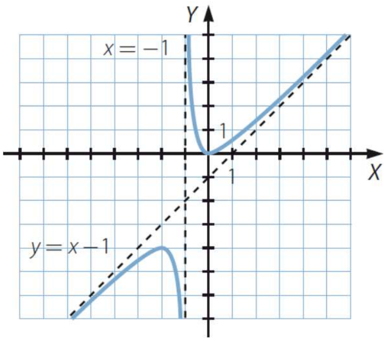
En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$ un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{ No presenta puntos de inflexión.}$$

En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(-1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



d) - $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow \text{ Asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-x^2+1}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(-1,1)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$ un mínimo.

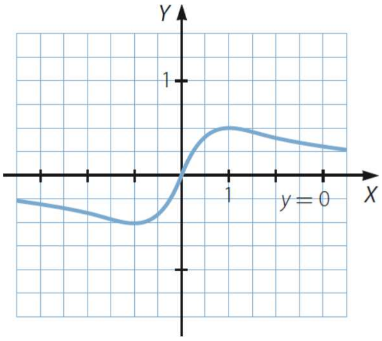
- Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=0\rightarrow x\left(2x^2-6\right)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

En $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$, $y''<0\rightarrow$ Función convexa.

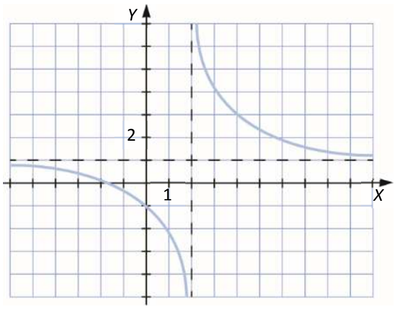
En $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, $y''>0\rightarrow$ Función cóncava.

En $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=\sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



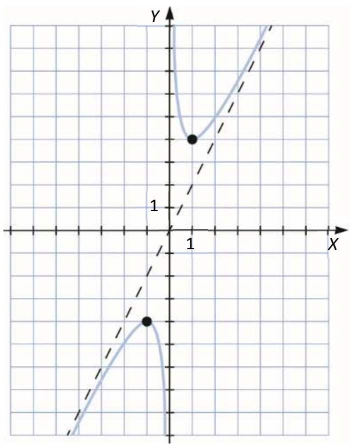
91. Página 205

Respuesta abierta. Por ejemplo:



92. Página 205

Respuesta abierta. Por ejemplo:



93. Página 206

a) • $2-x\geq 0 \to x\leq 2 \to \text{Dom}\, y=(-\infty, 2]$

- Cortes con los ejes:

  $y=0 \to \sqrt{2-x}=0 \to x=2 \to (2,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x=0 \to y=\sqrt{2} \to \left(0,\sqrt{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2-x}=+\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2-x}}{x}=0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

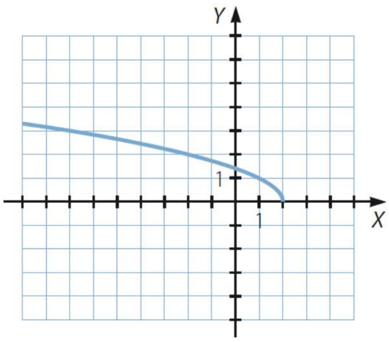
  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2-x}=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}<0 \to$ Función siempre decreciente.

- Concavidad y convexidad:

  $y''=\dfrac{-1}{2(2-x)\sqrt{2-x}}<0 \to$ Función siempre convexa.



b) • $1-\dfrac{x^2}{25}\geq 0 \to x\in[-5,5] \to \text{Dom}\, y=[-5,5]$

- Cortes con los ejes:

  $\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}=0 \to x^2-25=0 \to x=\pm 5 \to (-5,0), (5,0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x=0 \to y=2 \to (0,2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y'=\dfrac{-4x}{10\sqrt{25-x^2}}=0 \to x=0$

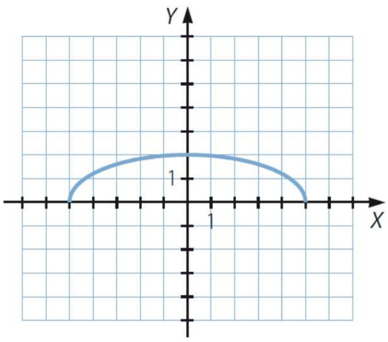
  En el intervalo (–5, 0), $y'>0 \to$ Función creciente.

  En el intervalo (0, 5), $y'<0 \to$ Función decreciente.

  En $x=0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-100}{10(25-x^2)\sqrt{25-x^2}} < 0 \to \text{ Función convexa.}$$



c) • $x^2-9 \geq 0 \to x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \to \text{Dom } y = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$\sqrt{x^2-9} = 0 \to x = \pm 3 \to (-3, 0), (3, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

No tiene punto de corte con el eje Y porque no está definida en $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-9} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-9} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{ No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} = 1 \to m = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-9} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to \text{ Asíntota oblicua } y = x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} = 1 \to m = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-9} + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to \text{ Asíntota oblicua } y = -x.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

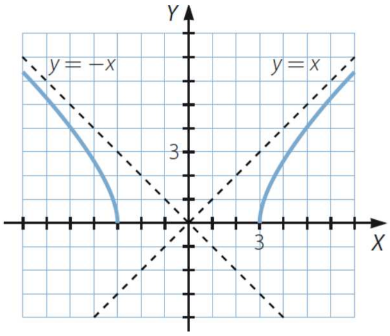
$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \to x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, -3)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(3, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{-9}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}} < 0 \rightarrow$$ Función siempre convexa.



