

BOLETÍN: PROGRAMACIÓN LINEAL

Actividades de programación lineal: Beneficios y costes

- Una fábrica de lámparas produce dos modelos A y B . El modelo A necesita dos horas de trabajo de chapa y una hora de pintura. El modelo B necesita una hora de chapa y dos de pintura. Semanalmente se emplean como máximo 80 horas en trabajos de chapa y 100 horas en trabajos de pintura. Cada unidad del modelo A se vende a 75 € y cada unidad del modelo B a 80 €.
 - ¿Dibuja la región factible.
 - Determina el número de lámparas de cada tipo que interesa producir para que el beneficio obtenido con su venta sea lo mayor posible.
 - Calcula el beneficio máximo.
- Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A , que produce un beneficio de 8 €, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 € y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1500 € a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.
- Una persona tiene 1500 € para invertir en dos tipos de acciones A y B . El tipo A tiene un interés simple anual del 9 % y el tipo B del 5 %. Decide invertir como máximo 900 € en acciones A y como mínimo 300 euros en acciones del tipo B y además decide invertir en el tipo A por lo menos tanto como en el tipo B .
 - Dibuja la región factible.
 - ¿Cómo debe invertir los 1500 € para que los beneficios anuales sean los máximos posibles?
 - Calcula esos beneficios anuales máximos.
- Una compañía de telefonía móvil quiere celebrar una jornada de “Consumo razonable” y ofrece a sus clientes la siguiente oferta: 15 céntimos de euro por cada mensaje SMS y 25 céntimos de euro por cada minuto de conversación incluyendo el coste de establecimiento de llamada. Impone las condiciones:
 - El número de llamadas de un minuto no puede ser mayor que el número de mensajes aumentado en 3, ni ser menor que el número de mensajes disminuido en 3.
 - Sumando el quintuplo del número de mensajes con el número de llamadas no puede obtenerse más de 27.
 - Dibuja la región factible.
 - Determina el número de mensajes y de llamadas para que el beneficio sea máximo.
 - ¿Cuál es ese beneficio máximo?



Actividades de programación lineal: El problema de la dieta

5. La dieta para alimentar a un pájaro se obtiene a través de dos tipos de preparados A y B. A contiene 30 mg de calcio, 10 mg de fósforo y 40 mg de magnesio con un coste de 3 €. B contiene 40 mg de calcio, 30 mg de fósforo y 20 mg de magnesio con un coste de 4 €. La dieta debe aportar, como mínimo, 350 mg de calcio, 150 mg de fósforo y 300 mg de magnesio. Calcula la cantidad óptima de botes de los preparados A y B para minimizar el coste.
6. Los animales de una granja deben tomar, al menos, 60 mg de vitamina A y, al menos, 90 mg de vitamina B. Existen dos compuestos con estas vitaminas. El compuesto X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de B, y cada dosis cuesta 0,50 €. El compuesto Y contiene 10 mg de cada vitamina, y cada dosis cuesta 0,30 €. Además, se recomienda no tomar más de 8 dosis diarias. Calcula qué dosis tiene que tomar para que el coste sea mínimo.

Actividades de programación lineal: Problemas no literales

7. Considera el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Calcula el máximo de la función $f(x, y) = x - 3y$

Actividades de programación lineal: El problema del transporte

8. Se deben transportar naranjas de las ciudades de Gandía y Valencia a las ciudades de Santiago, Vigo y A Coruña. Las cantidades ofertadas son 500 kg de Gandía y 750 kg de Valencia. Las cantidades demandadas son 250 kg por Santiago, 500 kg por Vigo y 500 kg por Coruña. Los costes, en céntimos por kg, de transportar de una ciudad a otra son:

	Santiago	Vigo	A Coruña
Gandía	1	2	2
Valencia	2	2	3

Establece la mejor forma de realizar el transporte para que el coste total sea mínimo.

¿Hay una única solución?



Actividades de programación lineal: Problemas combinados de repaso

9. El terreno dedicado a una plantación de hortalizas procesa semanalmente un mínimo 16 kg de abono mineral y un mínimo de 18 kg de abono vegetal. En el mercado existen dos paquetes de abonos P_1 y P_2 . El paquete P_1 contiene 2 kg de abono mineral y 5 kg de abono vegetal y cada paquete del tipo P_2 contiene 3 kg de abono mineral y 2 kg de abono vegetal. Cada paquete de tipo P_1 cuesta 15 € y cada paquete del tipo P_2 cuesta 10 € . Calcula el número de paquetes de cada tipo que se deben adquirir para que el coste sea mínimo.
10. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer la reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan 100 € la tonelada independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

11. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 3x - 4y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 30 \\ 3x - 2y \geq -6 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$

12. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 3x + y \geq 2 \\ 3x - 2y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Calcula el mínimo de la función $f(x, y) = 9x + y$



13. Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:

El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas. El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.

Resuelve el problema y razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

14. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal:
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ -2 \leq 2x - y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
b) Justifica si el punto $P(-1/2, 1/2)$ pertenece a la región.
c) Calcula el punto o puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = -2x + 5y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.
15. En una fábrica se construyen dos tipos de aparatos: A y B . Ambos tipos de aparatos han de pasar por la secciones X e Y . Cada sección trabaja como máximo 100 horas por semana. Cada aparato A lleva 3 horas de la sección X y una de la sección Y . Cada aparato B lleva una hora de la sección X y dos de la sección Y . Cada aparato A se vende por 100 € y cada aparato B se vende a 150 €. Halla cuántos aparatos de cada tipo se producirán para que el ingreso por ventas sea máximo.

16. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Verifica si el punto $P(-1, 2)$ pertenece a la región factible.
c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$.
17. Una fábrica elabora dos tipos de productos, A y B . El tipo A necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 € por unidad. El tipo B necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 € por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de A y de B que se deben fabricar para maximizar el beneficio.



18. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 3x + 4y \geq -6 \\ -x + 2y \leq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

- Representa gráficamente la región factible.
- Verifica si el punto $P(-1,1)$ pertenece a la región factible.
- Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = -2x + 4y$.

19. Vamos a invertir en dos productos financieros A y B . La inversión en B será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en A más del doble que en B . El producto A proporciona un beneficio del 10% y B del 5%. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

20. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -6 \\ 7x + 4y \leq 5 \\ -3x + 2y \leq 9 \end{cases}$$

- Representa gráficamente la región factible.
- Verifica analíticamente si el punto $P(-1,2)$ pertenece a la región factible.
- Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 15x - 10y$.

21. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 €. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 €. ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos? Determina los ingresos.

22. Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B . El lote A incluye 1 kg de manzanas, 5 kg de naranjas y 1 kg de peras, mientras que el lote B incluye 4 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener al menos 24 kg de manzanas, 30 kg de naranjas y 12 kg de peras, determina la región factible y cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso? ¿Es posible la combinación de 6 lotes de tipo A y 2 lotes de tipo B ?

 **BOLETÍN DE PROGRAMACIÓN LINEAL**
(Actividades seleccionadas de pruebas PAU / ABAU de Galicia)

[ABAU Extraordinaria 2024]

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

- Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

[ABAU Ordinaria 2024]

EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40$$

$$x + y \geq 5$$

$$3x + y \leq 45$$

$$x \geq 0$$

- Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.
- Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

[ABAU Extraordinaria 2022]

EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €

- Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.
- Represente gráficamente la región la región factible y calcule sus vértices.
- Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

[ABAU Extraordinaria 2021]

EXERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, ten entre os seus clientes a empresas e a particulares. Ao finalizar o ano debe conseguir polo menos 25 empresas como clientes na súa carteira, e o número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo o dobre que o de empresas. Ademais, ten estipulado un límite global de 120 clientes anuais. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuais, mentres que cada particular 229 euros.

- Formule o problema para maximizar os ingresos.
- Represente graficamente o conxunto de solucións.
- Cal desas solucións lle proporcionarían os maiores ingresos ao finalizar o ano? A canto ascenderían devanditos ingresos?



[ABAU Junio 2019 Opción B]

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos. b) Representa la región factible. c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

[ABAU Junio 2018 Opción B]

1. Unha pastelería fai con fariña e nata dous tipos de biscoitos: suave e duro. Dispón de 160 quilogramos de fariña e 100 quilogramos de nata. Para fabricar un biscoito suave necesita 250 gramos de fariña e 250 gramos de nata e para fabricar un biscoito duro necesita 400 gramos de fariña e 100 gramos de nata. Ademais o número de biscoitos suaves fabricados debe exceder ao menos en 100 unidades o número de biscoitos duros. Se os biscoitos suaves se venden a 6 € e os biscoitos duros a 4,5€,

[ABAU Septiembre 2017 Opción B]

1. Unha fábrica de materiais plásticos produce dous tipos de colectores A e B . A súa produción semanal debe de ser de polo menos 10 colectores en total e o número de colectores de tipo B non pode superar en máis de 10 ao número dos de tipo A . Ademais, cada colector de tipo A ten uns custos de produción de 150€ e cada colector de tipo B de 100€, dispoñendo dun máximo de 6000€ semanais para o custo total de produción.

(a) Formula o sistema de inecuacións. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.

(b) Se cada colector de tipo A xera uns beneficios de 130€ e o de tipo B de 140€, ¿cantos colectores de cada tipo terán que producir á semana para que o beneficio total semanal sexa máximo?

[PAU Junio 2010 Opción B Problema 1 (Difícil)]

Una empresa de transportes tiene que trasladar bloques de granito desde una cantera a un aserradero de piedra. Para eso dispone de un máximo de 8 camiones de tipo A y un máximo de 12 camiones de tipo B . Cada camión de tipo A necesita un operario y puede transportar 24 toneladas de granito con un gasto de 150 euros, mientras que cada camión de tipo B necesita dos operarios y puede transportar 12 toneladas de granito con un gasto de 300 euros. Se sabe que se necesitarán un mínimo de 15 operarios, que se transportarán un mínimo de 108 toneladas de granito y que el número de camiones de tipo A utilizados no será superior al número de camiones de tipo B .

a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible y calcula sus vértices.

b) Calcula todas las posibilidades que tiene la empresa de distribuir los camiones para minimizar el gasto.

[PAU Junio 2009 Bloque Álgebra]

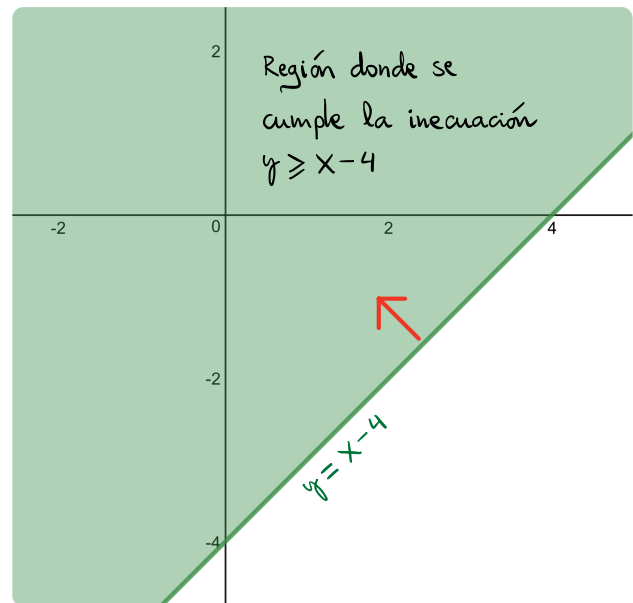
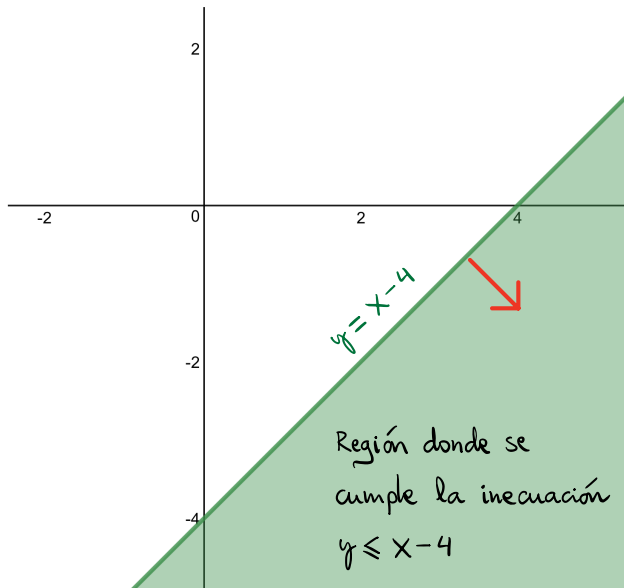
Exercicio 2. Unha compañía química deseña dous posibles tipos de cámaras de reacción que incluírán nunha planta para producir dous tipos de polímeros P_1 e P_2 . A planta debe ter unha capacidade de produción de, polo menos 100 unidades de P_1 e polo menos 420 unidades de P_2 cada día. Cada cámara de tipo A custa 600.000 euros e é capaz de producir 10 unidades de P_1 e 20 unidades de P_2 por día; a cámara de tipo B é un deseño máis económico, custa 300.000 euros e é capaz de producir 4 unidades de P_1 e 30 unidades de P_2 por día. Debido ao proceso de deseño, é necesario ter polo menos 4 cámaras de cada tipo na planta. ¿Cantas cámaras de cada tipo deben incluírse para minimizar o custo e aínda así satisfacer o programa de produción requerido? Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.

Representación gráfica de una inecuación

Vamos a aprender a representar gráficamente una inecuación. Ejemplos: $y \leq x-4$, $y \geq x-4$

Si despejamos (aislamos) y el signo \leq indica que debemos sombrear por **debajo** de la recta $y = x-4$

Si despejamos (aislamos) y el signo \geq indica que debemos sombrear por **encima** de la recta $y = x-4$



Si la y tiene un signo **negativo**, cambia el signo de la desigualdad.

Ejemplo: $x-y \leq -3$

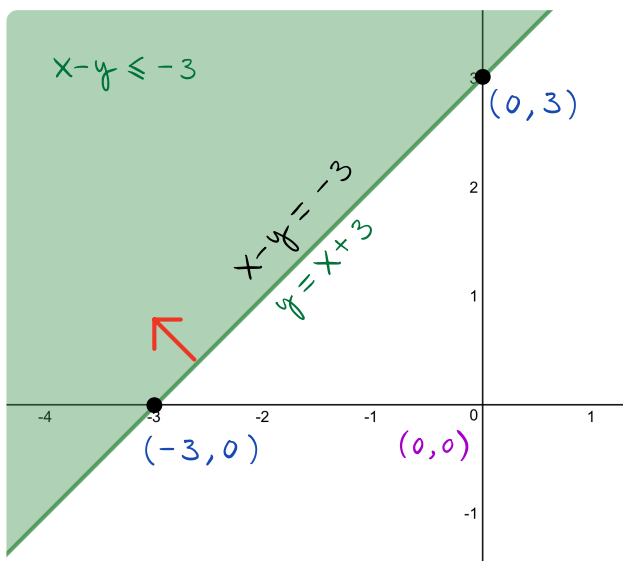
$-y \leq -x-3$ Si multiplicamos o dividimos por un número negativo, cambia el signo de la desigualdad.

