

Sistemas de ecuaciones

ACTIVIDADES

1. Página 60

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$5x + 3y - z = -1$$

Soluciones: 1) $x = 2, y = -1, z = 8$ 2) $x = -2, y = 3, z = 0$ 3) $x = 1, y = 3, z = 15$

2. Página 60

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -z = -1 \\ x + y = 2 \\ x + z = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 1 \\ x + y = 2 \\ x + z = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 1 \\ x + y = 2 \\ x = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Solución: $x = 1, y = 1, z = 1$.

3. Página 61

a) Tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

b) No tiene solución. El sistema es incompatible.

c) $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow$ Tiene solución única. El sistema es compatible determinado.

4. Página 61

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -x - y + 2z = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -x = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ y - z = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ z = 7 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 13 \\ z = 7 \end{cases}$$

5. Página 62

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ -x + 2z = 3 \end{cases}$$

6. Página 62

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = -1 \\ x + 3y - z = 0 \\ -4x + 5y + z = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7. Página 63

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'_2=F_2+F_1 \\ F'_3=F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1+\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3=2F_3-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3=F_3-6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x-2y+z=3 \\ y-z=1 \\ -z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

8. Página 63

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'_1=F_3 \\ F'_2=F_2-F_1 \\ F'_3=F_3-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3=F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x+z=-4 \\ y+z=-5 \\ z=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$$

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'_2=3F_1+F_2 \\ F'_3=F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_2=F_2+5F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 30 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x-y+z=4 \\ -5y+3z=10 \\ -2z=30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-11 \\ z=-15 \end{cases}$$

9. Página 64

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema compatible indeterminado.

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

Sistema compatible determinado.

10. Página 64

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'_1=F_2 \\ F'_2=F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'_2=F_2+2F_1 \\ F'_3=F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F'_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Sistema compatible determinado.

11. Página 65

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 2 \\ 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

En A^* , la tercera fila es la segunda fila menos la primera.

$$|A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) < N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - \frac{z}{3} \\ y = -1 - \frac{7z}{3} \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 2 & 3 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ -3z = -3 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) = 4 \rightarrow$ Sistema incompatible.

12. Página 65

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -2 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

En A^* , si sumamos las dos primeras filas, obtenemos la tercera $\rightarrow \text{Rango}(A^*) < 3$

$$|A| = 0 \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) < N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

13. Página 66

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

En A^* , si a la última fila le restamos la segunda, obtenemos la primera $\rightarrow \text{Rango}(A^*) < 3$

$$|A| = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) < N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

14. Página 66

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ x - y - z = 3 \end{array} \right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ -2x - 2y + 2z = 6 \end{array} \right\}$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ -x - y + z = 1 \end{array} \right\}$$

15. Página 67

a) El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

b) El número de ecuaciones no es el mismo que el número de incógnitas; por tanto, no se puede aplicar la regla de Cramer.

16. Página 67

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 4 \\ x + y - z - t = 0 \\ 2x + y - z = 2 \\ y - z - t = 3 \end{array} \right\}$$

17. Página 68

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

18. Página 68

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = -\frac{14}{11}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -1 & -8 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -43 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{43}{11}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -27 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{27}{11}$$

19. Página 69

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 41 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

Consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 2z \\ 2x + 3y = -2z \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \begin{cases} 2x + y = 2z \\ 2x + 3y = -2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases}$$

La solución es: $x = 2\lambda, y = -2\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

20. Página 69

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 3y + 4z - t = 0 \\ x - 2y + t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y + t = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}\lambda & z = \lambda \\ y = -\frac{2}{5}\lambda & t = \frac{4}{5}\lambda \end{cases}$$

21. Página 70

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = 4 - 2m$$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

22. Página 70

El sistema es homogéneo \rightarrow Rango $(A) =$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema compatible.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a + 63$$

Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3 = N.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 < N.^{\circ} \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

23. Página 71

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m + 4$$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2m & -2 & 2 \\ -4 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 6m - 4 = -2(1-m)(2-m)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2m & 2 \\ -3 & -4 & m \end{vmatrix} = -2(m^2 + m - 7)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2m \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 10m$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2(1-m)(2-m)}{4-2m} = -1+m$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(m^2+m-7)}{4-2m} = \frac{m^2+m-7}{m-2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{22-10m}{4-2m} = \frac{5m-11}{m-2}$$

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible.