d) • $x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow x \in [-3, +\infty) \rightarrow \text{Dom}\, y = [-3, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$-\sqrt{x+3} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3} \rightarrow (0, -\sqrt{3})$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x+3}\right) = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x+3}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

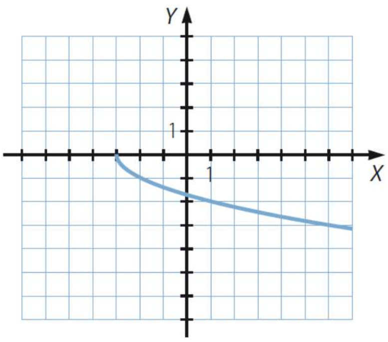
$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x+3}\right) = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x+3}} < 0 \rightarrow$ Función siempre decreciente.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \frac{-1}{4(x+3)\sqrt{x+3}} > 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.



94. Página 206

a) $x^2+3x\geq 0\rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)\rightarrow \text{Dom} f=(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$

Cortes con el eje *X*: $\sqrt{x^2+3x}-x=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$

Corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$

b) No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\dfrac{3}{2}\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=\dfrac{3}{2}$.

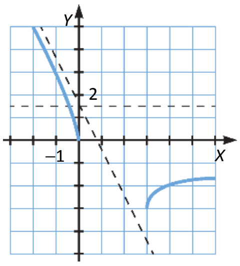
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow$ Tiene asíntota oblicua en $y=-2x+\dfrac{3}{2}$.

c) $f'(x)=\dfrac{2x+3-2\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}\neq 0\ \forall x\in\text{Dom f}\rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

En el intervalo $(-\infty,-3)$, $f'(x)<0\rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0,+\infty)$, $f'(x)>0\rightarrow$ Función creciente.

d)



95. Página 206

a) $x^2+3x\geq 0\rightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)\rightarrow \text{Dom} f=(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$

Cortes con el eje *X*: $\sqrt{x^2+3x}-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\rightarrow(0,0),(1,0)$

Corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow(0,0)$

b) No tiene asíntotas verticales.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-3x^2}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{3}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-3x^2}{x\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow$ Asíntota oblicua en $y=-x+\dfrac{3}{2}$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x}=-3\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow$ Asíntota oblicua en $y=-3x-\dfrac{3}{2}$.

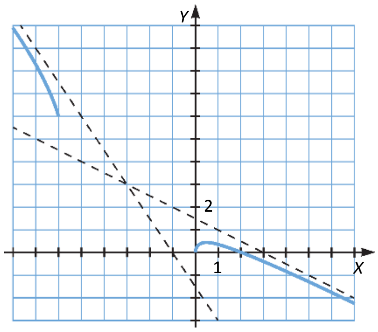
c) $f'(x)=\dfrac{2x+3-4\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}=0\rightarrow x=\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$

En $(-\infty,-3)\cup\left(\sqrt{3}-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, $f'(x)<0\rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $\left(0,\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\right)$, $f'(x)>0\rightarrow$ Función creciente.

En $x=\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$ $f(x)$ tiene un máximo.

d)



96. Página 206

a) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

b) Gráfica 3: $h(x)=\sqrt{x-1}$

97. Página 206

a) • $\text{Dom } y=\mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$-4e^x=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x=0\rightarrow y=0\rightarrow(0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4e^x\right)=+\infty\rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4e^x\right)=0\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4e^x}{x}=+\infty\rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

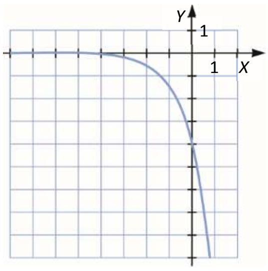
Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4e^x\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = -4e^x < 0 \rightarrow$ La función es siempre decreciente.

- Concavidad y convexidad:

  $y'' = -4e^x < 0 \rightarrow$ La función es siempre convexa.



b) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{e^x} + e^x \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje X.

  $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{1+1}{2} = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2x} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No hay asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene ramas parabólicas:

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty$$

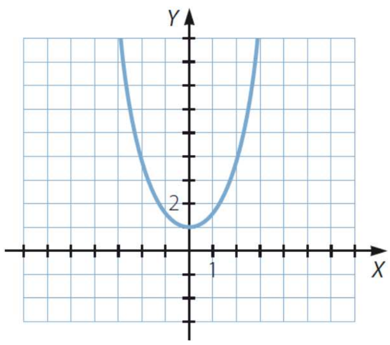
- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \dfrac{-e^{-x} + e^x}{2} = 0 \rightarrow e^{-x} = e^x \rightarrow -x = x \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $x = 0$ presenta un mínimo.



- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} > 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.