$y \geq x+3 \Rightarrow$ Tenemos que sombrear por encima de la recta $y = x+3$ (lo mismo que $x-y = -3$)

Para **representar la inecuación** primero dibujamos la recta $y = x+3$ con dos **puntos de corte**:

Si $x=0 \Rightarrow y=3$, así que el primer punto de corte es el $(0,3)$

Si $y=0 \Rightarrow x=-3$, así que el punto de corte es el $(-3,0)$



Tenemos un 2º método para saber de qué lado de la recta se verifica la inecuación.

Prueba el punto $(0,0)$. Si $x=0$, $y=0$ comprobamos

la inecuación: $x-y \leq -3$

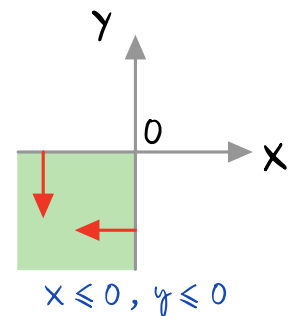
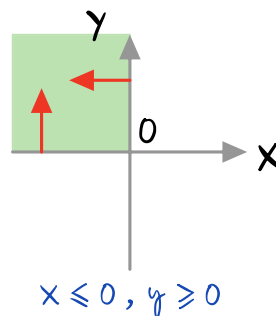
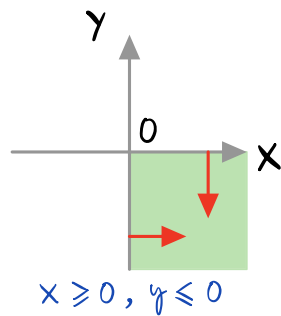
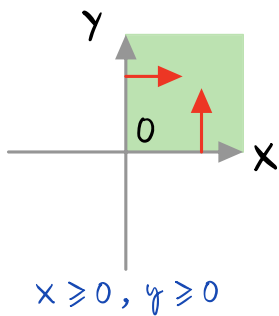
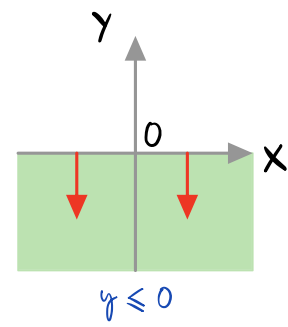
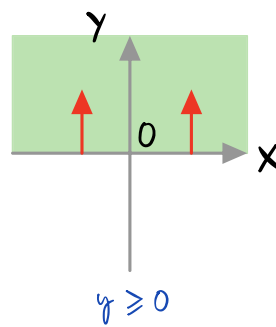
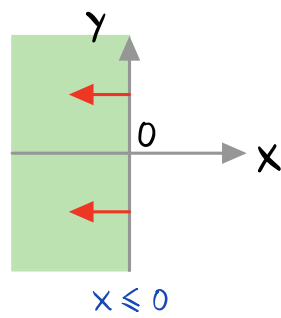
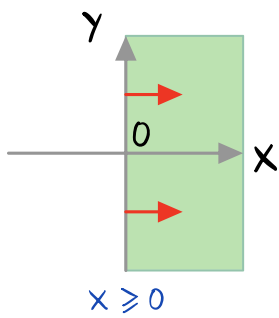
$0-0 \leq -3$ **No cumple.**

Como el punto $(0,0)$ **no cumple** la inecuación, sombreamos el lado de la recta donde **no está** ese punto.

Si el punto cumpliera la condición, tendríamos que sombrear el lado donde **sí está** el punto.

Nota: Si la inecuación pasa por el punto $(0,0)$ tendría que probar con otro punto escogido al azar.

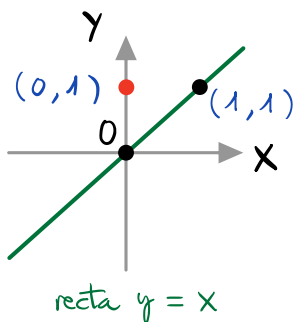
Casos sencillos de inecuaciones con los ejes de coordenadas



Cómo averiguar dónde se cumple la inecuación cuando la recta pasa por el origen (0,0)

En estos casos no podemos hacer la prueba del punto (0,0) porque está encima de la recta.

Para comprobar la inecuación tenemos que probar o evaluar un punto que esté fuera de la recta.



Ejemplo: $y \leq x$

Para representar la inecuación primero dibujamos la recta $y = x$ con dos puntos de corte:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$, así que el primer punto de corte es el (0,0)

Si $y = 0 \Rightarrow x = 0$ que es el mismo punto de corte así que escogemos otro al punto al azar.

Por ejemplo, si $x = 1 \Rightarrow y = 1$, así que el segundo punto de corte es el (1,1)

Probamos un punto que esté fuera de la recta, por ejemplo (0,1)

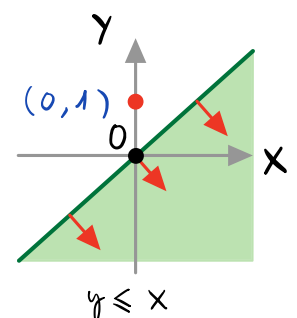
Sustituimos los valores en la inecuación: $y \leq x$

$1 \leq 0$ No cumple

↑ ↑
y x

↑ ↑
x y

Si cumple la inecuación, sombreamos desde la recta hacia el punto que hemos probado.
Si no cumple la inecuación, sombreamos desde la recta hacia el lado contrario al punto.



Actividades de programación lineal: Beneficios y costes

1. Una fábrica de lámparas produce dos modelos A y B. El modelo A necesita dos horas de trabajo de chapa y una hora de pintura. El modelo B necesita una hora de chapa y dos de pintura. Semanalmente se emplean como máximo 80 horas en trabajos de chapa y 100 horas en trabajos de pintura. Cada unidad del modelo A se vende a 75 € y cada unidad del modelo B a 80 €.

Llamaremos :
Modelo A (x unidades),
Modelo B (y unidades)

- ¿Dibuja la región factible.
- Determina el número de lámparas de cada tipo que interesa producir para que el beneficio obtenido con su venta sea lo mayor posible.
- Calcula el beneficio máximo.

Restricciones :

	A	B	Máx
Chapa	2	1	80
Pintura	1	2	100

Horas de chapa

$$2 \cdot x + y \leq 80$$

Horas de pintura

$$x + 2 \cdot y \leq 100$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

(No negatividad)

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

$$2 \cdot x + y = 80 \Rightarrow y = 80 - 2x$$

$$x + 2 \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - x}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

La **función objetivo** es el beneficio :

$$f(x, y) = 75x + 80y$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$y = 80 - 2x$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = \frac{80}{2} = 40 \Rightarrow (40, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 80 \Rightarrow (0, 80) \text{ B}$$

$$y = \frac{100 - x}{2}$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow (100, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = \frac{100}{2} = 50 \Rightarrow (0, 50) \text{ D}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$y = 80 - 2x$$

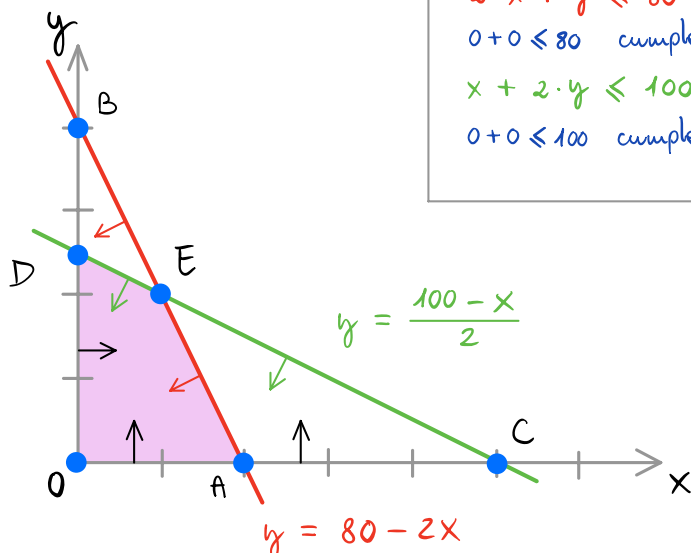
$$y = \frac{100 - x}{2} \left\{ \begin{array}{l} 80 - 2x = \frac{100 - x}{2} \end{array} \right.$$

$$160 - 4x = 100 - x$$

$$60 = 3x$$

$$x = 20 \Rightarrow y = 40 \text{ (20, 40) E}$$

La última intersección es $O(0,0)$



La **función objetivo** es el beneficio :

$$f(x, y) = 75x + 80y$$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : O, D, E, A

$$f(0, 0) = 0 \text{ € (No)}$$

$$f(0, 50) = 4000 \text{ €}$$

$$f(20, 40) = 4700 \text{ € Beneficio máximo}$$

$$f(40, 0) = 3000 \text{ €}$$

Fabricaremos 20 unid. de A y 40 unid. de B.

2. Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 €, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 € y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1500 € a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.

Llamaremos :

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv \text{n}^\circ \text{ lotes de A} \\ y &\equiv \text{n}^\circ \text{ lotes de B} \end{aligned} \right\}$$

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{8x}_A + \underbrace{10y}_B - \underbrace{1500}_{\text{Publicidad}}$$

$$\text{Restricciones: } \left. \begin{aligned} x + 2y &\leq 1600 \\ x + y &\leq 1000 \\ x &\leq 800 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ (No negatividad)}$$

Lote	Bañador	Gafas	Gorro
A	1	1	1
B	2	1	0
Total	1600	1000	800

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y = 1600 &\Rightarrow y = \frac{1600-x}{2} \\ x + y = 1000 &\Rightarrow y = 1000-x \\ x &= 800 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x + 2y = 1600$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=1600 \Rightarrow (1600, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=800 \Rightarrow (0, 800) \text{ B}$$

$$x + y = 1000$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=1000 \Rightarrow (1000, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=1000 \Rightarrow (0, 1000) \text{ D}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1600-x}{2} \\ y &= 1000-x \end{aligned} \right\} \frac{1600-x}{2} = 1000-x$$

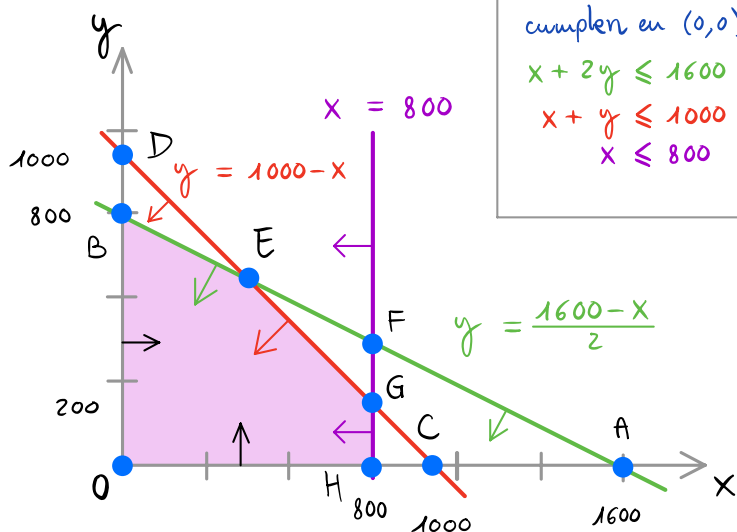
$$1600-x = 2000-2x \Rightarrow x=400 \Rightarrow y=600$$

$$(400, 600) \text{ E}$$

$$\text{En } y=1000-x, \text{ si } x=800 \Rightarrow y=200$$

$$(800, 200) \text{ G En } x+2y=600 \Rightarrow F(800, 400)$$

$$\text{La última intersección es } O(0,0) \text{ y } H(800,0)$$



cumplen en $(0,0)$

$$x + 2y \leq 1600$$

$$x + y \leq 1000$$

$$x \leq 800$$

La **función objetivo** es:

$$f(x, y) = 8x + 10y - 1500$$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : O, B, E, G, H

$$f(0,0) = -1500 \text{ € (No)}$$

$$f(0,800) = 6500 \text{ €}, f(400,600) = 7700 \text{ €}$$

$$f(800,200) = 6900 \text{ €}, f(800,0) = 4900 \text{ €}$$

Montaremos 400 lotes A y 600 lotes B con un beneficio máximo de 7700 €

3. Una persona tiene 1500 € para invertir en dos tipos de acciones A y B. El tipo A tiene un interés simple anual del 9% y el tipo B del 5%. Decide invertir como máximo 900 € en acciones A y como mínimo 300 euros en acciones del tipo B y además decide invertir en el tipo A por lo menos tanto como en el tipo B.

- Dibuja la región factible.
- ¿Cómo debe invertir los 1500 € para que los beneficios anuales sean los máximos posibles?
- Calcula esos beneficios anuales máximos.

Llamaremos:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv \text{acciones tipo A} \\ y \equiv \text{acciones tipo B} \end{array} \right\}$$

Función objetivo: $f(x, y) = \frac{9}{100} \cdot x + \frac{5}{100} \cdot y = \underbrace{0,09 \cdot x}_A + \underbrace{0,05 \cdot y}_B$

Restricciones: $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1500 \\ x \leq 900 \\ y \geq 300 \\ x \geq y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{(No negatividad)}$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$y = 1500 - x$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 1500 \Rightarrow (1500, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 1500 \Rightarrow (0, 1500) \text{ B}$$

$$x = 900 \Rightarrow (900, 0) \text{ C}$$

$$y = 300 \Rightarrow (0, 300) \text{ D}$$

El origen es otro punto de corte $O(0,0)$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$y = 1500 - x$$

$$\text{Si } x = 900 \Rightarrow y = 600 \Rightarrow (900, 600) \text{ E}$$

$$\text{Si } y = 300 \Rightarrow x = 1200 \Rightarrow (1200, 300) \text{ F}$$

$$y = x \Rightarrow 2y = 1500 \Rightarrow y = 750 \Rightarrow$$

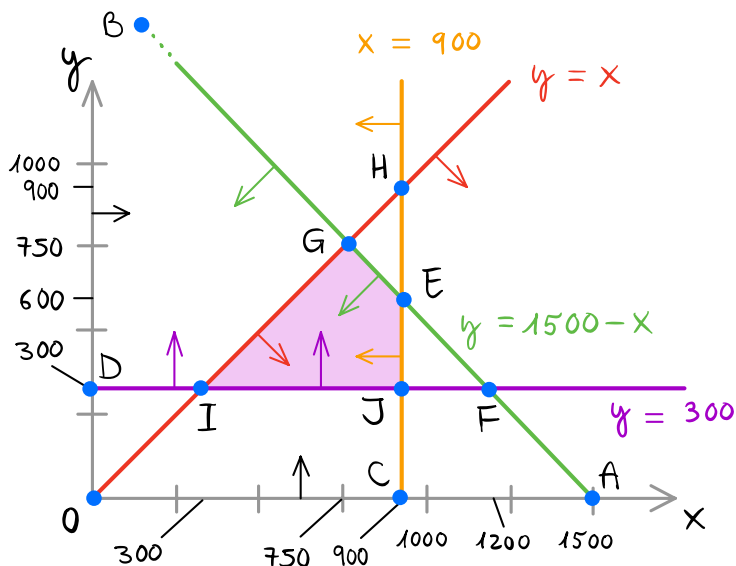
$$x = 750 \Rightarrow (750, 750) \text{ G}$$

Con las rectas $x = 900$ e $y = 300$:

$$(900, 900) \text{ H} \quad (300, 300) \text{ I} \quad (900, 300) \text{ J}$$

$x + y \leq 1500$, $x \leq 900$ cumplen en $(0,0)$

$y \geq 300$ NO cumple en $(0,0)$ $x \geq y$ cumple en $(100,0)$



La función objetivo es:

$$f(x, y) = 0,09 \cdot x + 0,05 \cdot y$$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: I, G, E, J

$$f(300, 300) = 42 \text{ €}$$

$$f(750, 750) = 105 \text{ €}$$

$$f(900, 600) = 111 \text{ €}$$

$$f(900, 300) = 96 \text{ €}$$

Invertiremos 900 € con el tipo A y 600 € con el tipo B, Interés: 111 €

4. Una compañía de telefonía móvil quiere celebrar una jornada de "Consumo razonable" y ofrece a sus clientes la siguiente oferta: 15 céntimos de euro por cada mensaje SMS y 25 céntimos de euro por cada minuto de conversación incluyendo el coste de establecimiento de llamada. Impone las condiciones:

- El número de llamadas de un minuto no puede ser mayor que el número de mensajes aumentado en 3, ni ser menor que el número de mensajes disminuido en 3.
- Sumando el quintuplo del número de mensajes con el número de llamadas no puede obtenerse más de 27.