24. Página 71

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a + 63$$

Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Como es sistema es homogéneo: $x = 0, y = 0, z = 0.$

Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

Consideramos el sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = -z \\ x + 9y = 3z \end{cases}$.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix} = 7z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7z}{21} = \frac{z}{3}$$

La solución es: $x = 0, y = \frac{\lambda}{3}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}.$

25. Página 72

Sean x, y, z las cantidades que deben poner Juan, Pepe y Javier, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y + z = 26 \\ x = 2y \\ z = \frac{2}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 26 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

26. Página 72

Sean x, y, z los obreros, los oficinistas y los directivos que trabajan en la fábrica, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y + z = 22 \\ 2y + 3z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 22 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema no puede ser compatible determinado. No se puede determinar el número de obrero con estos datos.

27. Página 73

$x = \text{N.}^\circ$ de personas que no son niños ni jubilados

$y = \text{N.}^\circ$ de niños

$z = \text{N.}^\circ$ de jubilados, respectivamente

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ z = 0,25y \\ 30x + 15y + 21z = 4620 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 200 \\ 0,25y - z = 0 \\ 30x + 15y + 21z = 4620 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0,25 & -1 & 0 \\ 30 & 15 & 21 & 4620 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'2=4F2 \\ F'3=F3-30F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & -9 & -1380 \end{array} \right) \xrightarrow{F'3=F3+15F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -69 & -1380 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y - 4z = 0 \\ -69z = -1380 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 80 \\ z = 20 \end{cases}$$

Hay 80 niños, 20 jubilados y 100 personas que no son ni niños ni jubilados.

28. Página 73

Sean x , y , z los presupuestos para muebles, libros y material de oficina, respectivamente.

$$\left. \begin{array}{l} x = 5(y + z) \\ y = 3z \\ x + z = 7y \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x - 5y - 5z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ x - 7y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz de coeficientes es 2.}$$

El sistema es compatible indeterminado, por lo que no podemos saber cuánto se ha destinado a cada compra con estos datos.

$$\text{Si } y = 1800 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \cdot 2400 = 12000 \\ z = 600 \end{cases}$$

Para muebles se destinan 12 000 € y para material de oficina 600 €.

SABER HACER

29. Página 74

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escribimos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 2a + 5c = 7c \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2b + 5c = 7c \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} 2c = 2b \\ 2a = 2c \end{cases} \rightarrow a = b = c$$

$$\text{Luego } B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

30. Página 74

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{No existe } A^{-1}.$$

$$\text{El sistema que tenemos es: } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Como sabemos que es un sistema compatible indeterminado, consideramos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = -2z - 1 \end{cases} \rightarrow \text{Soluciones: } x = \lambda + 1, y = -2\lambda - 1, z = \lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

31. Página 75

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

Rango $(A) = \text{Rango } (A^*) = 2 < N.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

$$\text{Consideramos el sistema: } \begin{cases} x + 2y = 1 + z \\ x = 1 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = 0 \end{cases}$$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, y = 0, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{b) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow \text{Rango } (A) = 3$$

Rango $(A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = N.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{6}{6} = 1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

Solución: $x = 1, y = 0, z = 0$.

32. Página 75

$$\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m+2)(m-2)$$

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 1$

Rango $(A) = \text{Rango } (A^*) = 1 < N.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

$$2x = 4 - 2y \rightarrow x = 2 - y$$

Solución: $x = 2 - \lambda, y = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = -2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 1$

Pero $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m \neq 2, m \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 = \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2m & 2 \\ m+2 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2m - 4 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2m^2 - 2m - 4}{m^2 - 4} = \frac{2m+2}{m+2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 2 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 - 2m \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^2 - 2m}{m^2 - 4} = \frac{m}{m+2}$$

33. Página 76

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1+2m \\ 0 & 2 & m^2 \end{vmatrix} = -2m^2 + 4m + 6 \rightarrow -2(m-3)(m+1)$$

Si $m = 3 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\begin{cases} x - y = 1 - z \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 9 - 2z \\ y = 8 - z \end{cases}$

Soluciones: $x = 9 - 2\lambda, y = 8 - \lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = -1 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\begin{cases} x - y = 1 - z \\ -x + 2y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -z \end{cases}$

Soluciones: $x = 1 - 2\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m \neq 3, m \neq -1 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible.