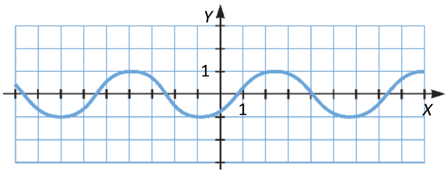
c) • $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \to x = k\pi + \frac{\pi}{4} \to \left\{\left(k\pi + \frac{\pi}{4}, 0\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \to y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Es la función $sen\ x$ trasladada $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha.



d) • $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$x^2 - sen^2 x = 0 \to x = sen\ x \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - sen^2 x) = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - sen^2 x}{x} \to \frac{\infty}{\infty} \to \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - sen^2 x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 2\, sen\ x \cos x}{1} = \infty \to$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - sen^2 x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - sen^2 x) = +\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = -2\, sen\ x \cos x + 2x = 0 \to x = 0$

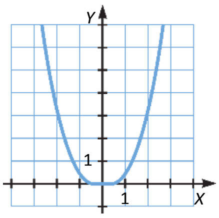
En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

• Concavidad y convexidad:

$y'' = 2\, sen^2 x - 2\cos^2 x + 2 \geq 0 \to$ Función siempre cóncava.



98. Página 206

a) • $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

• Cortes con los ejes:

$\log_2(x^2+1)=0 \to x^2+1=1 \to x=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x=0 \to y=0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(x^2+1)\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\log_2(x^2+1)\right)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_2(x^2+1)}{x}=0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(x^2+1)\right)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\log_2(x^2+1)\right)=+\infty$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y'=\frac{2x}{\ln 2(x^2+1)}=0 \to x=0$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

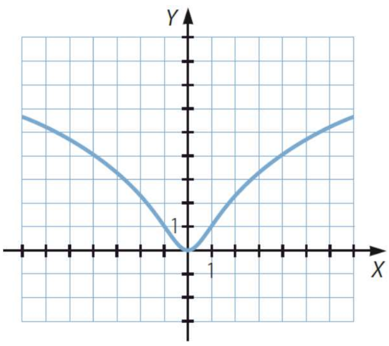
• Concavidad y convexidad:

$$y''=\frac{2-2x^2}{\ln 2(x^2+1)^2}=0 \to x=\pm 1$$

En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

En $(-1,1)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.

En $x=\pm 1$ presenta dos puntos de inflexión.



d) • $\text{Dom } y = (0,1) \cup (1, +\infty)$

• Cortes con los ejes:

$\frac{1}{\ln x} \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje *X*.

No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida para $x = 0$.

• Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

No tiene una ramas parabólicas.

• Crecimiento y decrecimiento:

$y' = -\frac{1}{x(\ln x)^2} < 0$ en todo el dominio. $\rightarrow$ Siempre es decreciente y no tiene máximos ni mínimos

• Concavidad y convexidad:

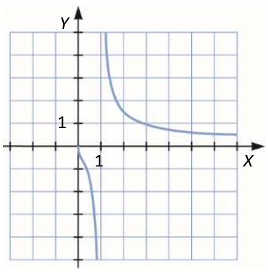
$y'' = \frac{\ln x + 2}{x^2(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = -2 \rightarrow x = e^{-2}$

En $(0, e^{-2})$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(e^{-2}, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = e^{-2}$ presenta un punto de inflexión.



99. Página 206

a) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

• Cortes con los ejes:

$e^{\frac{2}{x}} \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje *X*.

No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida en $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{2}{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{x}} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{2}{x}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{2}{x}} = 1\end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = -2\cdot\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} < 0 \to$ Función decreciente en todo su dominio.

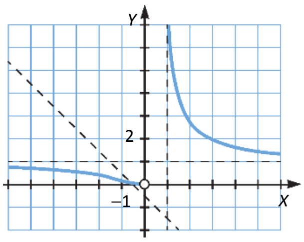
- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{4x e^{\frac{2}{x}} + 4e^{\frac{2}{x}}}{x^4} = 0 \to x = -1$

En $(-1, 0)\cup(0, +\infty)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.

En $(-\infty, -1)$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

En $x = -1$ presenta un punto de inflexión.



b) - $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$2x\cdot e^x = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No hay asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2x\cdot e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} 2x\cdot e^x = 0\end{array}\right\} \to \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

$\lim\limits_{x\to -\infty} 2e^x = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x\cdot e^x = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 2xe^x + 2e^x = 2e^x(x+1) = 0 \to x = -1$

En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(-1, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

En $x = -1$ presenta un mínimo.

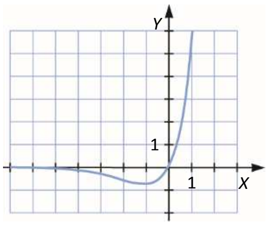
- Concavidad y convexidad:

  $y´=2xe^x+2e^x+2e^x=2e^x(x+2)=0 \rightarrow x=-2$

  En $(-\infty,-2)$, $y''<0 \longrightarrow$ Función convexa.

  En $(-2,+\infty)$, $y''>0 \longrightarrow$ Función cóncava.

  En $x=-2$ presenta un punto de inflexión.



100. Página 206

a) $f(0)=a\cdot 0-2^0=-1\rightarrow$ El punto (0, –1) pertenece a la gráfica de la función para todo valor del parámetro *a*.

b) $a<0\rightarrow f´(x)=a-2^x\ln 2<0\rightarrow$ La función es decreciente.

c) $f(2)=0\rightarrow 2a-2^2=2a-4=0\rightarrow a=2\rightarrow f(x)=2x-2^x$

$$f´(x)=2-2^x\ln 2=0\rightarrow 2^x=\frac{2}{\ln 2}\rightarrow x=\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$$

En $\left(-\infty,\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)\right)$, $y'>0\longrightarrow$ Función creciente. En $\left(\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right),+\infty\right)$, $y'<0\longrightarrow$ Función decreciente.

En $x=\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$ presenta un máximo.