- Dibuja la región factible.
- Determina el número de mensajes y de llamadas para que el beneficio sea máximo.
- ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Llamaremos :

$x \equiv$ Cantidad SMS

$y \equiv$ Cantidad llamadas

Función objetivo :

$$f(x, y) = 15 \cdot x + 25 \cdot y$$

Restricciones :

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x + 3 \\ y \geq x - 3 \\ 5x + y \leq 27 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$$

(No negatividad)

$$y = 27 - 5x$$

La región factible está por debajo de la recta

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$y = x + 3$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3) \text{ B}$$

$$y = x - 3$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3) \text{ D}$$

$$5x + y = 27$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = \frac{27}{5} \Rightarrow (\frac{27}{5}, 0) \text{ E}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 27 \Rightarrow (0, 27)$$

Busco un número más próximo:

$$\text{Si } x = 4 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow (4, 7) \text{ F}$$

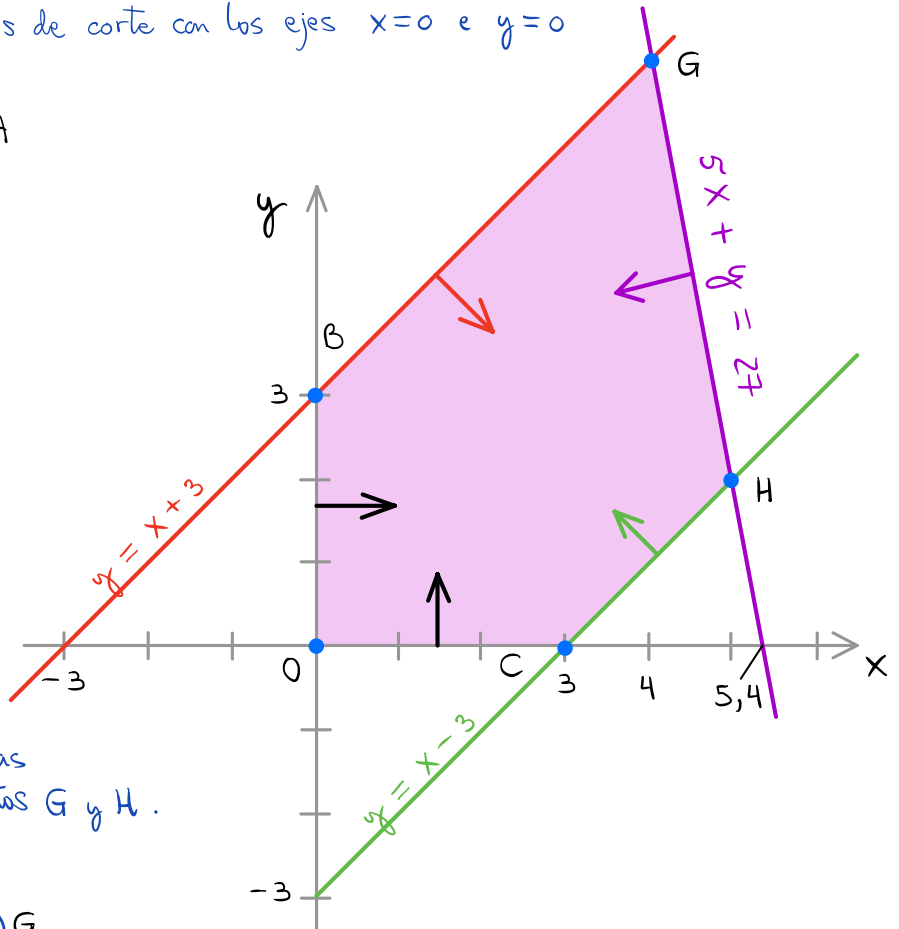
Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular los puntos G y H.

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 3 \\ y = 27 - 5x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 27 - 5x = x + 3 \\ x = 4 \Rightarrow y = 7 \end{array} (4, 7) \text{ G}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 3 \\ y = 27 - 5x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 27 - 5x = x - 3 \\ x = 5 \Rightarrow y = 2 \end{array} (5, 2) \text{ H}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 15 \cdot x + 25 \cdot y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : O, B, C, G, H



$$f(0, 0) = 0 \quad f(4, 7) = 235$$

$$f(0, 3) = 75 \quad f(5, 2) = 125$$

$$f(3, 0) = 45$$

El beneficio máximo se logra con 4 SMS y 7 llamadas y asciende a 235 c.

Actividades de programación lineal: El problema de la dieta

5. La dieta para alimentar a un pájaro se obtiene a través de dos tipos de preparados A y B. A contiene 30 mg de calcio, 10 mg de fósforo y 40 mg de magnesio con un coste de 3 €. B contiene 40 mg de calcio, 30 mg de fósforo y 20 mg de magnesio con un coste de 4 €. La dieta debe aportar, como mínimo, 350 mg de calcio, 150 mg de fósforo y 300 mg de magnesio. Calcula la cantidad óptima de botes de los preparados A y B para minimizar el coste.

Preparado	Calcio	Fósforo	Magnesio	Coste
A (x)	30	10	40	3 €
B (y)	40	30	20	4 €
Mínimos	350	150	300	

Llamaremos: $x \equiv$ botes tipo A }
 $y \equiv$ botes tipo B }

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{3x}_A + \underbrace{4y}_B \quad (\text{coste el alimento: mínimo})$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Calcio} \quad 30x + 40y \geq 350 \\ \text{Fósforo} \quad 10x + 30y \geq 150 \\ \text{Magnesio} \quad 40x + 20y \geq 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \quad (\text{No negatividad})$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

$$\left. \begin{array}{l} 30x + 40y = 350 \\ 10x + 30y = 150 \\ 40x + 20y = 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$30x + 40y = 350$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=11,6 \Rightarrow (11,6, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=8,75 \Rightarrow (0, 8,75) \text{ B}$$

$$10x + 30y = 150$$

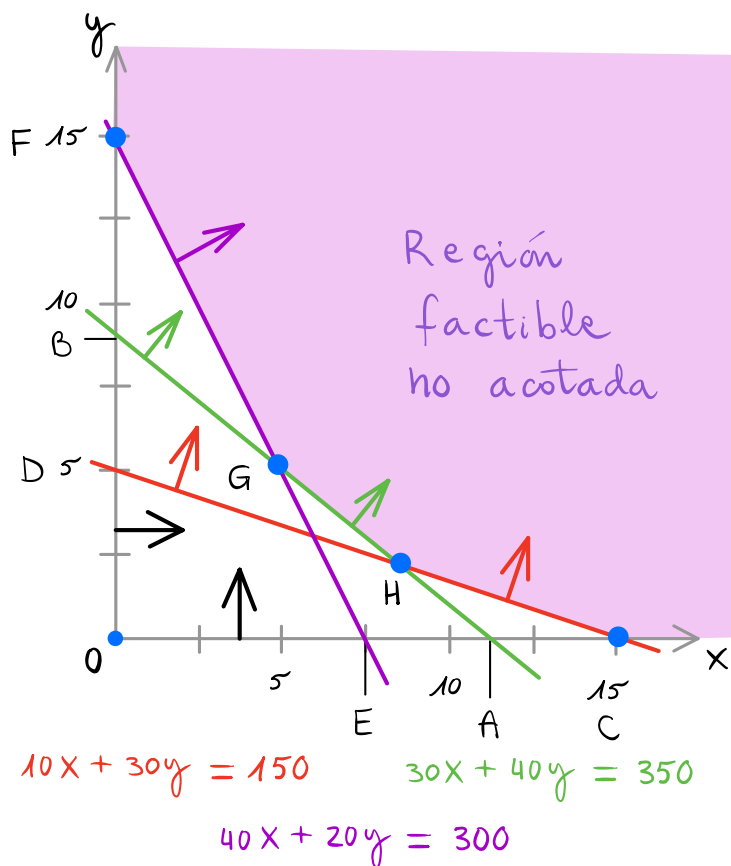
$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=15 \Rightarrow (15, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=5 \Rightarrow (0, 5) \text{ D}$$

$$40x + 20y = 300$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=7,5 \Rightarrow (7,5, 0) \text{ E}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=15 \Rightarrow (0, 15) \text{ F}$$



Por último, busco la intersección entre las restricciones. Para ahorrar trabajo, me fijo sólo en las intersecciones que me hacen falta. Puntos G y H de la región factible:

$$\begin{cases} 40x + 20y = 300 \\ 30x + 40y = 350 \end{cases} \cdot 2(-) \quad \begin{cases} 10x + 30y = 150 \\ 30x + 40y = 350 \end{cases} \cdot 3(-)$$

$$\begin{cases} 80x + 40y = 600 \\ 30x + 40y = 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50x = 250 \Rightarrow x = 5, y = 5 \\ 50y = 100 \Rightarrow y = 2, x = 9 \end{cases}$$

(5,5) G (9,2) H

La función objetivo es: $f(x,y) = 3x + 4y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: F, G, H, C

(0,15) F $\Rightarrow f(0,15) = 60 \text{ €}$

(5,5) G $\Rightarrow f(5,5) = 35 \text{ €}$

(9,2) H $\Rightarrow f(9,2) = 35 \text{ €}$

(15,0) C $\Rightarrow f(15,0) = 45 \text{ €}$

Tenemos 2 soluciones, lo que significa que también son solución los infinitos puntos del segmento GH.

No obstante, como sólo nos sirven números enteros, sólo sirven las siguientes soluciones:

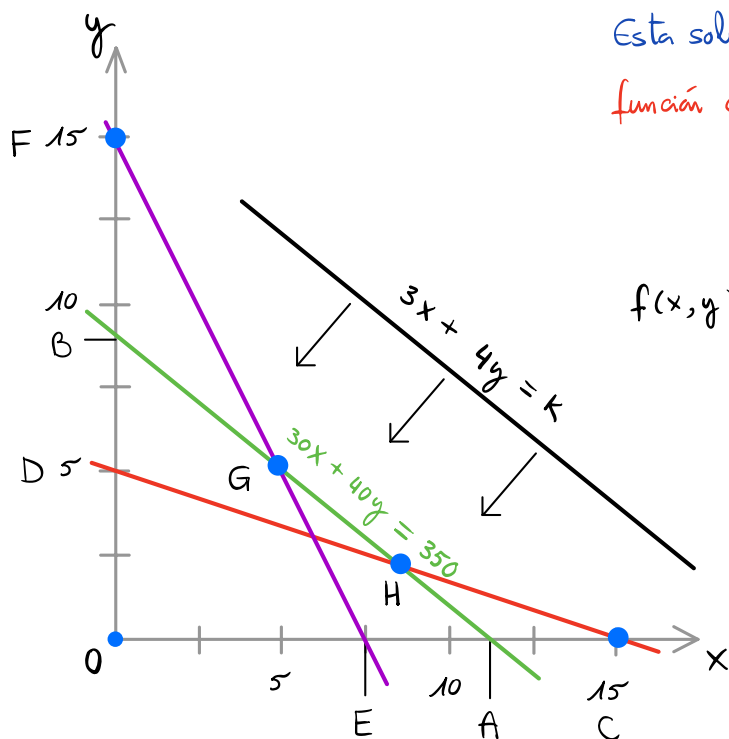
$$f(x,y) = 3x + 4y = 35, \quad y = \frac{35 - 3x}{4}$$

$x = 5, 6, 7, 8, 9$ valores enteros de x entre 5 y 9.

$y = 5, x, x, x, 2$ Puse un aspa (no válido) en las soluciones para y no enteras.

Compraremos 5 botes de cada tipo con un coste mínimo de 35 €, o bien

9 botes de tipo A y 2 botes de tipo B con un coste mínimo de 35 €



Esta solución múltiple se debe a que la gráfica de la función objetivo es paralela a la recta que une G y H

$$30x + 40y = 350 \quad (\text{Línea G y H})$$

$$3x + 4y = 35 \quad (\div 10)$$

$$f(x,y) = 3x + 4y = K \quad (\text{objetivo})$$

Se le pueden ir dando valores a K hasta que la recta (objetivo) alcance el mínimo.

Gráficamente, cambiar el valor de K equivale a deslizar la recta. (Comprobar con Desmos o Geogebra)

6. Los animales de una granja deben tomar, al menos, 60 mg de vitamina A y, al menos, 90 mg de vitamina B. Existen dos compuestos con estas vitaminas. El compuesto X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de B, y cada dosis cuesta 0,50 €. El compuesto Y contiene 10 mg de cada vitamina, y cada dosis cuesta 0,30 €. Además, se recomienda no tomar más de 8 dosis diarias. Calcula qué dosis tiene que tomar para que el coste sea mínimo.