34. Página 76

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 3m = m(m-3)$$

Si $m \neq 0, m \neq 3 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

Al ser un sistema homogéneo, solución: $x = 0, y = 0, z = 0$.

$$\text{Si } m=0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Rango(A) = Rango(A*) = 2 < N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

$$\text{Consideramos el sistema: } \begin{cases} 2z = 0 \\ x = y - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{Si } m=3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Rango(A) = Rango(A*) = 2 < N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

$$\text{Consideramos el sistema: } \begin{cases} 3x = -2z \\ 3y = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2z}{3} \\ y = \frac{z}{3} \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = -\frac{2\lambda}{3}, y = \frac{\lambda}{3}, z = \lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

35. Página 77

Si llamamos:

$x = \text{N.º de billetes de 10 €}$

$y = \text{N.º de billetes de 20 €}$

$z = \text{N.º de billetes de 50 €}$

$$\text{Obtenemos el sistema: } \begin{cases} x + y + z = 130 \\ 10x + 20y + 50z = 3000 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 130 \\ 10 & 20 & 50 & | & 3000 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F'1=F1-F3 \\ F'2=F2-10F3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & | & 130 \\ 0 & 20 & 70 & | & 3000 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'2=F2-20F1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & | & 130 \\ 0 & 0 & 10 & | & 400 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F'2=F2 \cdot 10} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & | & 130 \\ 0 & 0 & 1 & | & 40 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F'1=F1-3F2 \\ F'3=F3+2F2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 40 \\ 1 & 0 & 0 & | & 80 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 80 \\ y = 10 \\ z = 40 \end{cases}$$

36. Página 77

Sean x, y, z el precio de un bolígrafo, un cuaderno y un lapicero, respectivamente.

$$\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 13,80 \\ 3x + 4y + 3z = 14,5 \\ 7x + 2y + z = 13,10 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El determinante de la matriz de coeficientes es 0; por tanto, el sistema es incompatible o compatible indeterminado, y no se puede calcular el precio de cada artículo.

ACTIVIDADES FINALES

37. Página 78

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -5x + 3y = -11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6x - 9y = 15 \\ -8x + 12y = -20 \end{cases} \rightarrow 6x - 9y = 15 \rightarrow x = \frac{5+3y}{2} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{5+3\lambda}{2}, y = \lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{c) } \begin{cases} -3x + 9y = 3 \\ 2x - 6y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x + 9y = 3 \\ 0 = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2y + z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ x + 7y + 3z = 5 \end{cases} \xrightarrow{F^3 = F^3 - 2F^2} \begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 + z \\ -x + 3y = -2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{z+3}{2} \\ y = \frac{1-z}{2} \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado.

$$\text{Solución: } x = \frac{3+\lambda}{2}, y = \frac{1-\lambda}{2}, z = \lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ -x + y - 2z = 4 \\ x + z = 5 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} F^1 = F^1 - 2F^3 \\ F^2 = F^2 + F^3 \end{matrix}} \begin{cases} -y + z = -7 \\ +y - z = 9 \\ x + z = 5 \end{cases} \xrightarrow{F^2 = F^2 + F^1} \begin{cases} -y + z = -7 \\ 0 = 2 \\ x + z = 5 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

38. Página 78

Respuesta abierta, por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ -x + 3y = 7 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

39. Página 78

Respuesta abierta, por ejemplo:

$$\begin{cases} x - y - z = 3 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ x - 2y - z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

40. Página 78

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 1 \\ y + 3z = -3 \\ -12z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 17/3 \\ y = -4 \\ z = 1/3 \end{cases}$$

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -y - 2z = 0 \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$c) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 12 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2' = F_2 + F_1 \\ F_3' = F_3 - 5F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 14 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = 4F_3 + 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 4y - z = 14 \\ -11z = 22 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$d) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \\ -2 & 0 & 2 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = 3F_3 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = 3F_3 - 8F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -30 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 11 \\ 3y + z = 3 \\ 10z = -30 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$e) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ y + 3z = 3 \\ -10z = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$f) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2' = F_2 + 3F_1 \\ F_3' = F_3 + 5F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 9 & -1 & 65 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$g) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2' = F_2 + 3F_1 \\ F_3' = F_3 + 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 10 & 34 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + 2y + 5z = -2 \\ 5y + 17z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{12 - 9z}{5} \\ y = \frac{1 - 17z}{5} \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{12 - 9\lambda}{5}, y = \frac{1 - 17\lambda}{5}, z = \lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$h) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -7 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -8 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2' = F_2 + 3F_1 \\ F_3' = F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & -10 & -17 & -31 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = 11F_3 + 10F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 23 & -21 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3b + 8c = 12 \\ 11b + 21c = 32 \\ 23c = -21 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{123}{23} \\ b = \frac{107}{23} \\ c = -\frac{21}{23} \end{cases}$$

41. Página 78

$$a) \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ -4 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F'2=3F2+2F1} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

$$b) \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F'2=F2+2F1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

$$c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -5 & 4 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'2=F2-2F1 \\ F'3=F3-5F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{F'3=F3-2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

$$d) \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F'2=2F2+3F1} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -14 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$e) \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F'2=2F2-3F1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

$$f) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'2=2F2-3F1 \\ F'3=2F3-5F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

42. Página 78

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 6 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F'2=F2+2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 1 \\ 2z = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{-1}{2} \\ y = -2x \end{array} \right.$$

Las soluciones son de la forma $\left(a, -2a, -\frac{1}{2} \right)$.