101. Página 206

a) $f(\sqrt{2})=1\rightarrow a+\ln\left((\sqrt{2})^2-1\right)=a+\ln 1=a\rightarrow a=1\rightarrow f(x)=1+\ln\left(x^2-1\right)$

b) $x^2-1>0\rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\rightarrow$ $\text{Dom}\, f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right)=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=-1 \text{ y en } x=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right)=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{No hay asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln\left(x^2-1\right)}{x}=0\rightarrow \text{No hay asíntotas oblicuas.}$$

Hay dos ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}\left(1+\ln\left(x^2-1\right)\right)=+\infty$$

c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} = 0 \to x = 0 \notin \text{Dom } f$

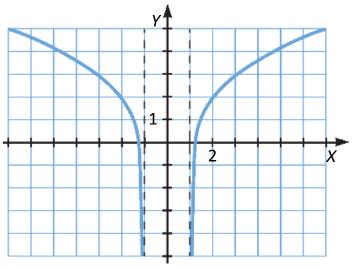
En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0 \to$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

d)



102. Página 206

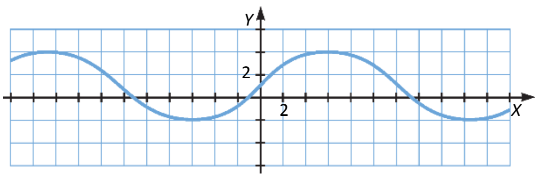
a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \to 1 + a \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \to a = 2\sqrt{2} \to f(x) = 1 + 2\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{x}{4}\right)$

b) Podemos obtener la gráfica de la función a partir de la función $sen\, x$.

$sen\left(\frac{x}{2}\right)$ es una dilatación en el eje X de la función $sen\, x$, que recorre los mismos valores, pero el «doble de lento», es decir, tendrá periodo 4π y está acotada entre –1 y 1.

$2\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$ es una dilatación en el eje Y de la gráfica anterior. Ahora estará acotada entre $-2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$.

Por último, la función $f(x) = 1 + 2\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$ es una traslación de una unidad hacia arriba de la gráfica anterior:



c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\text{Im } f = [-2, 4]$

103. Página 206

a) • $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

• Continuidad:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (4x + x^2) = 5 = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + 3) = f(1) \to$ Es continua en $x = 1$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

• Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \to 4x + x^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \to$ (0, 0) y (–4, 0) son los puntos de corte con el eje X.

$f(0) = 0 \to (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Las funciones de los dos trozos son polinómicas; por lo tanto, no tienen asíntotas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim_{x\to-\infty}\left(4x+x^2\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x)=\begin{cases}4+2x & \text{si} \quad x<1\\ 2 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}\to f'(x)=0\to x=-2$$

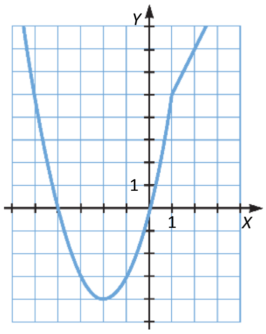
  En $(-2,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(-\infty, -2)$, $f'(x)<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un mínimo.

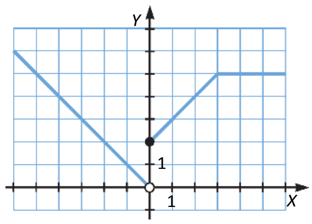
- Concavidad y convexidad:

  $$f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad x<1\\ 0 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}\to$$ La función es cóncava en el primer tramo.



b) $\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{3\}$

Las funciones de los distintos tramos de la función son lineales. Representamos las diferentes funciones en sus respectivos dominios:



c) - $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

  $\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\sqrt{2-x}=2=\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\left(6-x^2\right)=f(-2)\to$ La función es continua en $x=-2$ y, por lo tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0\to 6-x^2=0\to x=\pm\sqrt{6}\to\left(\sqrt{6},0\right)$ es el punto de corte con el eje X.

  $f(0)=0\to(0,6)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$ $\qquad\lim_{x\to+\infty}(6-x^2)=-\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si } x<-2\\ -2x & \text{si } -2<x\end{cases}\to f'(x)=0\to x=0$$

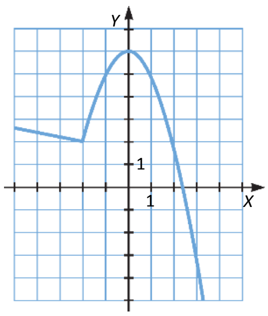
  En el intervalo (–2, 0), $f'(x)>0\to f(x)$ es creciente.

  En $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, $f'(x)<0\to f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{4\sqrt{2-x}(2-x)} & \text{si } x<-2\\ -2 & \text{si } -2<x\end{cases}\to f''(x)<0\to$$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



d) • $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

  Cada una de las tres funciones son continuas en sus respectivos dominios. Veamos si son continuas en $x=-1$ y en $x=2$:

  $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(x^2+3x)=-2=\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x^3-1)=f(-1)\to$ Es continua en $x=-1$.

  $\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^3-1)=7=\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\dfrac{7}{x-1}=f(2)\to$ Es continua en $x=2$.

  La función es continua en todo su dominio.

- Cortes con los ejes:

  $$f(x)=0\to\begin{cases}x^2+3x=x(x+3)=0\to x=-3\\ x^3-1=0\to x=1\end{cases}\to(-3,0),(1,0)$$ son los puntos de corte con el eje X.