Llamaremos :
 $x \equiv$ botes tipo X
 $y \equiv$ botes tipo Y

Preparado	Vitamina A	Vitamina B	Coste
A (x)	10	15	0,5€
B (y)	10	10	0,3€
Mínimos	60	90	

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{0,5x}_A + \underbrace{0,3y}_B \text{ (coste mínimo)}$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vitamina A } 10x + 10y \geq 60 \\ \text{Vitamina B } 15x + 10y \geq 90 \\ x + y \leq 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \text{ (No negatividad)}$$

Para encontrar la región factible, graficamos las rectas que delimitan las restricciones:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$10x + 10y = 60$$

Si $y=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow (6,0)$ A
 Si $x=0 \Rightarrow y=6 \Rightarrow (0,6)$ B

$$15x + 10y = 90$$

Si $y=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow (6,0)$ A
 Si $x=0 \Rightarrow y=9 \Rightarrow (0,9)$ C

$$x + y = 8$$

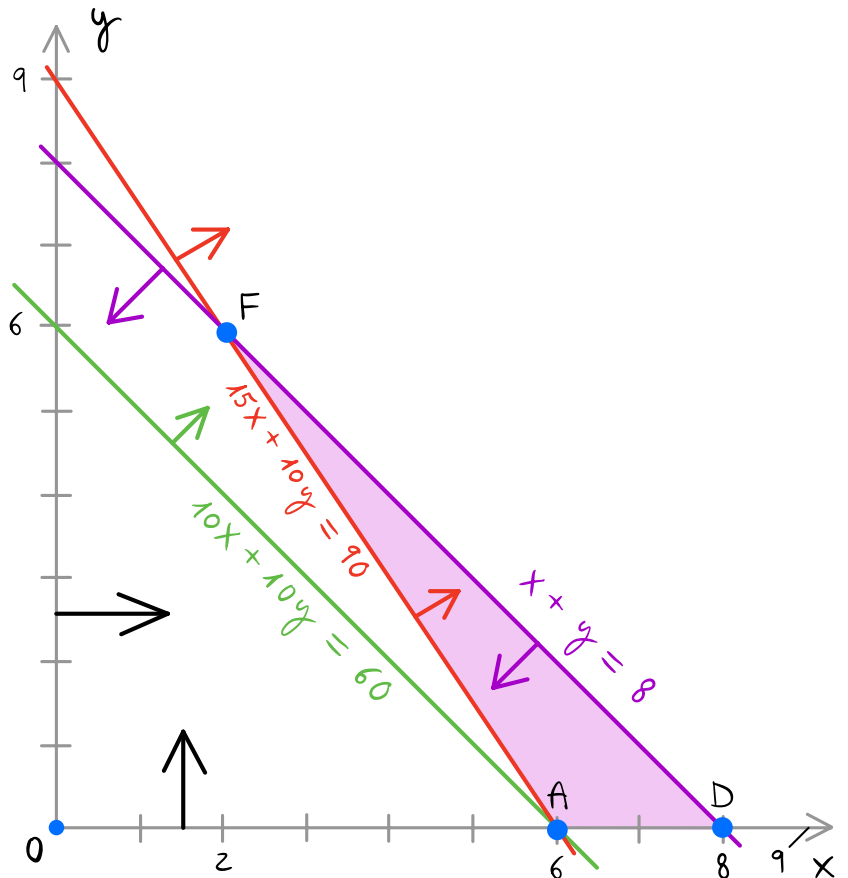
Si $y=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow (8,0)$ D
 Si $x=0 \Rightarrow y=8 \Rightarrow (0,8)$ E

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Para ahorrar trabajo, me fijo sólo en las intersecciones que me hacen falta: F

$$\left. \begin{array}{l} 15x + 10y = 90 \\ x + y = 8 \end{array} \right\} \cdot 10$$

$$5x = 10 \Rightarrow x = 2, y = 6$$

(2,6) F



La función objetivo es: $f(x, y) = 0,5x + 0,3y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: F, A, D

$$\begin{array}{l} (6,0) A \Rightarrow f(6,0) = 3 \text{ €} \\ (8,0) D \Rightarrow f(8,0) = 4 \text{ €} \\ (2,6) F \Rightarrow f(2,6) = 2,8 \text{ €} \end{array}$$

La solución de coste mínimo consiste en 2 dosis de X y 6 dosis de Y con un coste mínimo de 2,8 €.

 **Actividades de programación lineal: Problemas no literales**

7. Considera el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$$

- Representa gráficamente la región factible.
- Calcula el máximo de la función $f(x, y) = x - 3y$

$$\begin{cases} x + 1 \geq y \Rightarrow y \leq x + 1 \text{ por debajo} \\ y \geq 1 - x \text{ por encima} \\ y \leq 13 - 3x \text{ por debajo} \end{cases}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x - y + 1 = 0$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ B}$$

$$x + y = 1$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ B}$$

$$3x + y = 13$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 13/3 \Rightarrow (4,3) \text{ D}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 13 \Rightarrow (0, 13) \text{ E}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

Necesito calcular los puntos F y G.

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} +$$

$$4x + 1 = 13 \Rightarrow x = \frac{12}{4} = 3$$

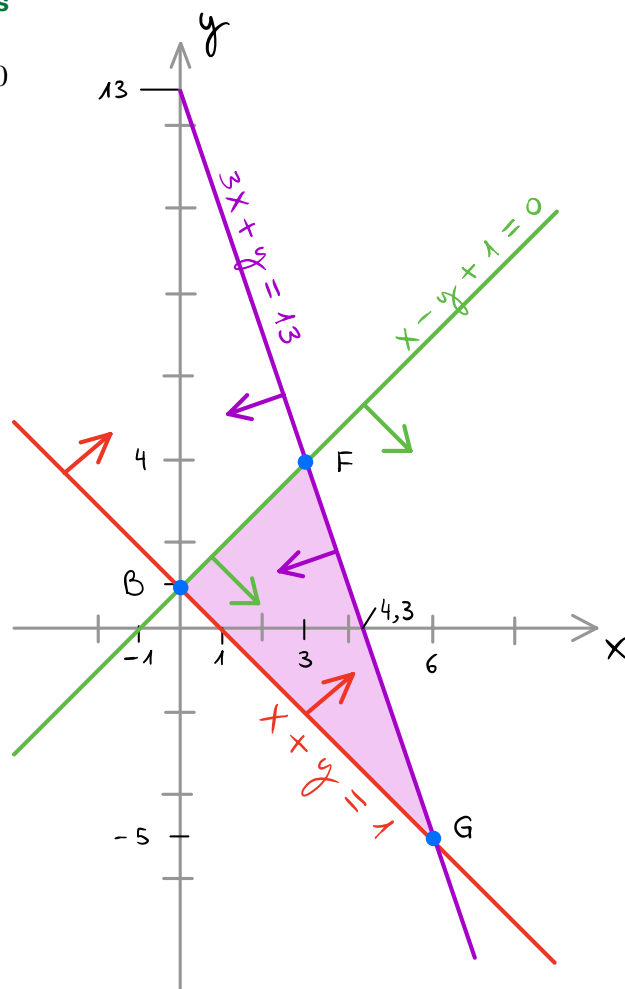
$$y = x + 1 = 4$$

$$(3, 4) \text{ F}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x + y = 1 \end{cases} -$$

$$2x = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = -5$$

$$(6, -5) \text{ G}$$



Para evaluar la región factible, evalúo cualquier punto por encima o por debajo de la recta para ver si cumple. Por ejemplo el $(0, 0)$.

$$x - y + 1 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 0. \text{ Cumple por debajo}$$

$$x + y \geq 1 \Rightarrow 0 \geq 1. \text{ Absurdo. Cumple por encima}$$

$$3x + y \leq 13 \Rightarrow 0 \leq 13. \text{ Cumple por debajo}$$

La función objetivo es: $f(x, y) = x - 3y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: B, F, G

$$\left. \begin{aligned} f(0, 1) &= -3 \\ f(3, 4) &= 3 - 3 \cdot 4 = -9 \\ f(6, -5) &= 6 - 3(-5) = 21 \end{aligned} \right\}$$

El máximo se produce en $x=6, y=-5$ (vértice G) con un valor de 21

Actividades de programación lineal: El problema del transporte

8. Se deben transportar naranjas de las ciudades de Gandía y Valencia a las ciudades de Santiago, Vigo y A Coruña. Las cantidades ofertadas son 500 kg de Gandía y 750 kg de Valencia. Las cantidades demandadas son 250 kg por Santiago, 500 kg por Vigo y 500 kg por Coruña. Los costes, en céntimos por kg, de transportar de una ciudad a otra son:

	Santiago	Vigo	A Coruña
Gandía	1	2	2
Valencia	2	2	3

Las restricciones se obtienen al imponer la condición de que todas las variables de la tabla sean positivas o nulas.

Establece la mejor forma de realizar el transporte para que el coste total sea mínimo.

¿Hay una única solución?

Primero elaboramos una tabla con la cantidad en kg que transportaremos de un lugar a otro.

	Santiago	Vigo	A Coruña	Total
Gandía	x	y	500 - x - y	500
Valencia	250 - x	500 - y	x + y	750
Total	250	500	500	1250

La función objetivo es: $f(x, y) = x + 2y + 2(500 - x - y) + 2(250 - x) + 2(500 - y) + 3(x + y)$

Operando resulta: $f(x, y) = y + 2500$

Restricciones: $500 - x - y \geq 0 \Rightarrow 500 \geq x + y \Rightarrow x + y \leq 500$
 $250 - x \geq 0 \Rightarrow 250 \geq x \Rightarrow 0 \leq x \leq 250$
 $500 - y \geq 0 \Rightarrow 500 \geq y \Rightarrow 0 \leq y \leq 500$
 $x + y \geq 0$

$x \geq 0$
 $y \geq 0$ } (No negatividad)

Para encontrar la región factible, graficamos las rectas que delimitan las restricciones:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x + y = 500$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 500 \Rightarrow (500, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 500 \Rightarrow (0, 500) \text{ B}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

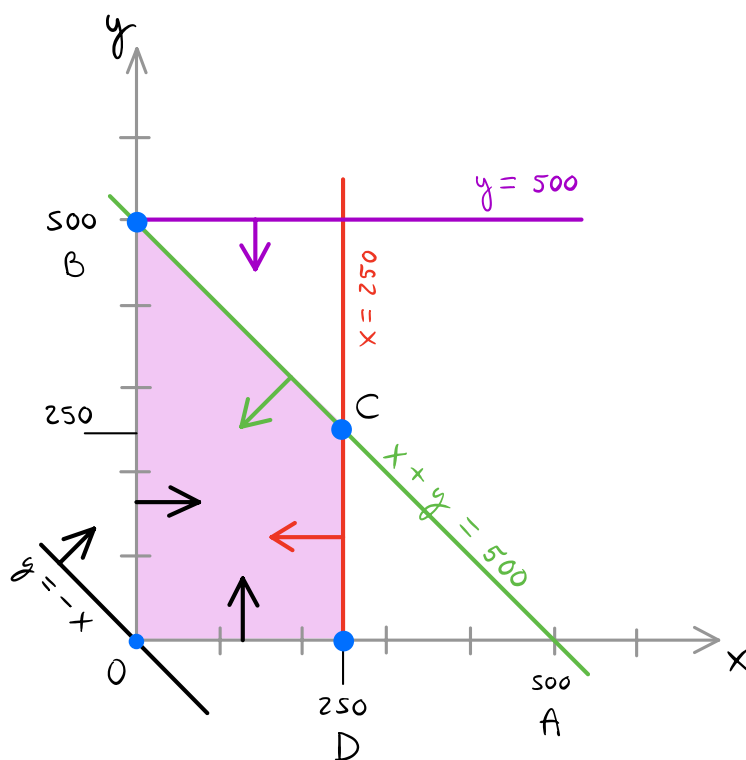
$$x = 250 \Rightarrow y = 500 - x = 250 \Rightarrow (250, 250) \text{ C}$$

$$y = 500 \Rightarrow x = 500 - y = 0 \Rightarrow (0, 500) \text{ B}$$

La restricción $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

queda fuera de la región factible

Sólo falta el punto $(250, 0) \text{ D}$



La función objetivo es: $f(x, y) = y + 2500$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: O, B, C, D

$$\left. \begin{array}{l} 0,500 \text{ B} = -10,500 = \text{C} \\ (250, 250) \text{ C} \Rightarrow f(250, 250) = 2750 \text{ C} \\ (250, 0) \text{ D} \Rightarrow f(250, 0) = 2500 \text{ C} \end{array} \right\} \text{Tenemos infinitas soluciones de coste mínimo.}$$

Solución: Todos los puntos del segmento OD: $y = 0 \text{ kg}$, pero $0 \leq x \leq 250$

	Santiago	Vigo	A Gornia
Gandía	x	0	500 - x
Valencia	250 - x	500	x

Analicemos las posibilidades; por ejemplo:

	Santiago	Vigo	A Gornia
Gandía	0	0	500
Valencia	250	500	0

	Santiago	Vigo	A Gornia
Gandía	50	0	450
Valencia	200	500	50

Hay infinitas soluciones (podemos manejar fracciones de kg).

Actividades de programación lineal: Problemas combinados de repaso

9. El terreno dedicado a una plantación de hortalizas procesa semanalmente un mínimo 16 kg de abono mineral y un mínimo de 18 kg de abono vegetal. En el mercado existen dos paquetes de abonos P_1 y P_2 . El paquete P_1 contiene 2 kg de abono mineral y 5 kg de abono vegetal y cada paquete del tipo P_2 contiene 3 kg de abono mineral y 2 kg de abono vegetal. Cada paquete de tipo P_1 cuesta 15 € y cada paquete del tipo P_2 cuesta 10 €. Calcula el número de paquetes de cada tipo que se deben adquirir para que el coste sea mínimo.

Llamaremos:

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv \text{botes tipo } P_1 \\ y &\equiv \text{botes tipo } P_2 \end{aligned} \right\}$$

Abono	Mineral	Vegetal	Coste
$P_1 (x)$	2 kg	5 kg	15 €
$P_2 (y)$	3 kg	2 kg	10 €
Mínimos	16 kg	18 kg	

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{15x}_{P_1} + \underbrace{10y}_{P_2} \text{ (coste mínimo)}$$

Restricciones:

$$\left. \begin{aligned} \text{Mineral} \quad 2x + 3y &\geq 16 \\ \text{Vegetal} \quad 5x + 2y &\geq 18 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{(No negatividad)}$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$2x + 3y = 16$$

Si $y=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow (8, 0)$ A

Si $x=0 \Rightarrow y=\frac{16}{3} \Rightarrow (0, \frac{16}{3})$ B

$$5x + 2y = 18$$

Si $y=0 \Rightarrow x=\frac{18}{5} \Rightarrow (\frac{18}{5}, 0)$ C

Si $x=0 \Rightarrow y=9 \Rightarrow (0, 9)$ D

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular el punto E.