43. Página 78

$$a) \text{ Respuesta abierta. Por ejemplo: } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y = 3 \\ y - 2z = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F'3=F3-2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array} \right.$$

$$b) \text{ Respuesta abierta. Por ejemplo: } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y = 3 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F'2=F2-F1 \\ F'3=F3-2F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ z = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - y \\ z = -2 \end{array} \right.$$

$$c) \text{ Respuesta abierta. Por ejemplo: } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y = 3 \\ -z = -4 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

44. Página 78

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 3x - 3y - 4z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F^1_2=2F_2-F_1 \\ F^1_3=2F_3-3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F^1_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 1 \\ 5z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y + \frac{3}{5} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases}$$

45. Página 78

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9 \\ -2x + y + 2z = 9 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9 \\ -2x + y + 2z = 9 \\ -x + 5z = 18 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 5 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F^1_2=-2F_1+2F_1 \\ F^1_3=-F_1+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \end{array} \right) \xrightarrow{F^1_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x - y = 9 - 3z \\ -y = 27 - 8z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5z - 18 \\ y = 8z - 27 \end{cases}$$

Solución: $x = 5\lambda - 18$, $y = 8\lambda - 27$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

46. Página 78

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 1 - 5m$$

$$\text{Si } m = \frac{1}{5} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

Rango(A) \neq Rango(A*) \rightarrow Sistema indeterminado.

$$\text{Si } m \neq \frac{1}{5} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

Rango(A) = Rango(A*) = 3 = N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

47. Página 78

$$\text{Tenemos el sistema } \left. \begin{array}{l} 3x - y + z = 5 \\ -2x + 3y + z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array} \right\}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = 7a - 21$$

Como queremos que sea compatible indeterminado: $|A| = 0 \rightarrow 7a - 21 = 0 \rightarrow a = 3$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 7b - 14$$

Para que sea indeterminado, necesitamos que: $\text{Rango}(A^*) < 3 \rightarrow 7b - 14 = 0 \rightarrow b = 2$

Solución: $a = 3, b = 2$.

48. Página 78

$$\text{a) Respuesta abierta. Por ejemplo: } \left. \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) Respuesta abierta. Por ejemplo: } \left. \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ 5x - 5y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

49. Página 78

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = -cb \rightarrow |A| = -6 \rightarrow -cb = -6 \rightarrow cb = 6$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c & 2c \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b \\ 3a+4c & 3b \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } A \cdot B = B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b \\ 3a+4c & 3b \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a+3b = a+2c \\ 2a+4b = b \\ c = 3a+4c \\ 2c = 3b \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3b}{2} \\ b = \frac{2c}{3} \end{cases}$$

$$\text{Como sabemos que } cb = 6: \left. \begin{array}{l} a = -\frac{3b}{2} \\ b = \frac{2c}{3} \\ cb = 6 \end{array} \right\} \text{ Si } c = +3, b = +2 \text{ y } a = -3. \text{ Si } c = -3, b = -2 \text{ y } a = +3.$$

$$\text{Soluciones: } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ o } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

50. Página 78

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 3 \\ x + 2y - z = -1 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} -2x + 2y + z = 2 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y = 1 \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} a + 4b = -1 \\ 2a + 3b = 4 \\ a + 5b = 2 \end{array} \right\} \quad \text{d) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x - z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \end{array} \right\}$$

51. Página 79

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

52. Página 79

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 13 & 14 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 11 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 13 & 14 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 11 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 144 \\ 0 \\ -108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

53. Página 79

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 9 & -8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$|A| = -14 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 110 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible.

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

54. Página 79

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 3$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = -4$$

b) El número de ecuaciones el igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{No se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

c) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 21 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = 3 \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = 0$$

d) El número de ecuaciones el igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{No se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

55. Página 79

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \left. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 - z \\ -3x + y = -3 + 2z \end{cases} \right\}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6-z & 2 \\ -3+2z & 1 \end{vmatrix} = 12-5z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6-z \\ -3 & -3+2z \end{vmatrix} = 15-z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12-5z}{7} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{15-z}{7}$$

La solución es: $x = \frac{12-5\lambda}{7}, y = \frac{15-\lambda}{7}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{b) } \left. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 - t \\ x - y + z = 1 \\ y - z = 1 - t \end{cases} \right\}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1-t & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-2t \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 2-t \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 \end{vmatrix} = 3-t \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{3-t}{2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4-t \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = 1+t \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1+t}{2}$$