  $f(0)=-1\to(0,-1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x-1}=0\to$ Asíntota horizontal en $y=0$.

  Tiene una rama parabólica: $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si } x<-1\\ 3x^2 & \text{si } -1<x<2\\ \dfrac{-7}{(x-1)^2} & \text{si } 2<x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2x+3=0\rightarrow x=-\dfrac{3}{2}\\ 3x^2=0\rightarrow x=0\end{cases}$$

En $\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,2)$ $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)<0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x=-\frac{3}{2}$ presenta un mínimo.

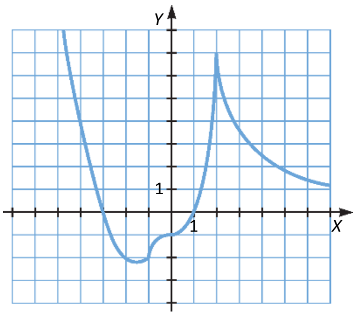
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<-1\\ 6x & \text{si } -1<x<2\\ \dfrac{14}{(x-1)^3} & \text{si } 2<x\end{cases} \rightarrow 6x=0\rightarrow x=0$$

En $(-\infty,-1)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(-1,0)$, $f''(x)<0 \rightarrow$ Función convexa

En $x=0$ y en $x=-1$ presenta puntos de inflexión.



e) - $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

Cada una de las dos funciones son continuas en sus respectivos dominios, veamos si son continuas en $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2-3\cos x)=-1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2^{-x+1}-3\right)=-1=f(0)\rightarrow$ La función es continua en su dominio.

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow 2-3\cos x=0\rightarrow x=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\rightarrow\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right),0\right)$ son los puntos de corte con el eje X.

$f(0)=-1\rightarrow(0,-1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

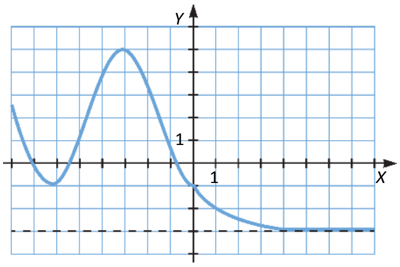
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{-x+1}-3\right)=-3\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=-3$.

Podemos representar la función $-3\cos x$ como una dilatación de la función $-\cos x$, y la función $2-3\cos x$, como una traslación de la anterior.

Si consideramos $g(x)=2^{-x+1}-3$:

$g'(x)=-2^{-x+1}\ln 2<0 \rightarrow$ **$g(x)$** es siempre decreciente.

$g''(x)=2^{-x+1}(\ln 2)^2>0 \rightarrow$ **$g(x)$** es siempre cóncava.



104. Página 206

a) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(ax+3)=3-a=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(bx^2+5\right)=b+5 \rightarrow b=-a-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(bx^2+5\right)=b+5=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2\sqrt{x+3}+a\right)=4+a \rightarrow b=a-1\end{array}\right\} \rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2}$$

Entonces:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+3 & \text{si} \quad x\le -1\\ -\dfrac{3}{2}x^2+5 & \text{si} \quad -1<x\le 1\\ 2\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$

b) La primera función es una recta con pendiente $m=-\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen $n=3$.

La segunda función es una parábola hacia abajo con vértice (0, 5).

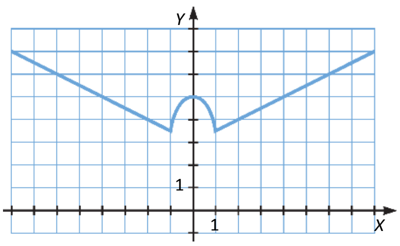
Si llamamos $g(x)=2\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}$:

$g(x)$ tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(2\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\right)=+\infty$$

$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}>0 \rightarrow$ **$g(x)$** es creciente y no tiene máximos ni mínimos.

$g''(x)=\dfrac{-1}{2(x+3)\sqrt{x+3}}<0 \rightarrow$ **$g(x)$** es convexa en su dominio.



105. Página 207

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+a-1\right) = 3+3a = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(\log_2(x-1)) = 0 \to a=-1 \to f(x) = \begin{cases} x^2-x-2 & \text{si} \quad x<2 \\ \log_2(x-1) & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

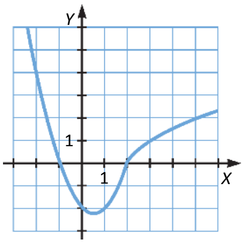
La función del primer tramo es una parábola hacia arriba con vértice en $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ que corta al eje X en los puntos (–1, 0) y (2, 0), y al eje Y, en el punto (0, –2).

Si llamamos $g(x)$ a la función del segundo tramo:

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}(\log_2(x-1)) = +\infty \to$ Rama parabólica.

$g'(x) = \frac{1}{(x-1)\ln 2} > 0 \ \forall x \in \text{Dom}\, g \to$ Función siempre creciente.

$g''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2 \ln 2} < 0 \to$ Función convexa en todo su dominio.