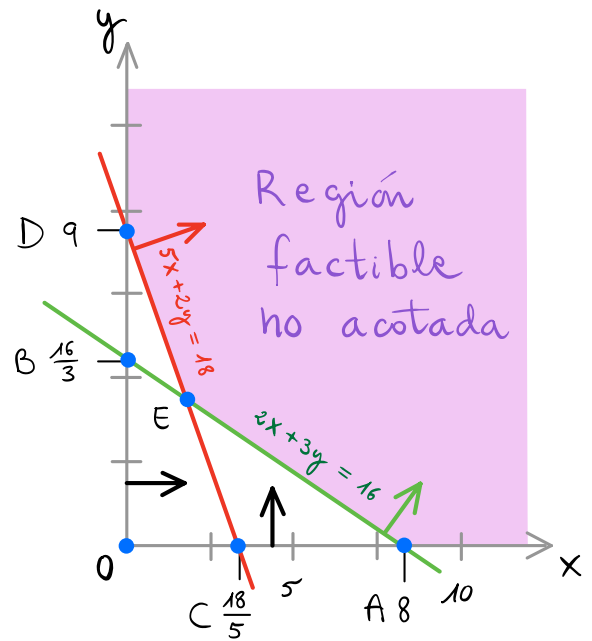
$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 16 \\ 5x + 2y &= 18 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \cdot 5 &\Rightarrow 10x + 15y = 80 \\ \cdot 2 &\Rightarrow 10x + 4y = 36 \end{aligned} \left\} \begin{aligned} - & \quad 11y = 44 \\ & y = 4 \Rightarrow x = \frac{18 - 2 \cdot 4}{5} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2, 4) E$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 15x + 10y$ (coste mínimo)

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: D, E, A

$$\left. \begin{aligned} (0, 9) D &\Rightarrow f(0, 9) = 90 \text{ €} \\ (2, 4) E &\Rightarrow f(2, 4) = 70 \text{ €} \\ (8, 0) A &\Rightarrow f(8, 0) = 120 \text{ €} \end{aligned} \right\}$$

Compraremos 2 paquetes de P_1 y 4 paquetes de P_2 con un coste mínimo de 70 €.



$$2x + 3y = 16 \quad 5x + 2y = 18$$

10. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer la reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan 100 € la tonelada independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Llamaremos :

$x \equiv$ pesqueros
 $y \equiv$ yates

Clase	Reparar (h)	Masa (Tm)	Máximo	Pago/Tm
P (x)	100	500	12	100 €
Y (y)	50	100	16	100 €
Máximo	1600			

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{50.000 \cdot x}_{\text{pesqueros}} + \underbrace{10.000 \cdot y}_{\text{yates}} \quad (\text{ingreso máximo})$$

Restricciones :

pesqueros
 yates

$$100x + 50y \leq 1600$$

$$\left. \begin{aligned} x &\leq 12 \\ y &\leq 16 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

(No negatividad)

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones** :

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$100x + 50y = 1600$$

$$10x + 5y = 160$$

$$2x + y = 32$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=16 \Rightarrow (16, 0) \text{ A}$$

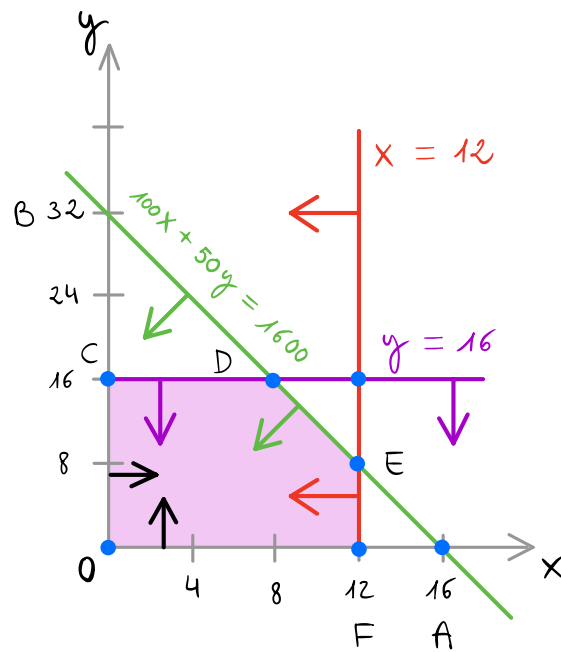
$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=32 \Rightarrow (0, 32) \text{ B}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular los puntos C, D y E.

$$\left. \begin{aligned} 100x + 50y &= 1600 \\ y &= 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{1600 - 50 \cdot 16}{100} = 8 \Rightarrow (8, 16) \text{ D}$$

$$\left. \begin{aligned} 100x + 50y &= 1600 \\ x &= 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{1600 - 100 \cdot 12}{50} = 8 \Rightarrow (12, 8) \text{ E}$$

$$\left. \begin{aligned} &\Rightarrow (0, 16) \text{ C} \\ &\Rightarrow (12, 0) \text{ F} \end{aligned} \right\}$$



La **función objetivo** es: $f(x, y) = 50.000 \cdot x + 10.000 \cdot y$ (ingreso máximo)

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : O, C, D, E, F

$$(0, 16) \text{ C} \Rightarrow f(0, 16) = 160.000 \text{ €}$$

$$(12, 8) \text{ E} \Rightarrow f(12, 8) = 680.000 \text{ €}$$

$$(8, 16) \text{ D} \Rightarrow f(8, 16) = 560.000 \text{ €}$$

$$(12, 0) \text{ F} \Rightarrow f(12, 0) = 600.000 \text{ €}$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{O, } f(0, 0) = 0$$

Conseguimos el máximo beneficio reparando 12 pesqueros y 8 yates : Ingresaríamos 680.000 €

11. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 & \text{por encima} \\ 3x - 4y \leq 6 & \text{por encima} \\ 3x + 4y \leq 30 & \text{por debajo} \\ 3x - 2y \geq -6 & \text{por debajo} \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
 b) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$3x + 2y = 6$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (0, 3) \text{ B}$$

$$3x - 4y = 6$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \Rightarrow (0, -\frac{3}{2}) \text{ C}$$

$$3x + 4y = 30$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=10 \Rightarrow (10, 0) \text{ D}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{15}{2} \Rightarrow (0, \frac{15}{2}) \text{ E}$$

$$3x - 2y = -6$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2, 0) \text{ F}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (0, 3) \text{ B}$$

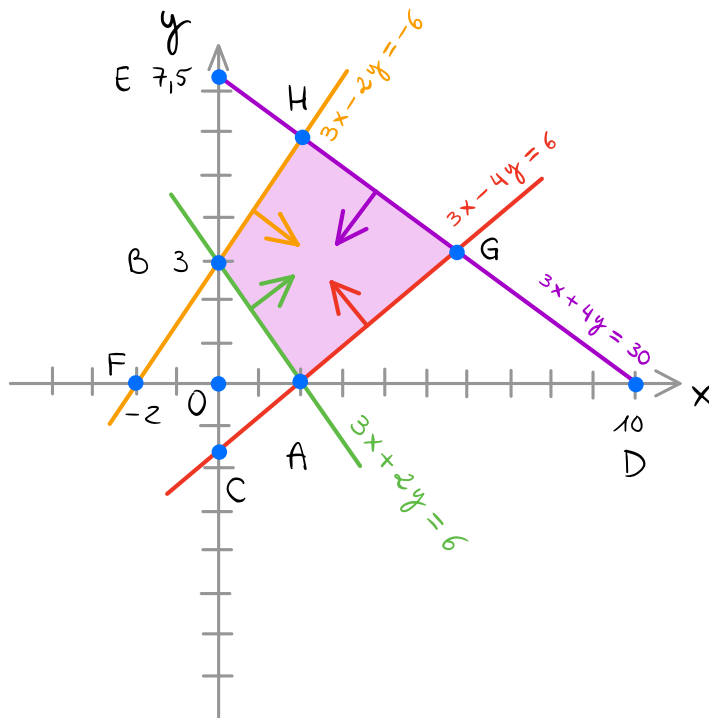
Por último, busco la intersección entre las restricciones. G, H

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 30 \\ 3x - 4y = 6 \end{array} \right\} - \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8y = 24 \Rightarrow y = 3 \\ x = \frac{6 + 4 \cdot 3}{3} = 6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (6, 3) \text{ G}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 30 \\ 3x - 2y = -6 \end{array} \right\} - \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6y = 36 \Rightarrow y = 6 \\ x = \frac{-6 + 2 \cdot 6}{3} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (2, 6) \text{ H}$$



$$3x + 2y \geq 6 \quad , \quad y \geq -\frac{3}{2}x + 3 \quad , \quad \text{por encima}$$

$$3x - 4y \leq 6 \quad , \quad y \geq \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \quad , \quad \text{por encima}$$

$$3x + 4y \leq 30 \quad , \quad y \leq -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2} \quad , \quad \text{por debajo}$$

$$3x - 2y \geq -6 \quad , \quad y \leq \frac{3}{2}x + 3 \quad , \quad \text{por debajo}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = x + 2y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: A, B, G, H

$$\left. \begin{array}{l} f(2, 0) = 2 \\ f(0, 3) = 6 \\ f(6, 3) = 12 \\ f(2, 6) = 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{El mínimo se produce} \\ \text{en } x=2, y=0 \text{ (vértice A)} \\ \text{Valor: } 2 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{El máximo se produce} \\ \text{en } x=2, y=6 \text{ (vértice H)} \\ \text{Valor: } 14 \end{array} \right\}$

12. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 & \text{por debajo} \\ 3x + y \geq 2 & \text{por encima} \\ 3x - 2y \leq 5 & \text{por encima} \\ x \geq 0 & \text{por encima / a su derecha} \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
 b) Calcula el mínimo de la función $f(x, y) = 9x + y$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x + y = 5$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow (5, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=5 \Rightarrow (0, 5) \text{ B}$$

$$3x + y = 2$$

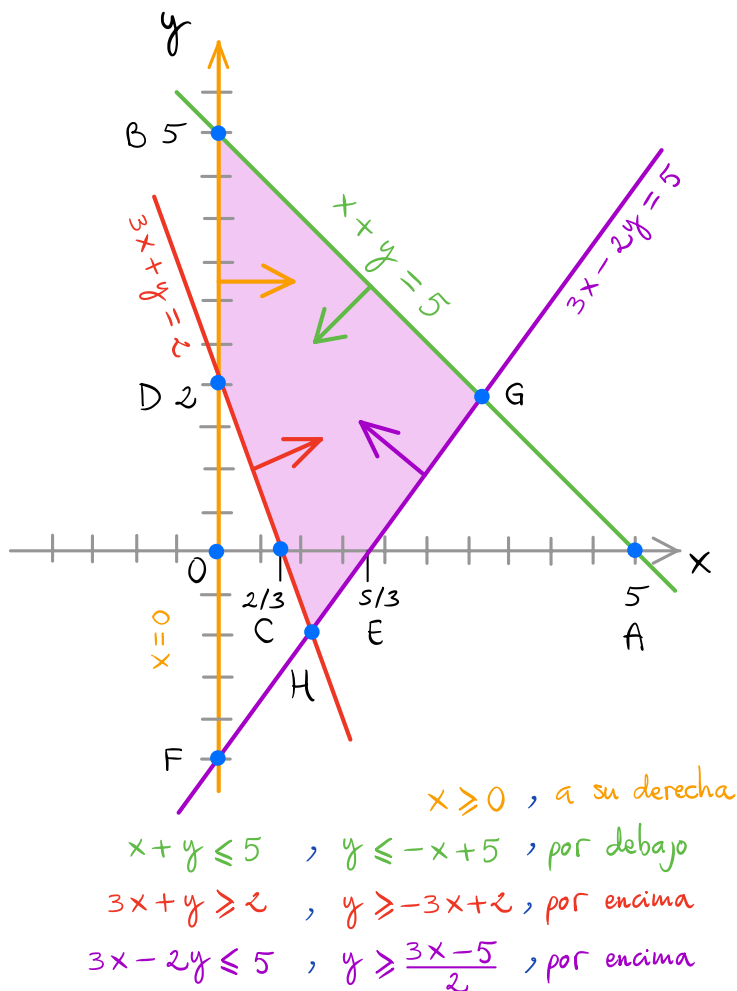
$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, 0\right) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (0, 2) \text{ D}$$

$$3x - 2y = 5$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}, 0\right) \text{ E}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \Rightarrow \left(0, -\frac{5}{2}\right) \text{ F}$$



$x \geq 0$, a su derecha

$x + y \leq 5$, $y \leq -x + 5$, por debajo

$3x + y \geq 2$, $y \geq -3x + 2$, por encima

$3x - 2y \leq 5$, $y \geq \frac{3x - 5}{2}$, por encima

Por último, busco la intersección entre las restricciones. G, H

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x = 15 \Rightarrow x = 3 \\ y = 5 - x = 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (3, 2) \text{ G}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 2 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right\} - \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y = -3 \Rightarrow y = -1 \\ x = \frac{2 - y}{3} = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (1, -1) \text{ H}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 9x + y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: D, B, G, H

$$f(0, 2) = 2$$

$$f(0, 5) = 5$$

$$f(3, 2) = 29$$

$$f(1, -1) = 8$$

El mínimo se produce en $x=0, y=2$ (vértice D)
 Valor: 2

El máximo se produce en $x=3, y=2$ (vértice G)
 Valor: 29

 **Actividades de programación lineal: Problemas de exámenes de 2º de Bachillerato**

13. Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe de fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:

El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas. El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.

Resuelve el problema y razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

Tipo	Tiempo (h)	Coste material	Venta
Mesa (x)	2	4	20 €
Silla (y)	3	2	30 €
Máximo	10	12	

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x + y = 4$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow (4,0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0,4) \text{ B}$$

$$2x + 3y = 10$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow (5,0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=\frac{10}{3} \Rightarrow (0, \frac{10}{3}) \text{ D}$$

$$4x + 2y = 12$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3,0) \text{ E}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=6 \Rightarrow (0,6) \text{ F}$$

El punto de intersección G es el mismo para todas las rectas

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + 3y = 10 \end{array} \right\} y = 4 - x$$

$$2x + 3(4 - x) = 10 \Rightarrow x = 2, y = 2 \Rightarrow G$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 4x + 2y = 12 \end{array} \right\} y = 4 - x$$

$$4x + 2(4 - x) = 12 \Rightarrow x = 2, y = 2 \Rightarrow G$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 10 \\ 4x + 2y = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ y = 6 - 2x \end{array}$$

$$2x + 3(6 - 2x) = 10 \Rightarrow x = 2, y = 2 \Rightarrow G$$

Llamaremos :
 $x \equiv$ Mesas
 $y \equiv$ Sillas

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

(No negatividad)

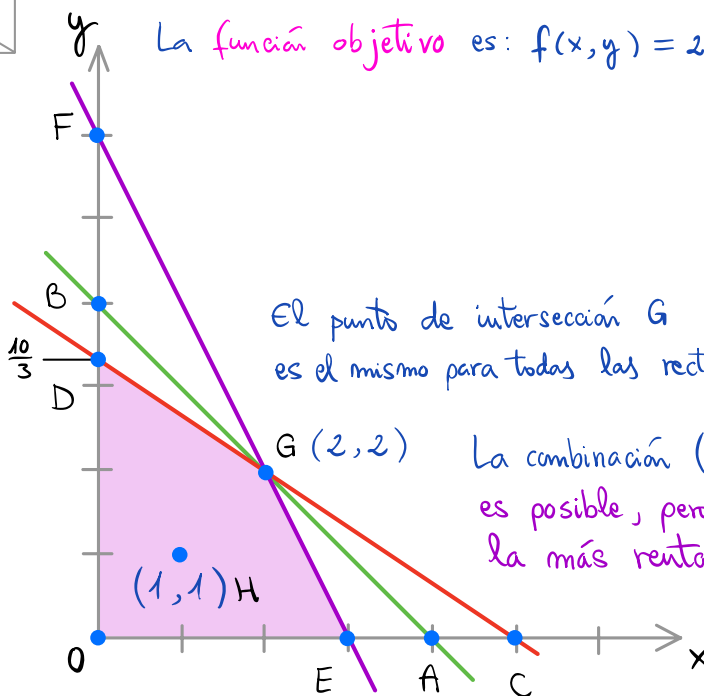
$$x + y \leq 4 \text{ unidades}$$

$$2x + 3y \leq 10 \text{ horas}$$

$$4x + 2y \leq 12 \text{ € material}$$

Restricciones

La función objetivo es: $f(x, y) = 20x + 30y$



El punto de intersección G es el mismo para todas las rectas

La combinación (1,1)H es posible, pero no es la más rentable

La función objetivo es: $f(x, y) = 20x + 30y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : O, D, G, E

$$f(0, 0) = 0 \text{ € (irrelevante)}$$

$$f(0, \frac{10}{3}) = 30 \cdot \frac{10}{3} = 100 \text{ € Máximo}$$

$$f(2, 2) = 20 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 100 \text{ € Máximo}$$

$$f(3, 0) = 20 \cdot 3 = 60 \text{ €}$$

Es solución todo el segmento \overline{DG} , pero sólo el punto G(2 mesas, 2 sillas) son números enteros.

14. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal:
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ -2 \leq 2x - y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
- Justifica si el punto $P(-1/2, 1/2)$ pertenece a la región.
- Calcula el punto o puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = -2x + 5y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 12 \\ -2 \leq 2x - y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 2x - y = -2 \\ 2x - y = 4 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$2x + 3y = 12$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow (6,0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0,4) \text{ B}$$

$$2x - y = -2$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1,0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (0,2) \text{ D}$$

$$2x - y = 4$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0) \text{ E}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow (0,-4) \text{ F}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular los puntos G y H.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 2x - y = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \\ x = \frac{1}{2}(-2 + \frac{7}{2}) = \frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{3}{4}, \frac{7}{2}) \text{ G} \end{array}$$

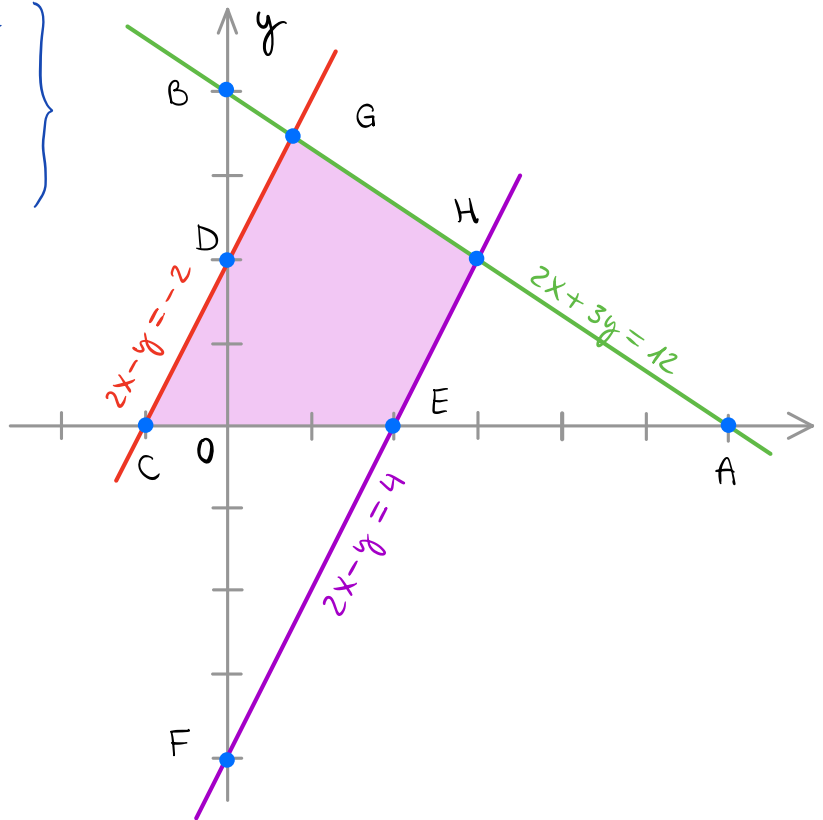
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 2x - y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4y = 8 \Rightarrow y = 2 \\ x = \frac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow (3,2) \text{ H} \end{array}$$

b) $P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Veamos si cumple las restricciones:

$$2(-\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2}) \leq 12 \quad \checkmark \quad \frac{1}{2} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$-2 \leq 2(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \leq 4 \quad \checkmark$$

▷ verifica las 3 restricciones, luego pertenece a la región factible.



La función objetivo es:

$$f(x, y) = -2x + 5y$$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: C, E, G, H

$$f(-1, 0) = 2$$

$$f(2, 0) = -4 \text{ Mínimo}$$

$$f(\frac{3}{4}, \frac{7}{2}) = 16 \text{ Máximo}$$

$$f(3, 2) = 4$$

15. En una fábrica se construyen dos tipos de aparatos: A y B. Ambos tipos de aparatos han de pasar por la secciones X e Y. Cada sección trabaja como máximo 100 horas por semana. Cada aparato A lleva 3 horas de la sección X y una de la sección Y. Cada aparato B lleva una hora de la sección X y dos de la sección Y. Cada aparato A se vende por 100 € y cada aparato B se vende a 150 €. Halla cuántos aparatos de cada tipo se producirán para que el ingreso por ventas sea máximo.

Llamaremos : $x \equiv$ aparatos tipo A }
 $y \equiv$ aparatos tipo B }

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{100x}_A + \underbrace{150y}_B$$

Restricciones:
$$\left. \begin{aligned} 3x + y &\leq 100 \\ x + 2y &\leq 100 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{No negatividad})$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

$$\left. \begin{aligned} 3x + y = 100 &\Rightarrow y = 100 - 3x \\ x + 2y = 100 &\Rightarrow y = \frac{100 - x}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x = 0 \\ y = 0 \end{aligned}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$3x + y = 100$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = \frac{100}{3} \Rightarrow \left(\frac{100}{3}, 0\right) \text{ A}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 100 \Rightarrow (0, 100) \text{ B}$$

$$x + 2y = 100$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow (100, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 50 \Rightarrow (0, 50) \text{ D}$$

Aparato	A	B	Horas semanales
Sección X	3	1	100
Sección Y	1	2	100
Precio venta	100 €	150 €	—

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

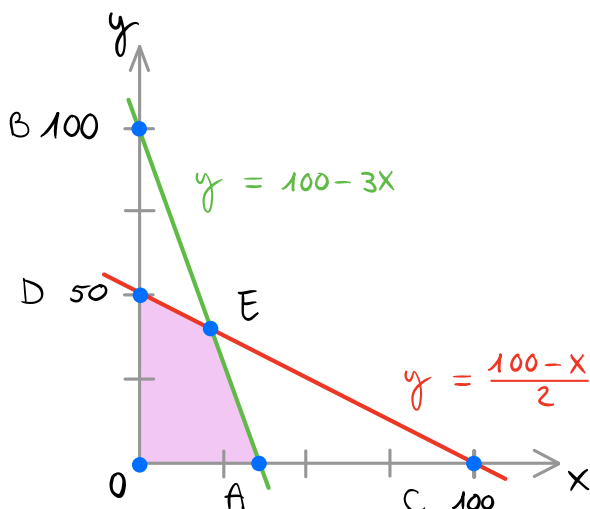
$$\left. \begin{aligned} y &= 100 - 3x \\ y &= \frac{100 - x}{2} \end{aligned} \right\} 100 - 3x = \frac{100 - x}{2}$$

$$200 - 6x = 100 - x \Rightarrow 5x = 100$$

$$x = 20 \Rightarrow y = 100 - 3 \cdot 20 = 40$$

$$(20, 40) \text{ E}$$

La última intersección es $O(0,0)$



La **función objetivo** es:

$$f(x, y) = 100x + 150y$$

Sustituimos los vértices de la **región factible** en la función objetivo : O, D, E, A

$$f(0,0) = 0 \text{ € (No)}, f(0,50) = 7500 \text{ €},$$

$$f(20,40) = 8000 \text{ €}, f\left(\frac{100}{3}, 0\right) \approx 3.333 \text{ €}$$

Produciremos 20 tipo A y 40 tipo B

16. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 & \Rightarrow y \leq x + 1 \text{ por debajo} \\ x + y \geq 1 & \Rightarrow y \geq 1 - x \text{ por encima} \\ 3x + y \leq 13 & \Rightarrow y \leq 13 - 3x \text{ por debajo} \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
 b) Verifica si el punto $P(-1, 2)$ pertenece a la región factible.
 c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$.

a) Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x - y + 1 = 0$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ B}$$

$$x + y = 1$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0) \text{ C}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ B}$$

$$3x + y = 13$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 13/3 \Rightarrow (4,3) \text{ D}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 13 \Rightarrow (0, 13) \text{ E}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

Necesito calcular los puntos F y G .

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 13 \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \right\} + \quad \begin{array}{l} 4x + 1 = 13 \Rightarrow \\ x = \frac{12}{4} = 3 \\ y = x + 1 = 4 \end{array}$$

$$(3, 4) \text{ F}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 13 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} - \quad \begin{array}{l} 2x = 12 \Rightarrow \\ x = 6 \Rightarrow \\ y = -5 \end{array}$$

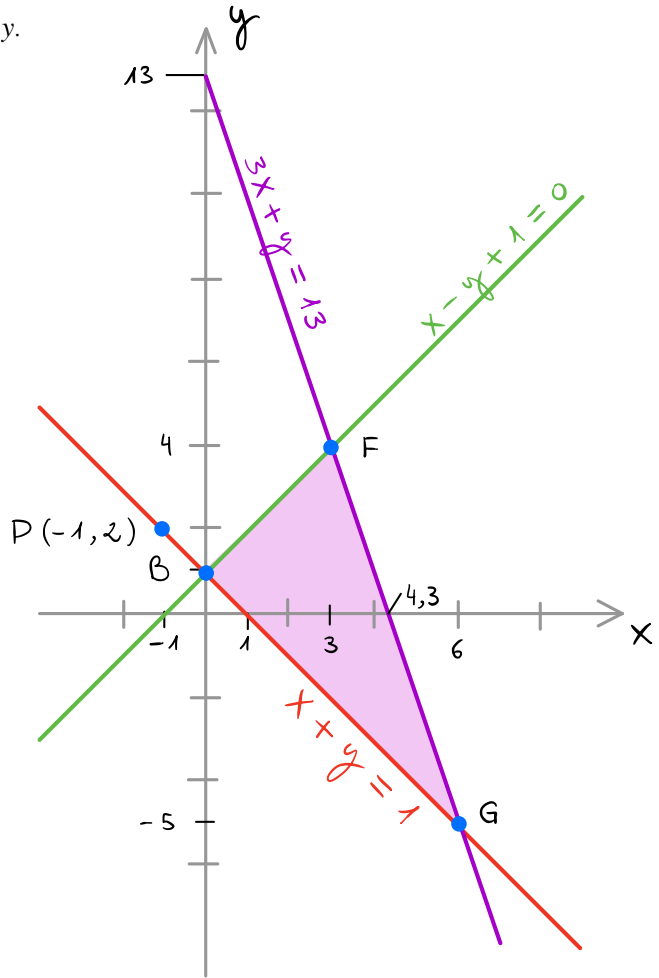
$$(6, -5) \text{ G}$$

b) Comprobamos el punto $P(-1, 2)$ en todas las restricciones.

$$x - y + 1 \geq 0$$

$$-1 - 2 + 1 = -2 \not\geq 0$$

No cumple: No pertenece a la región factible.



c) La función objetivo es: $f(x, y) = x - 3y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: B, F, G

$$f(0, 1) = -3$$

$$f(3, 4) = 3 - 3 \cdot 4 = -9$$

$$f(6, -5) = 6 - 3(-5) = 21$$

El máximo se produce en $x=6, y=-5$ (vértice G) con un valor de 21

El mínimo se produce en $x=3, y=4$ (vértice F) con un valor de -9

17. Una fábrica elabora dos tipos de productos, A y B. El tipo A necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 € por unidad. El tipo B necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 € por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de A y de B que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

Producto	Obreros	Horas	Beneficios / Ud.
A (x)	2	20	1.500 €
B (y)	3	10	1.000 €
Máximos	60	480	

Llamaremos : $x \equiv$ Unidades tipo A
 $y \equiv$ Unidades tipo B

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{1500x}_A + \underbrace{1000y}_B \quad (\text{máximo beneficio})$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Producto A} \quad 2x + 3y \leq 60 \\ \text{Producto B} \quad 20x + 10y \leq 480 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \quad (\text{No negatividad})$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:
 Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$2x + 3y = 60$$

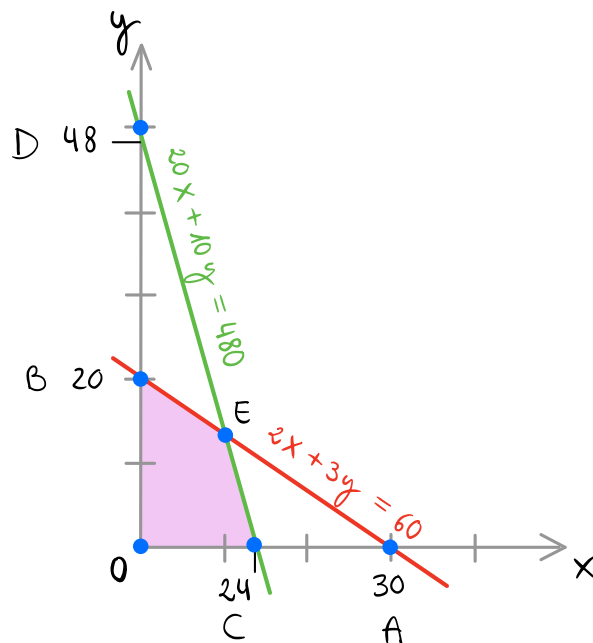
Si $y=0 \Rightarrow x=30 \Rightarrow (30, 0)$ A

Si $x=0 \Rightarrow y=20 \Rightarrow (0, 20)$ B

$$20x + 10y = 480$$

Si $y=0 \Rightarrow x=24 \Rightarrow (24, 0)$ C

Si $x=0 \Rightarrow y=48 \Rightarrow (0, 48)$ D



Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular el punto E.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 60 \\ 20x + 10y = 480 \end{array} \right\} \cdot 10$$

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 30y = 600 \\ 20x + 10y = 480 \end{array} \right\} -$$

$$20y = 120 \Rightarrow y = 6$$

$$x = \frac{60 - 3y}{2} = \frac{60 - 3 \cdot 6}{2} = 21$$

$$\Rightarrow (21, 6) \text{ E}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 1500x + 1000y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : O, B, E, C

$$\left. \begin{array}{l} f(0, 0) = 0 \text{ €} \\ f(0, 20) = 20.000 \text{ €} \\ f(21, 6) = 37.500 \text{ €} \\ f(24, 0) = 36.000 \text{ €} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{El máximo se produce en} \\ x = 21, y = 6 \text{ (vértice E)} \end{array}$$

Produciremos 21 productos del tipo A y 6 productos del tipo B con un beneficio máximo de 37.500 €

18. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq -6 & y \geq \frac{-6-3x}{4} \text{ por encima} \\ -x + 2y \leq 2 & y \leq \frac{2+x}{2} \text{ por debajo} \\ x \leq 2 & x \leq 2 \text{ a la izquierda} \end{cases}$$

- Representa gráficamente la región factible.
- Verifica si el punto $P(-1,1)$ pertenece a la región factible.
- Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = -2x + 4y$.

a) Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$3x + 4y = -6$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow (0, -\frac{3}{2}) \text{ B}$$

$$-x + 2y = 2$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ C}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

Necesito calcular los puntos D y E.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = -6 \\ x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, -3) \text{ D}$$

$$y = \frac{-6-3x}{4} = \frac{-6-3 \cdot 2}{4} = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + 2y = 2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 2) \text{ E}$$

$$y = \frac{2+x}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

b) Comprobamos el punto $P(-1,1)$ en todas las restricciones.