La solución es: $x = 2-\lambda, y = \frac{3-\lambda}{2}, z = \frac{1+\lambda}{2}, t = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \left. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ 11a - b = 3c \end{cases} \right\}$$

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = 3c \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3c \end{vmatrix} = 6c$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{c}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{2c}{3}$$

La solución es: $a = \frac{\lambda}{3}, b = \frac{2\lambda}{3}, c = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$d) \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} 3p - 3q = -11r \\ 4p = -7r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p = -\frac{7r}{4} \\ q = \frac{23r}{12} \end{cases}$$

La solución es: $p = -\frac{7}{4}\lambda, q = \frac{23}{12}\lambda, = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

56. Página 79

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & -3 & | & 3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

Rango(A) = Rango(A*) = 3 = N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = -4 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 4 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -1$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 2 & 3 & | & 2 \\ 3 & 1 & 3 & | & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

Rango(A) = Rango(A*) = 2 < N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\begin{cases} x + y = 3 - 2z \\ 2y = 2 - 3z \end{cases}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix} = 4-z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 0 & 2-3z \end{vmatrix} = 2-3z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4-z}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2-3z}{2}$$

La solución es: $x = \frac{4-\lambda}{2}, y = \frac{2-3\lambda}{2}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$c) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 14 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -23$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{11}{14} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{23}{14}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$e) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^{\circ} \text{ de inc\u00f3gnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

Consideramos el sistema:
$$\begin{cases} 2x - y = -t \\ x + 2y = -1 + z - 4t \end{cases}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ -1+z-4t & 2 \end{vmatrix} = -1+z-6t \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ 1 & -1+z-4t \end{vmatrix} = -2+2z-7t$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-1+z-6t}{5} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2+2z-7t}{5}$$

La soluci\u00f3n es: $x = \frac{-1+\lambda-6\mu}{5}, y = \frac{-2+2\lambda-7\mu}{5}, z = \lambda, t = \mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$f) A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 1$

Como es un sistema homog\u00e9neo, $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 1 < N.^{\circ} \text{ de inc\u00f3gnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

Tenemos:
$$\begin{cases} x = -4y \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = \lambda \end{cases}, \text{ con } y = \lambda \in \mathbb{R}.$$

57. Página 79

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2m & -3 \\ -6 & m \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2m & -3 & -3 \\ -6 & m & m \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m & -3 \\ -6 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 18 = 2(m-3)(m+3)$$

Si $m \neq 3, m \neq -3 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $m = 3 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 1 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

Si $m = -3 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 1 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & -m & m \\ 2 & 3 & 1 & m \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -m$$

$$\text{Si } m = 0 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

Si $m \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & -1 & m^2 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1) \quad \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = m^4 + m^2 - 2m - 2$$

Si $m \neq -2, m \neq 1 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } m = -2 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) = 3 \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$\text{Si } m = 1 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) = 3 \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} m+3 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & 2 & m+1 \\ 2 & m & m \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+3 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 4 = (m-1)(m+4)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ m & m \end{vmatrix} = m - m^2 \quad \begin{vmatrix} m+3 & m+1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2$$

Si $m \neq 1, m \neq -4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sist. compatible determinado.}$

Si $m = 1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 1 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 1 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sist. compatible indeterminado.}$

Si $m = -4 \rightarrow \text{Rango}(A) = 1 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2 \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ m & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$$

Si $m \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } m = 1 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = \text{Rango}(A) = 2 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

$$f) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & m \\ -1 & m & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & m & | & 1 \\ -1 & m & 2 & | & m \\ 2 & 0 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & m \\ -1 & m & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6m - 2m^2 = 2m(3 - m)$$

Si $m \neq 0, m \neq 3 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$\text{Si } m = 0 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = \text{Rango}(A) = 2 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

$$\text{Si } m = 3 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

58. Página 79

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & m \\ 0 & m & 1 & | & m \\ 0 & 1 & m & | & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = m^2 - 1$$

Si $m \neq 1, m \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } m = 1 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Tiene dos columnas iguales} \rightarrow \text{Rango}(A^*) = \text{Rango}(A) = 2 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

compatible indeterminado.

$$\text{Si } m = -1 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

$\text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 2 & 6 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & m & 4 & 2 \\ m & 2 & 6 & 0 \\ 2 & m & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 2 & 6 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} = 8 - 2m^2 = -2(m-2)(m+2) = 0 \rightarrow m = \pm 2$$

Si $m \neq 2, m \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

$$\text{Si } m = 2 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Si } m = -2 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -20 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 28 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3 \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

59. Página 79

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & a \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & a \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 65 - 5a$$

Si $a \neq 13 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3 \neq \text{Rango}(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

$$\text{Si } a = 13 \rightarrow |A^*| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 = \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} -3 & a \\ 2 & 1 \\ a & -2a \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & -2a & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & -2a & -1 \end{vmatrix} = 3 - 3a$$

Si $a \neq 1 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3 \neq \text{Rango}(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

$$\text{Si } a = 1 \rightarrow |A^*| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 = \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

60. Página 79

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$|A| = 9 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } m.$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado para cualquier valor de m .