La imagen o recorrido de la función será el intervalo $\left(-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

106. Página 207

a) Las funciones de cada tramo son continuas y derivables en sus respectivos dominios. Estudiamos la continuidad en $x=0$:

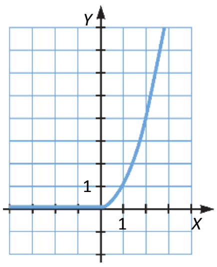
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(a\cdot \operatorname{sen} x + b) = b = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2-ax\right) = 0 \to b=0$$

Usamos la definición de derivada para estudiar la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{a\cdot\operatorname{sen} h-(a\operatorname{sen} 0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{a\cdot \operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{a\cdot\cos h}{1} = a \\ \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-ah-0}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h-a) = -a \end{array}\right\} \to a=-a \to a=0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$$

b)



107. Página 207

a) La función del primer tramo es una función irracional que no tiene asíntotas. Estudiamos las asíntotas oblicuas de la función del segundo tramo:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-mx}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x-m}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2mx}{x-m}\right)=2m\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=2x+2m\to 2m=6\to m=3\,.$$

b) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{2-x} & \text{si} \quad x\le 1\\ \dfrac{2x^2}{x-3} & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$

- $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{3\}$

- Continuidad:

  Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

  $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=0\ne\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x^2}{x-3}=-1\to$ No es continua en $x = 1$.

- Cortes con los ejes:

  $1-\sqrt{2-x}=0\to x=1\to(1,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0)=1-\sqrt{2}\to\left(0,1-\sqrt{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x^2}{x-3}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{Asíntota vertical en } x=3.$$

  Por el apartado a), sabemos que $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$, veamos qué sucede cuando $x\to-\infty$:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=+\infty\to$ No hay asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Hay una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si} \quad x\le 1\\ \dfrac{2x(x-6)}{(x-3)^2} & \text{si} \quad x>1\end{cases}\to f'(0)\to x=6$$

  En $(-\infty,1)\cup(6,+\infty)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  En $(1,3)\cup(3,6)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En $x = 6$ hay un mínimo: $f(6)=24\to(6,24)$

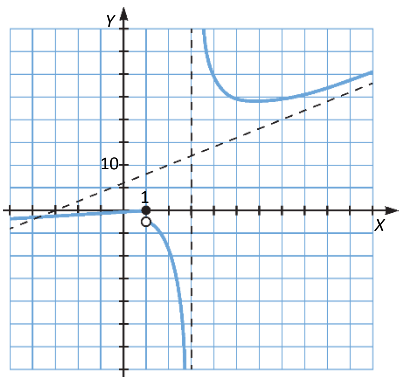
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{2-x}\,(2-x)} & \text{si } x\le 1\\[2mm] \dfrac{36}{(x-3)^3} & \text{si } x>1\end{cases}\rightarrow f''(0)\neq 0\rightarrow \text{No hay puntos de inflexión.}$$

En $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, $f''(x)>0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En $(1,3)$, $f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

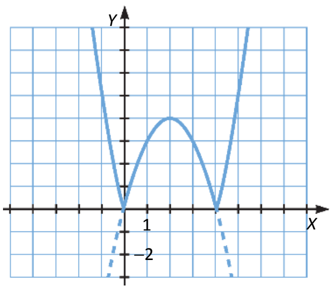
c)



$\mathrm{Im}\, f=(-\infty,0)\cup(24,+\infty)$

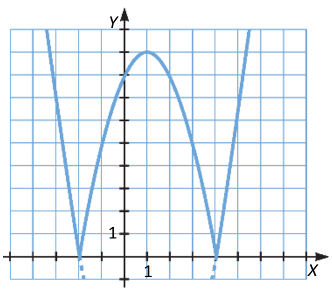
108. Página 207

La función de dentro del valor absoluto es una parábola hacia abajo con vértice en el punto $V(2,4)$, que corta a los ejes en los puntos (0,0) y (4,0). Por lo tanto, debemos representar la función de dentro del valor absoluto y realizar una simetría respecto del eje *X* de los puntos que quedan por debajo del eje *X*.



109. Página 207

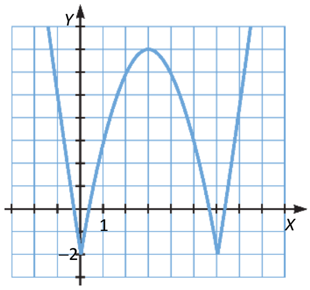
a) La función de dentro del valor absoluto es una parábola hacia arriba con vértice en el punto $V(1,-9)$, que corta a los ejes en los puntos (–2,0), (4,0) y (0, –8). Por lo tanto, debemos representar la función de dentro del valor absoluto y realizar una simetría respecto del eje *X* de los puntos que quedan por debajo del eje *X*.



b) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}6x-x^2-2 & \text{si} \quad x\in[0,6]\\ x^2-6x-2 & \text{si} \quad x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)\end{cases}$$

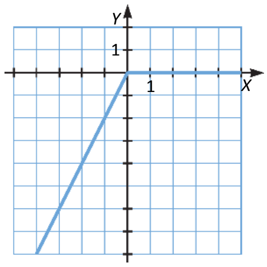
La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice en el punto $V(3,7)$, que corta a los ejes en los puntos $\left(3-\sqrt{7},0\right)$, $\left(3+\sqrt{7},0\right)$ y $(0,-2)$. La función del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice en el punto $V(3,-11)$ que corta a los ejes en los puntos $\left(3-\sqrt{11},0\right)$, $\left(3+\sqrt{11},0\right)$ y $(0,-2)$. Por lo tanto, representamos cada función en su respectivo dominio.



c) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si} \quad x\le 0\\ 0 & \text{si} \quad 0<x\end{cases}$$