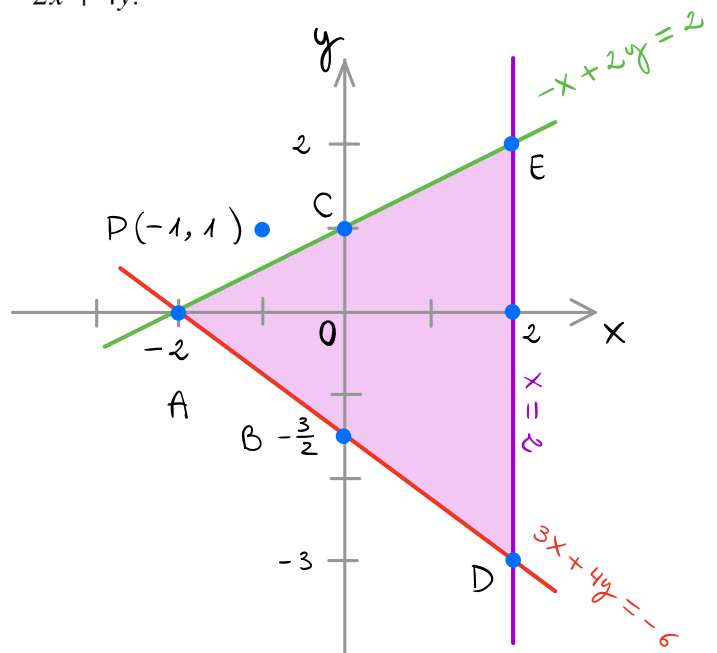
$$3x + 4y \geq -6$$

$$3(-1) + 4 \cdot 1 = 1 \geq -6$$

$$-x + 2y \leq 2$$

$$-(-1) + 2 \cdot 1 = 3 \not\leq 2 \text{ No cumple}$$

No pertenece a la región factible.



c) La función objetivo es: $f(x,y) = -2x + 4y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: A, D, E

$$f(-2, 0) = -2 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 = 4$$

$$f(2, -3) = -2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -16$$

$$f(2, 2) = -2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 4$$

El mínimo se produce en $x=2, y=-3$ (vértice D) con un valor de -16

El máximo se produce en los vértices A y E con un valor de 4

$(-2, 0) \text{ A}$
 $(2, 2) \text{ E}$ } Son solución todos los puntos del segmento \overline{AE} (infinitas soluciones)

19. Vamos a invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en A más del doble que en B. El producto A proporciona un beneficio del 10% y B del 5%. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

Producto	Beneficios	Mínimo
A (x)	10% = 0,1	
B (y)	5% = 0,05	3.000 €
Máximo	12.000 €	

Llamaremos : $x \equiv$ Inversión en A
 $y \equiv$ Inversión en B

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{0,1 \cdot x}_A + \underbrace{0,05 \cdot y}_B \quad (\text{máximo beneficio})$$

Restriciones: $y \geq 3.000$
 $x \leq 2y$
 $x + y \leq 12.000$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{(No negatividad)}$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:
 Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$x = 2y$ Si $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$ O

Si $x = 12.000 \Rightarrow y = 6.000 \Rightarrow (12.000, 6.000)$ A

$x + y = 12.000$

Si $y = 0 \Rightarrow x = 12.000 \Rightarrow (12.000, 0)$ B

Si $x = 0 \Rightarrow y = 12.000 \Rightarrow (0, 12.000)$ C

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Necesito calcular los puntos

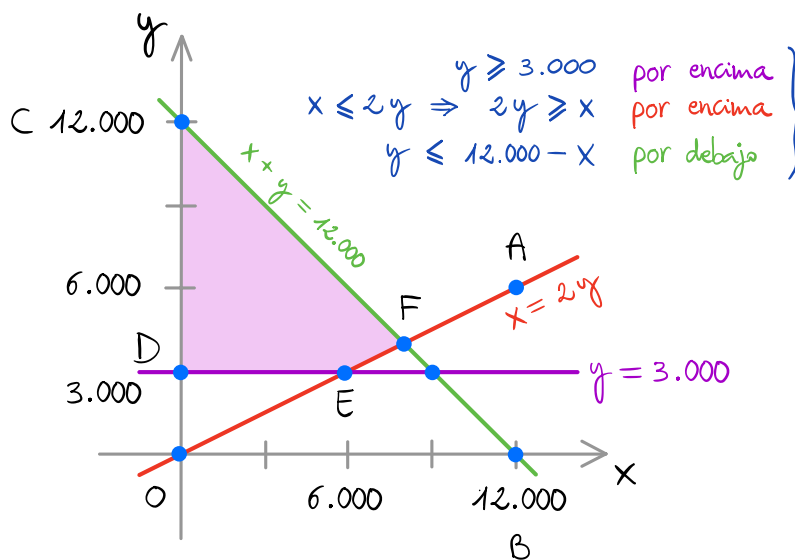
D, E, F $(0, 3000)$ D

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ y = 3.000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 6.000 \\ (6.000, 3.000) \text{ E} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x + y = 12.000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2y + y = 12.000 \\ y = 4.000 \\ x = 8.000 \end{array}$$

$y = \frac{12.000}{3} = 4.000 \Rightarrow x = 8.000$

$(8.000, 4.000)$ F



La **función objetivo** es: $f(x, y) = 0,1 \cdot x + 0,05 \cdot y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : C, D, E, F

$$\left. \begin{array}{l} f(0, 12.000) = 600 \text{ €} \\ f(0, 3000) = 150 \text{ €} \\ f(6.000, 3.000) = 750 \text{ €} \\ f(8.000, 4.000) = 1.000 \text{ €} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{El máximo se produce} \\ \text{en } \begin{cases} x = 8.000 \\ y = 4.000 \end{cases} \\ \text{(vértice F)} \end{array}$$

Si invertimos 8.000 € en el tipo A y 4.000 € en el tipo B, obtendremos un beneficio máximo de 1.000 €.

20. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -6 \\ 7x + 4y \leq 5 \\ -3x + 2y \leq 9 \end{cases}$$

Para evaluar la región factible, evalúo cualquier punto por encima o por debajo de la recta para ver si cumple. Por ejemplo el $(0,0)$

- Representa gráficamente la región factible.
- Verifica analíticamente si el punto $P(-1,2)$ pertenece a la región factible.
- Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 15x - 10y$.

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$2x + 3y = -6$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (0, -2) \text{ A}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 0) \text{ B}$$

$$7x + 4y = 5$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow (0, \frac{5}{4}) \text{ C}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = \frac{5}{7} \Rightarrow (\frac{5}{7}, 0) \text{ D}$$

$$-3x + 2y = 9$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{9}{2} \Rightarrow (0, \frac{9}{2}) \text{ E}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 0) \text{ F=B}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

Necesito calcular los puntos G y H.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = -6 \\ 7x + 4y = 5 \end{array} \right\} \cdot \begin{array}{l} 7 \\ -2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 14x + 21y = -42 \\ 14x + 8y = 10 \end{array} \right\} - \Rightarrow$$

$$13y = -52 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = 3$$

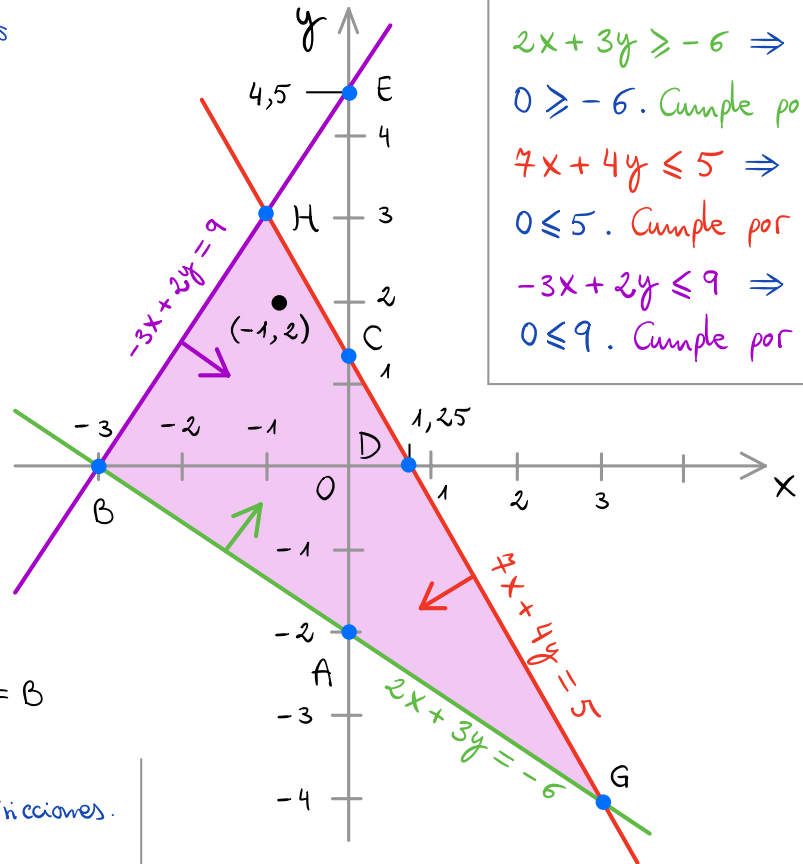
$$(3, -4) \text{ G}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 4y = 5 \\ -3x + 2y = 9 \end{array} \right\} \cdot \begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 4y = 5 \\ -6x + 4y = 18 \end{array} \right\} -$$

$$13x = -13 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 3$$

$$(-1, 3) \text{ H}$$

El punto $(-1, 2)$ está dentro de la región factible. Cumple todas las condiciones.



$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq -6 \Rightarrow \\ 0 &\geq -6. \text{ Cumple por encima} \\ 7x + 4y &\leq 5 \Rightarrow \\ 0 &\leq 5. \text{ Cumple por debajo} \\ -3x + 2y &\leq 9 \Rightarrow \\ 0 &\leq 9. \text{ Cumple por debajo} \end{aligned}$$

La función objetivo es: $f(x,y) = 15x - 10y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: B, H, G

$$B, f(-3, 0) = 15 \cdot (-3) = -45$$

$$H, f(-1, 3) = -15 - 30 = -45$$

$$G, f(3, -4) = 15 \cdot 3 - 10 \cdot (-4) = 85$$

La función alcanza un máximo en el vértice $G(3, -4)$ con un valor de 85.

La función alcanza un mínimo en todo el segmento que une los vértices $B(-3, 0)$ y $H(-1, 3)$ con un valor de -45.

21. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 €. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 €.

¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos?
Determina los ingresos.

Llamaremos : $x \equiv n^{\circ}$ paquetes de A
 $y \equiv n^{\circ}$ paquetes de B

Función objetivo : $f(x,y) = \underbrace{1,5x}_A + \underbrace{2y}_B$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 30 \\ 2x + y \leq 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \quad (\text{No negatividad})$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$x + y = 10$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=10 \Rightarrow (0, 10) \text{ A}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=10 \Rightarrow (10, 0) \text{ B}$$

$$2x + 4y = 30$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{15}{2} \Rightarrow (0, \frac{15}{2}) \text{ C}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow (15, 0) \text{ D}$$

$$2x + y = 18 \text{ Aruebo puntos distintos del 0.}$$

$$\text{Si } x=5 \Rightarrow y=8 \Rightarrow (5, 8) \text{ E}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=9 \Rightarrow (9, 0) \text{ F}$$

Paquete	Pipas	Chicles	Bombones	Precio €
A(x)	1	2	2	1,5
B(y)	1	4	1	2
Máximo	10	30	18	

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 30 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ 2x + 4y = 30 \end{array} \quad -$$

$$2y = 10 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 5, (5, 5) \text{ G}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ 2x + y = 18 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ 2x + y = 18 \end{array} \quad -$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 8, (8, 2) \text{ H}$$

La **función objetivo** es: $f(x,y) = 1,5x + 2y$

Sustituimos los vértices de la región

factible en la función objetivo : 0, C, G, H, F

$$0, f(0,0) = 0 \text{ €}$$

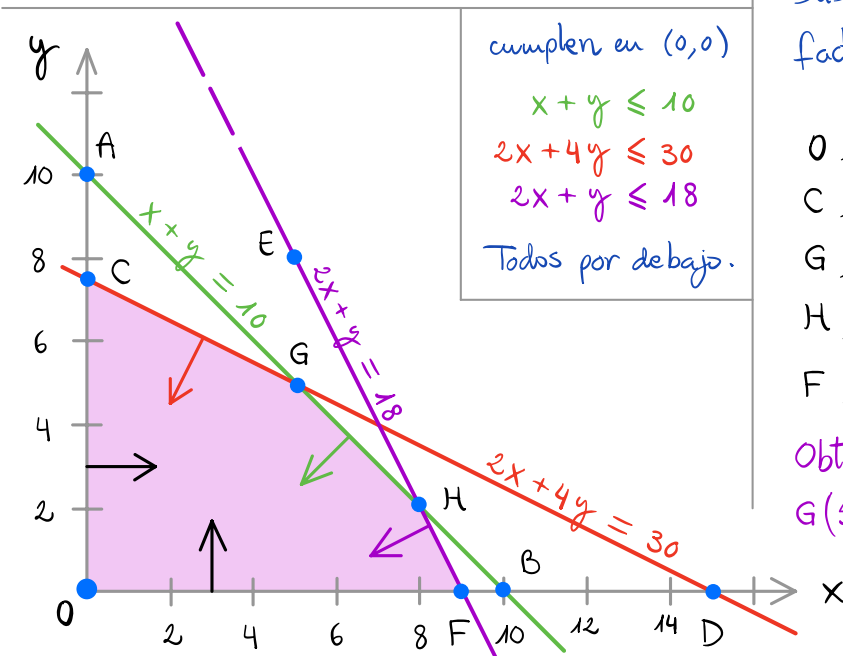
$$C, f(0, \frac{15}{2}) = 2 \cdot \frac{15}{2} = 15 \text{ €}$$

$$G, f(5,5) = 1,5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 17,5 \text{ €}$$

$$H, f(8,2) = 1,5 \cdot 8 + 2 \cdot 2 = 16 \text{ €}$$

$$F, f(9,0) = 1,5 \cdot 9 = 13,5 \text{ €}$$

Obtenemos el beneficio máximo en el vértice G(5,5), es decir, vendiendo 5 paquetes de cada tipo con un beneficio de 17,5 €.



22. Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kg de manzanas, 5 kg de naranjas y 1 kg de peras, mientras que el lote B incluye 4 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener al menos 24 kg de manzanas, 30 kg de naranjas y 12 kg de peras, determina la región factible y cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso? ¿Es posible la combinación de 6 lotes de tipo A y 2 lotes de tipo B?

Llamaremos:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv \text{lotes tipo A} \\ y \equiv \text{lotes tipo B} \end{array} \right\}$$

Lotes	Manzanas	Naranjas	Peras	Precio
A (x)	1 kg	5 kg	1 kg	8 €
B (y)	4 kg	2 kg	1 kg	10 €
Mínimos	24 kg	30 kg	12 kg	

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{8x}_{\text{lote 1}} + \underbrace{10y}_{\text{lote 2}} \quad (\text{coste mínimo})$$

$$\text{Restricciones: } \left. \begin{array}{l} 1x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 30 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 1x + 1y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ (No negatividad)}$$

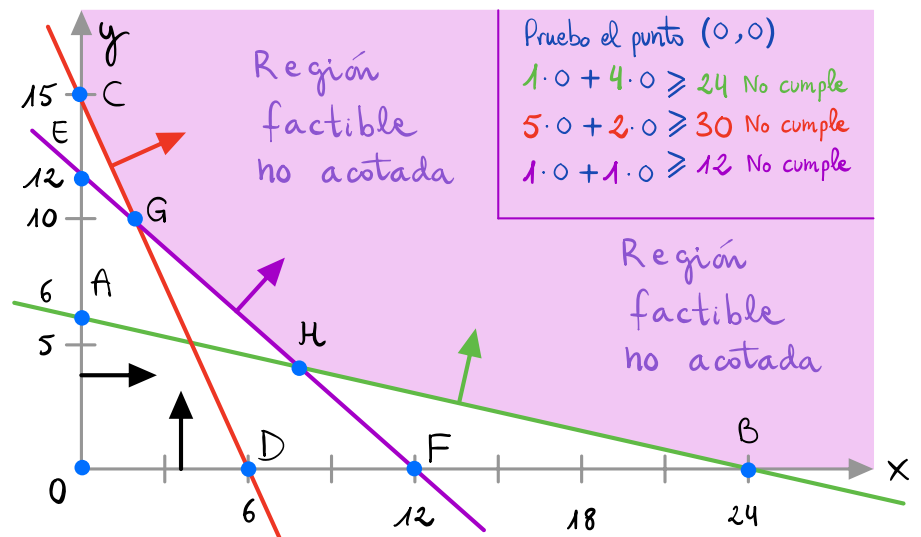
Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**.

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x + 4y = 24 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=6 \quad (0,6) \text{ A} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=24 \quad (24,0) \text{ B} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 30 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=15 \quad (0,15) \text{ C} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=6 \quad (6,0) \text{ D} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x + 1y = 12 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=12 \quad (0,12) \text{ E} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=12 \quad (12,0) \text{ F} \end{array} \right.$$



Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y = 30 \\ 1x + 1y = 12 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 2y = 30 \\ 2x + 2y = 24 \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \\ y = 12 - x = 10 \end{array} \right\} (2,10) \text{ G}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1x + 4y = 24 \\ 1x + 1y = 12 \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \\ x = 12 - y = 8 \end{array} \right\} (8,4) \text{ H}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 8x + 10y$ (coste mínimo)

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: C, G, H, B

$$\left. \begin{array}{l} \text{C, } f(0,15) = 150 \text{ €} \\ \text{G, } f(2,10) = 116 \text{ €} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{H, } f(8,4) = 104 \text{ €} \\ \text{B, } f(24,0) = 192 \text{ €} \end{array} \right\} \text{ Venderemos 8 lotes de tipo A y 4 lotes de tipo B con un coste mínimo de 104 €.$$

BOLETÍN: PROGRAMACIÓN LINEAL

Actividades de programación lineal: Beneficios y costes

- Una fábrica de lámparas produce dos modelos A y B . El modelo A necesita dos horas de trabajo de chapa y una hora de pintura. El modelo B necesita una hora de chapa y dos de pintura. Semanalmente se emplean como máximo 80 horas en trabajos de chapa y 100 horas en trabajos de pintura. Cada unidad del modelo A se vende a 75 € y cada unidad del modelo B a 80 €.
 - ¿Dibuja la región factible.
 - Determina el número de lámparas de cada tipo que interesa producir para que el beneficio obtenido con su venta sea lo mayor posible.
 - Calcula el beneficio máximo.
- Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A , que produce un beneficio de 8 €, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 € y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1500 € a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.
- Una persona tiene 1500 € para invertir en dos tipos de acciones A y B . El tipo A tiene un interés simple anual del 9 % y el tipo B del 5 %. Decide invertir como máximo 900 € en acciones A y como mínimo 300 euros en acciones del tipo B y además decide invertir en el tipo A por lo menos tanto como en el tipo B .
 - Dibuja la región factible.
 - ¿Cómo debe invertir los 1500 € para que los beneficios anuales sean los máximos posibles?
 - Calcula esos beneficios anuales máximos.
- Una compañía de telefonía móvil quiere celebrar una jornada de “Consumo razonable” y ofrece a sus clientes la siguiente oferta: 15 céntimos de euro por cada mensaje SMS y 25 céntimos de euro por cada minuto de conversación incluyendo el coste de establecimiento de llamada. Impone las condiciones:
 - El número de llamadas de un minuto no puede ser mayor que el número de mensajes aumentado en 3, ni ser menor que el número de mensajes disminuido en 3.
 - Sumando el quintuplo del número de mensajes con el número de llamadas no puede obtenerse más de 27.
 - Dibuja la región factible.
 - Determina el número de mensajes y de llamadas para que el beneficio sea máximo.
 - ¿Cuál es ese beneficio máximo?



Actividades de programación lineal: El problema de la dieta

5. La dieta para alimentar a un pájaro se obtiene a través de dos tipos de preparados A y B. A contiene 30 mg de calcio, 10 mg de fósforo y 40 mg de magnesio con un coste de 3 €. B contiene 40 mg de calcio, 30 mg de fósforo y 20 mg de magnesio con un coste de 4 €. La dieta debe aportar, como mínimo, 350 mg de calcio, 150 mg de fósforo y 300 mg de magnesio. Calcula la cantidad óptima de botes de los preparados A y B para minimizar el coste.
6. Los animales de una granja deben tomar, al menos, 60 mg de vitamina A y, al menos, 90 mg de vitamina B. Existen dos compuestos con estas vitaminas. El compuesto X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de B, y cada dosis cuesta 0,50 €. El compuesto Y contiene 10 mg de cada vitamina, y cada dosis cuesta 0,30 €. Además, se recomienda no tomar más de 8 dosis diarias. Calcula qué dosis tiene que tomar para que el coste sea mínimo.

Actividades de programación lineal: Problemas no literales

7. Considera el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Calcula el máximo de la función $f(x, y) = x - 3y$

Actividades de programación lineal: El problema del transporte

8. Se deben transportar naranjas de las ciudades de Gandía y Valencia a las ciudades de Santiago, Vigo y A Coruña. Las cantidades ofertadas son 500 kg de Gandía y 750 kg de Valencia. Las cantidades demandadas son 250 kg por Santiago, 500 kg por Vigo y 500 kg por Coruña. Los costes, en céntimos por kg, de transportar de una ciudad a otra son:

	Santiago	Vigo	A Coruña
Gandía	1	2	2
Valencia	2	2	3

Establece la mejor forma de realizar el transporte para que el coste total sea mínimo.

¿Hay una única solución?



Actividades de programación lineal: Problemas combinados de repaso

9. El terreno dedicado a una plantación de hortalizas procesa semanalmente un mínimo 16 kg de abono mineral y un mínimo de 18 kg de abono vegetal. En el mercado existen dos paquetes de abonos P_1 y P_2 . El paquete P_1 contiene 2 kg de abono mineral y 5 kg de abono vegetal y cada paquete del tipo P_2 contiene 3 kg de abono mineral y 2 kg de abono vegetal. Cada paquete de tipo P_1 cuesta 15 € y cada paquete del tipo P_2 cuesta 10 € . Calcula el número de paquetes de cada tipo que se deben adquirir para que el coste sea mínimo.
10. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer la reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan 100 € la tonelada independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

11. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 3x - 4y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 30 \\ 3x - 2y \geq -6 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$

12. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 3x + y \geq 2 \\ 3x - 2y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Calcula el mínimo de la función $f(x, y) = 9x + y$



13. Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:

El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas. El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.

Resuelve el problema y razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

14. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal:
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ -2 \leq 2x - y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
b) Justifica si el punto $P(-1/2, 1/2)$ pertenece a la región.
c) Calcula el punto o puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = -2x + 5y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.
15. En una fábrica se construyen dos tipos de aparatos: A y B . Ambos tipos de aparatos han de pasar por la secciones X e Y . Cada sección trabaja como máximo 100 horas por semana. Cada aparato A lleva 3 horas de la sección X y una de la sección Y . Cada aparato B lleva una hora de la sección X y dos de la sección Y . Cada aparato A se vende por 100 € y cada aparato B se vende a 150 €. Halla cuántos aparatos de cada tipo se producirán para que el ingreso por ventas sea máximo.

16. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible.
b) Verifica si el punto $P(-1, 2)$ pertenece a la región factible.
c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$.
17. Una fábrica elabora dos tipos de productos, A y B . El tipo A necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 € por unidad. El tipo B necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 € por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de A y de B que se deben fabricar para maximizar el beneficio.



18. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 3x + 4y \geq -6 \\ -x + 2y \leq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

- Representa gráficamente la región factible.
- Verifica si el punto $P(-1,1)$ pertenece a la región factible.
- Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = -2x + 4y$.

19. Vamos a invertir en dos productos financieros A y B . La inversión en B será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en A más del doble que en B . El producto A proporciona un beneficio del 10 % y B del 5 %. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

20. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -6 \\ 7x + 4y \leq 5 \\ -3x + 2y \leq 9 \end{cases}$$

- Representa gráficamente la región factible.
- Verifica analíticamente si el punto $P(-1,2)$ pertenece a la región factible.
- Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 15x - 10y$.

21. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 €. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 €. ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos? Determina los ingresos.

22. Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B . El lote A incluye 1 kg de manzanas, 5 kg de naranjas y 1 kg de peras, mientras que el lote B incluye 4 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener al menos 24 kg de manzanas, 30 kg de naranjas y 12 kg de peras, determina la región factible y cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso? ¿Es posible la combinación de 6 lotes de tipo A y 2 lotes de tipo B ?

 **BOLETÍN DE PROGRAMACIÓN LINEAL**
(Actividades seleccionadas de pruebas PAU / ABAU de Galicia)

[ABAU Extraordinaria 2024]

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

- Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

[ABAU Ordinaria 2024]

EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40$$

$$x + y \geq 5$$

$$3x + y \leq 45$$

$$x \geq 0$$

- Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.
- Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

[ABAU Extraordinaria 2022]

EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €

- Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.
- Represente gráficamente la región la región factible y calcule sus vértices.
- Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

[ABAU Extraordinaria 2021]

EXERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, ten entre os seus clientes a empresas e a particulares. Ao finalizar o ano debe conseguir polo menos 25 empresas como clientes na súa carteira, e o número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo o dobre que o de empresas. Ademais, ten estipulado un límite global de 120 clientes anuais. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuais, mentres que cada particular 229 euros.

- Formule o problema para maximizar os ingresos.
- Represente graficamente o conxunto de solucións.
- Cal desas solucións lle proporcionarían os maiores ingresos ao finalizar o ano? A canto ascenderían devanditos ingresos?



[ABAU Junio 2019 Opción B]

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos. b) Representa la región factible. c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

[ABAU Junio 2018 Opción B]

1. Unha pastelería fai con fariña e nata dous tipos de biscoitos: suave e duro. Dispón de 160 quilogramos de fariña e 100 quilogramos de nata. Para fabricar un biscoito suave necesita 250 gramos de fariña e 250 gramos de nata e para fabricar un biscoito duro necesita 400 gramos de fariña e 100 gramos de nata. Ademais o número de biscoitos suaves fabricados debe exceder ao menos en 100 unidades o número de biscoitos duros. Se os biscoitos suaves se venden a 6 € e os biscoitos duros a 4,5€,

[ABAU Septiembre 2017 Opción B]

1. Unha fábrica de materiais plásticos produce dous tipos de colectores A e B . A súa produción semanal debe de ser de polo menos 10 colectores en total e o número de colectores de tipo B non pode superar en máis de 10 ao número dos de tipo A . Ademais, cada colector de tipo A ten uns custos de produción de 150€ e cada colector de tipo B de 100€, dispoñendo dun máximo de 6000€ semanais para o custo total de produción.

(a) Formula o sistema de inecuacións. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.

(b) Se cada colector de tipo A xera uns beneficios de 130€ e o de tipo B de 140€, ¿cantos colectores de cada tipo terán que producir á semana para que o beneficio total semanal sexa máximo?

[PAU Junio 2010 Opción B Problema 1 (Difícil)]

Una empresa de transportes tiene que trasladar bloques de granito desde una cantera a un aserradero de piedra. Para eso dispone de un máximo de 8 camiones de tipo A y un máximo de 12 camiones de tipo B . Cada camión de tipo A necesita un operario y puede transportar 24 toneladas de granito con un gasto de 150 euros, mientras que cada camión de tipo B necesita dos operarios y puede transportar 12 toneladas de granito con un gasto de 300 euros. Se sabe que se necesitarán un mínimo de 15 operarios, que se transportarán un mínimo de 108 toneladas de granito y que el número de camiones de tipo A utilizados no será superior al número de camiones de tipo B .

a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible y calcula sus vértices.

b) Calcula todas las posibilidades que tiene la empresa de distribuir los camiones para minimizar el gasto.

[PAU Junio 2009 Bloque Álgebra]

Exercicio 2. Unha compañía química deseña dous posibles tipos de cámaras de reacción que incluírán nunha planta para producir dous tipos de polímeros P_1 e P_2 . A planta debe ter unha capacidade de produción de, polo menos 100 unidades de P_1 e polo menos 420 unidades de P_2 cada día. Cada cámara de tipo A custa 600.000 euros e é capaz de producir 10 unidades de P_1 e 20 unidades de P_2 por día; a cámara de tipo B é un deseño máis económico, custa 300.000 euros e é capaz de producir 4 unidades de P_1 e 30 unidades de P_2 por día. Debido ao proceso de deseño, é necesario ter polo menos 4 cámaras de cada tipo na planta. ¿Cantas cámaras de cada tipo deben incluírse para minimizar o custo e aínda así satisfacer o programa de produción requerido? Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.