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & m & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0 \rightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

$$\text{Si } m = 1 \rightarrow |A| = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Todas las filas de A y A^* son iguales $\rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 1 < \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1-m & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1-m & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0 \text{ para cualquier valor de } m \rightarrow \text{Rango}(A^*) < 3$$

La primera y la cuarta columna de A^* son iguales $\rightarrow \text{Rango}(A^*) < 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(A^*) \text{ para cualquier valor de } m.$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < \text{N.}^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

61. Página 79

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

Si $a \neq 2, a \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } a=1 \rightarrow |A|=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

$\text{Rango}(A^*) = 3 \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$\text{Si } a=2 \rightarrow |A|=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Hay tres columnas iguales} \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -y=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

62. Página 79

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & 1 \\ 3 & a & a & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3-2a$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a-3$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ \text{ de incógnitas para cualquier valor de } a.$

Sistema compatible indeterminado para cualquier valor de a .

63. Página 79

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & a \\ 0 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$$

Si $a \neq 1, a \neq -1 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $a=1 \rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

Si $a=-1 \rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

b) Calculamos la solución para $a=1$.

Obtenemos el sistema: $\begin{cases} 2x + y = 2 - z \\ y = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z \end{cases}$

Las soluciones son: $x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

64. Página 80

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a+1 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = a^3 + 2a^2 + a = a(a^2 + 2a + 1) = a(a+1)^2$$

Si $a \neq 0, a \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

Si $a=-1 \rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

Si $a=0 \rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

Obtenemos el sistema: $\begin{cases} y = -z \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

Las soluciones son: $x = \lambda, y = -\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

65. Página 80

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ m & 1 & -1 & | & m-2 \\ 3 & m & 1 & | & m-2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 8$$

$m \neq 2, m \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } m = -2 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 32 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Si } m = 2 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

b) Si $m = 2$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2z \\ 2x + y = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = -2z \\ -y = 5z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -5z \end{cases}$$

Las soluciones son: $x = 3\lambda, y = -5\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = -1$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + y - z = -3 \\ 3x - y + z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2y + z = -3 \\ -4y - 5z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2y + z = -3 \\ -3z = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{cases}$$

66. Página 80

a) Si $m = 1$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3x - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 2z = 0 \\ 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & | & 3 \\ m & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & m & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = -m(m+1)$$

Si $m \neq 0, m \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } m=0 \rightarrow |A|=0 \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Si } m=-1 \rightarrow |A|=0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

67. Página 80

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & -4m \\ 2 & 4 & m+6 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & -4m & 3 \\ 2 & 4 & m+6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|A| = m = 0$$

Si $m \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } m=0 \rightarrow |A|=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

$\text{Rango}(A^*) = 3 \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -y + 7z = 0 \\ 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = 7 \\ z = 1 \end{cases}$$

68. Página 80

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 0 & -a \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ -1 & 0 & -a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a = -2a(a-1)$$

Si $a \neq 0, a \neq 1 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

Si $a=0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$\text{Consideramos el sistema: } \begin{cases} y+z=0 \\ -y=-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-y \end{cases}$$

Las soluciones son: $x=\lambda, y=\lambda, z=-\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $a=1 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$\text{Consideramos el sistema: } \begin{cases} y+z=1-x \\ -y=-1-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1+x \\ z=-2x \end{cases}$$

Las soluciones son: $x=\lambda, y=1+\lambda, z=-2\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

69. Página 80

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 4 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 16m + 24$$

Si $m \neq \pm 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$|A| = m^2 - 4$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m-2 & m & 3 \end{vmatrix} = -3m^2 + 16m - 20 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-3m^2 + 16m - 20}{m^2 - 4} = \frac{-3m + 10}{m + 2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & 3 \end{vmatrix} = -2m^2 + 16m - 24 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2m^2 + 16m - 24}{m^2 - 4} = \frac{-2m + 12}{m + 2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m-2 \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2 - 4m + 16 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m^3 - 4m^2 - 4m + 16}{m^2 - 4} = m - 4$$