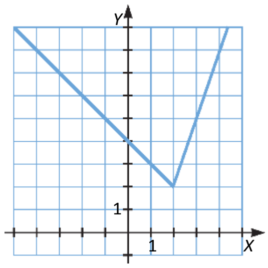
La función del primer tramo es una recta con pendiente 2 que pasa por el origen de coordenadas. La segunda es la función nula. Representamos cada función en su respectivo dominio.



d) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}4-x & \text{si} \quad x\le 2\\ 3x-4 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

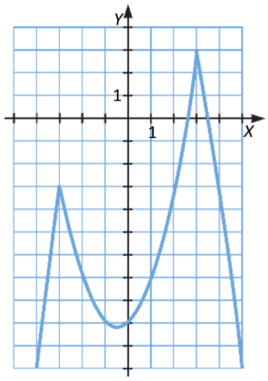
La función del primer tramo es una recta con pendiente –1 que pasa por el punto (0, 4). La segunda es una recta de pendiente 3 y que pasa por (0, –4). Representamos cada función en su respectivo dominio.



e) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}x+9-x^2 & \text{si} \quad x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ x-9+x^2 & \text{si} \quad x\in(-3,3)\end{cases}$$

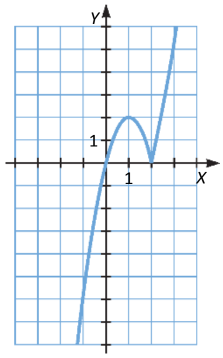
La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice $V\left(\frac{1}{2},\frac{37}{4}\right)$ y corta los ejes en los puntos $\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2},0\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2},0\right)$ y $(0,9)$. La del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice $V\left(\frac{-1}{2},\frac{-37}{4}\right)$ y corta a los ejes en los puntos $\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{2},0\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{2},0\right)$ y $(0,-9)$. Representamos cada función en su respectivo dominio.



f) Podemos expresar la función *f*(*x*) como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}4x-2x^2 & \text{si} \quad x<2\\ 2x^2-4x & \text{si} \quad 2\le x\end{cases}$$

La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice $V(1,2)$ y corta los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0). La del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice $V(1,-2)$ y corta los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0).
Representamos cada función en su dominio.



110. Página 207

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+5x+6 & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2-5x+6 & \text{si} \quad 0<x\end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+5h+6-(6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+5h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h+5)=5\\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-5h+6-(6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-5h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h-5)=-5\end{array}\right\}\to \text{La función no es derivable en } x=0.$$

b) $f'(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{si} \quad x<0\\ 2x-5 & \text{si} \quad 0<x\end{cases}\to f'(0)=0\to\begin{cases}2x+5=0\to x=\dfrac{-5}{2}\\ 2x-5=0\to x=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

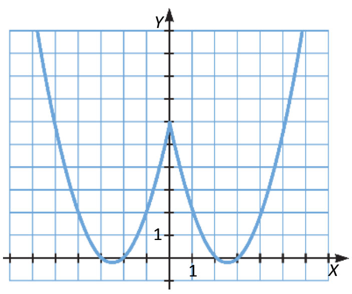
En $\left(-\infty,\dfrac{-5}{2}\right)\cup\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$, *f'*(*x*) < 0 ⟶ *f*(*x*) es decreciente.

En $\left(\dfrac{-5}{2},0\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$, *f'*(*x*) > 0 ⟶ *f*(*x*) es creciente.

En $x=\pm\dfrac{5}{2}$ presenta dos mínimos.

c) $f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad x<0\\ 2 & \text{si} \quad 0<x\end{cases}\to f''(0)>0\to$ *f*(*x*) es siempre cóncava ⟶ No presenta puntos de inflexión.

d)

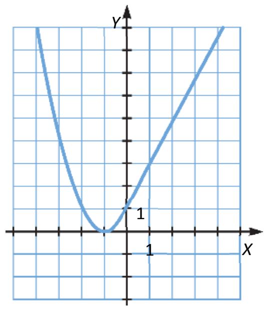


111. Página 207

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1+a\sqrt{h+1}\cdot\ln(h+1)-(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\left[a\dfrac{\ln(h+1)}{h}\right]=\lim\limits_{h\to 0^-}\left[a\dfrac{\frac{1}{h+1}}{1}\right]=a \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(h+1)^2-(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2+2h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h+2)=2 \end{array}\right\}\to a=2$$

Es decir, $f(x)$ es derivable en $x=0$ si $a=2$.



112. Página 207

a) $C(120)=8-5{,}4+3{,}6=6{,}2$

Si conduce a 120 km/h, consumirá 6,2 litros cada 100 km.

b) $C'(x)=-0{,}0045+0{,}0005x=0\to x=90$

$C''(x)=0{,}0005\to$ En $x=90$ se alcanza un mínimo, por lo que a 90 km/h consume menos.

A esta velocidad consumirá $C(90)=8-4{,}05+2{,}025=5{,}975$ litros.

c) $10=8-0{,}045x+0{,}00025x^2\to 0{,}00025x^2-0{,}045x-2=0\to\begin{cases}x=-36{,}886\\ x=216{,}89\end{cases}$

Estas velocidades no están en [0, 160], por lo que no es posible consumir 10 litros de gasolina conduciendo a las velocidades de definición de la función.

113. Página 207

a) $B(20)=-200+1000-80=0\to$ Al fabricar y vender 20 objetos no hay beneficio.

$B(60)=-1800+3\,000-800=400\to$ Al fabricar y vender 60 objetos se obtienen 400 € de beneficios.

b) $B'(x)=-x+50=0\to x=50$ $\qquad B''(x)=-1<0\to$ En $x=50$ se alcanza un máximo.