Si $m = -2 \rightarrow \text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

Si $m = 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$\text{Consideramos el sistema: } \begin{cases} 2x+2z=2-2y \\ 2x+3z=-2y \end{cases}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2-2y & 2 \\ -2y & 3 \end{vmatrix} = 6-2y \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 3-2y \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 2-2y \\ 2 & -2y \end{vmatrix} = -4 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = -2$$

Las soluciones son: $x=3-\lambda, y=\lambda, z=-2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

70. Página 80

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -5 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & a-2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a-1=0 \rightarrow a=1$$

Si $a \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } a=1 \rightarrow |A|=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -5 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -5 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

71. Página 80

$$a) A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 & | & m-1 \\ 1 & -1 & m & | & -3 \\ 2 & 0 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = m-4 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & m-1 \\ -1 & m & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20-5m$$

Si $m \neq 4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $m = 4 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(A^*) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

b) Para $m=1$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y+z=-3 \\ 2x+3z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -3y=-3 \\ -4y+z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

Para $m=-4$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -4x+2y+z=-5 \\ x-y-4z=-3 \\ 2x+3z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+2y+z=-5 \\ x-y-4z=-3 \\ 2x+3z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-4z=-3 \\ -2y-15z=-17 \\ 2y+11z=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-4z=-3 \\ -2y-15z=-17 \\ -4z=-12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-14 \\ z=3 \end{cases}$$

72. Página 80

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & a & -1 \\ a & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & a & -1 & | & 2 \\ a & -2 & 1 & | & 7 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ a & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a-7 \quad \begin{vmatrix} 3 & a & 2 \\ a & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16a-13$$

Si $a \neq 7 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $a = 7 \rightarrow |A| = 0 \text{ Rango}(A) \neq \text{Rango}(A^*) = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

b) Para $a = 7$, el sistema no tiene solución.

Para $a = -1$, consideramos el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y - z = 2 \\ -x - 2y + z = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - y - z = 2 \\ -x - 2y + z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -5y - 2z = 4 \\ -3y + 2z = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -5y - 2z = 4 \\ 16y = 58 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{8} \\ y = -\frac{9}{4} \\ z = \frac{29}{8} \end{cases}$$

73. Página 80

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & p+1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^1_3 = 2F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & p+1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + (p+1)z = 2 \\ 2y + z = 2 \\ 3z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{p+1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & p+1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (p+1)z = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

74. Página 80

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & m^2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 2 \\ 5 & 2 & 4 & | & -1 \\ 3 & 1 & m^2 & | & 3m \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 - m^2 = 0 \rightarrow m = \pm 1$$

Si $m \neq \pm 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } m = 1 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 2 \\ 5 & 2 & 4 & | & -1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

$\text{Rango}(A^*) = 3 \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$\text{Si } m = -1 \rightarrow |A| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Si a la tercera fila de } A^* \text{ le restamos la segunda obtenemos la primera} \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$$

Rango(A) = Rango(A*) = 2 < N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

b) Si $m = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ x - 2z = -11 \\ -z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 33 \\ z = -3 \end{cases}$$

Si $m = 1$ no tiene solución, como hemos visto en el apartado anterior.

c) Sustituimos las posibles soluciones:

$$2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + 0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \neq 2 \rightarrow \text{La solución propuesta no resuelve la primera ecuación, por lo que no puede ser solución del sistema para ningún valor de } m.$$

75. Página 80

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -k^2 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -k^2 & -k \\ k & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -k^2 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = k^2 - 6k - 7 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -k^2 & -k \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2k + 9$$

Si $k \neq -1$, $k \neq 7 \rightarrow$ Rango(A) = Rango(A*) = 3 = N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

Si $k = -1$, $k = 7 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango(A) \neq Rango(A*) = 3 \rightarrow Sistema incompatible.

b) Para $k = -1$ el sistema no tiene solución.

$$\text{Para } k = 0, \text{ obtenemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} -2x + 3y = 0 \\ y - z = -2 \\ x + 2z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{7} \\ y = -\frac{6}{7} \\ z = \frac{8}{7} \end{cases}$$

Para $k = 1$, obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 3y - z = -1 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + 3y - z = -1 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y - 3z = -5 \\ -y + 3z = 3 \\ 4y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y - 3z = -5 \\ 4y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

76. Página 80

$$a) A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & | & 5 \\ 3 & 4 & 6 & | & 3 \\ 1 & 3 & 2 & | & \alpha \end{pmatrix}$$