$B(50)=-1250+2500-800=350$

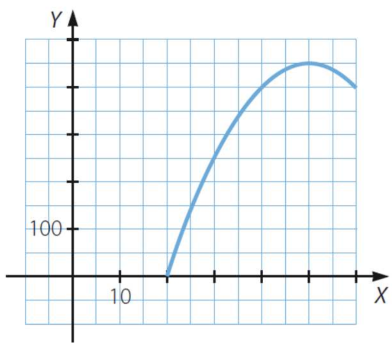
Así, para obtener el beneficio máximo, hay que fabricar y vender 50 objetos, siendo este beneficio de 450 €.

c) Representamos la función en el intervalo (20, 60).

En el intervalo (0, 50), $B'(x)>0\longrightarrow B(x)$ es creciente.

En el intervalo (50, 60), $B'(x)<0\longrightarrow B(x)$ es decreciente.

Además, la función pasa por los puntos (20, 0) y (60, 400) y tiene un máximo en (50, 450).



114. Página 207

a) La función pasa por el punto (12, 1 200) ⟶ $N(12)=1200 \to -5(\alpha-12)^2+\beta=1200$.

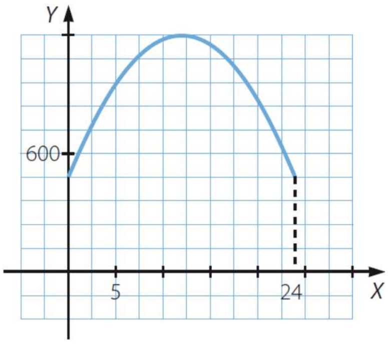
$N'(t)=10(\alpha-t) \to N'(12)=10(\alpha-12)=0 \to \alpha=12 \to \beta=1200$

$N(t)=-5(12-t)^2+1200$ $\quad$ $N(0)=-720+1200=480$ $\quad$ $N(24)=-720+1200=480$

El máximo se alcanza en el punto $(12, 1200)$.

La función en creciente en el intervalo (0, 12) y decreciente en el intervalo (12, 24).

b)



115. Página 207

- Punto de corte con el eje *Y*:

  $f(0)=20 \to$ Corta el eje *Y* en el punto (0, 20).

- Creciemiento y decrecimiento:

  $f'(x)=6x^2-41x+60=0 \to \begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$

  Solo analizamos la función en el intervalo [0, 7].

  En $(0,2)\cup(5,7)$, $f'(x)>0 \to f(x)$ es creciente.

  En el intervalo (2, 5), $f'(x)<0 \to f(x)$ es decreciente.

  La función tiene un máximo en $x=2$ y un mínimo en $x=5$.

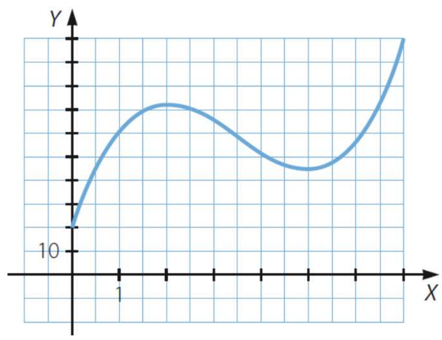
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=12x-42=42 \to x=\frac{42}{12}=\frac{7}{2}$

  En el intervalo $\left(0, \frac{7}{2}\right)$, $f''(x)<0 \to f(x)$ es convexa.

  En el intervalo $\left(\frac{7}{2}, 7\right)$, $f''(x)>0 \to f(x)$ es cóncava.

  La función tiene un punto de inflexión en $x=\frac{7}{2}$.



A las 2 horas, la velocidad es máximo y a las 5 horas la velocidad es mínima.

A las 3 horas y media, la velocidad alcanza un punto de inflexión.

116. Página 207

a) $P'(x) = -0{,}00075x^2 + 0{,}09x - 2{,}4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = 80 \end{cases}$

$P''(x) = -0{,}00156x + 0{,}09$

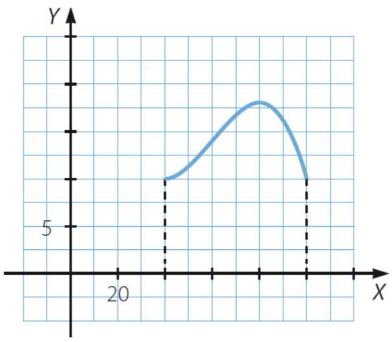
$P''(40) = 0{,}0276 \rightarrow$ En $x = 40$ la función presenta un mínimo.

$P''(80) = -0{,}0348 \rightarrow$ En $x = 80$ la función presenta un máximo.

Así, en el intervalo (40, 80), el porcentaje de votantes al partido crece, y en el intervalo (80, 100) decrece, por lo que en $x = 100$ presenta otro mínimo.

Como $P(80) = 18$, el dirigente sí podría llegar a dimitir.

b) $P(40) = 10$ $P(100) = 10$



MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 208

Respuesta abierta.

2. Página 208

30 puntos, ya que conocemos los dos extremos.

3. Página 208

No, existen infinitas funciones que pasan por dos puntos dados del plano. Por ejemplo, hay infinitas funciones polinómicas que pasan por dos puntos dados.

4. Página 208

La ecuación general de una función polinómica de grado *n* es: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Como tenemos que hallar $n + 1$ coeficientes, necesitaremos $n + 1$ puntos.