$|A| = -50 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = \text{N.}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado para cualquier valor de } \alpha.$

$$b) |A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{10\alpha - 50}{-50} = \frac{5 - \alpha}{5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -30\alpha + 30 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-30\alpha + 30}{-50} = \frac{3\alpha - 3}{5}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{15\alpha - 20}{-50} = \frac{4 - 3\alpha}{10}$$

$$c) \text{ Si } x + y + z = 1 \rightarrow \frac{5 - \alpha}{5} + \frac{3\alpha - 3}{5} + \frac{4 - 3\alpha}{10} = 1 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

77. Página 80

$$a) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2b + 20 \rightarrow b = 10 \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Si $b \neq 10 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

Si $b = 10 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

b) Al ser un sistema homogéneo, es compatible determinado si el rango de la matriz de los coeficientes es igual que el número de incógnitas, es decir, si $b \neq 10$.

En este caso, la solución única es: $x = y = z = 0$.

c) El sistema es compatible indeterminado si el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas, es decir, si $b = 10$.

$$\text{Consideramos el sistema: } \begin{cases} -x - y = -3z \\ 2x = 10z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

78. Página 80

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = k^2 - 1 = (k+1)(k-1) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k^2 & 3 & 2k \\ 7 & 7 & k-3 \end{vmatrix} = -2k^3 - k^2 - 5k - 6$$

Si $k \neq 1, k \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $k = 1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) \neq \text{Rango}(A) \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

$$\text{Si } k = -1 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

b) Para $k = 0$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + 3z = 0 \\ 3x + 7y + 7z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ -3y + z = 1 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ -3y + z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Para $k = -1$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 - 2z \\ x + y = -2 - 3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y = -1 - 2z \\ -2y = -1 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - 7z}{2} \\ y = \frac{z + 1}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son: $x = \frac{-5 - 7\lambda}{2}, y = \frac{\lambda + 1}{2}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

79. Página 81

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & a \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & a & \frac{a}{2} \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & a \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24 - 3a \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -5 & a & \frac{a}{2} \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 100 - \frac{25a}{2}$$

Si $a \neq 8 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{Si } a = 8 \rightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -3$$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 < N.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$

El sistema es compatible indeterminado para $a = 8$.

$$\text{Para } a = 8, \text{ obtenemos el sistema: } \begin{cases} x - 2y = 4 - 3z \\ x - 5y = 4 - 8z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 - 3z \\ -3y = -5z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 + \frac{y}{5} \\ z = \frac{3y}{5} \end{cases}$$

b) Como queremos obtener la solución $x = y \rightarrow y = 4 + \frac{y}{5} \rightarrow 5y - 20 = y \rightarrow y = 5$

En este caso la solución es: $x = 5, y = 5, z = 3$.

80. Página 81

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 2 & k-1 & k \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & k & | & 0 \\ 1 & 1 & k & | & 0 \\ 2 & k-1 & k & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 2 & k-1 & k \end{vmatrix} = -k^3 + 3k^2 - 2k = -k(k-2)(k-1)$$

Para $k \neq 0, k \neq 1, k \neq 2 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 3 = N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

Para $k = 0, k = 1, k = 2 \rightarrow |A| = 0$

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) < N.^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

Obtenemos la solución trivial para $k \neq 0, k \neq 1, k \neq 2$.

b) Al ser un sistema homogéneo, el rango de A es siempre igual que el rango de A^* , por lo que el sistema nunca será incompatible, y será compatible indeterminado para los valores de k para los que no es determinado, es decir, $k = 0, k = 1, k = 2$.

81. Página 81

Sean x, y, z los precios de cada docena de huevos de categorías XL, L y M , respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 4,9 \\ 2x + 4z = 9,6 \\ 3y + 3z = 9,3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4,9 \\ -2y + 2z = -0,2 \\ y + z = 3,1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4,9 \\ -2y + 2z = -0,2 \\ 4z = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1,8 \\ y = 1,6 \\ z = 1,5 \end{cases}$$

Así, la docena de huevos XL cuesta 1,80 €; la de categoría L 1,60 € y la de M 1,50 €.

82. Página 81

Sean x, y, z los precios por hora de trabajo del electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 78 \\ 2y + z = 85 \\ x + y + 3z = 133 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ x + 2z = 78 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ -y - z = -55 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ y = 30 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{cases}$$

El electricista cobra 28 €, el fontanero, 30 € y el albañil, 25 €.

83. Página 81

Sean x , y , z los precios de las acciones de las empresas A , B y C , respectivamente.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} 200x + 150y + 100z = 3300 \\ 50x + 120y + 240z = 3750 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 100 \\ 50 & 120 & 240 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 150 & 100 & 3300 \\ 50 & 120 & 240 & 3750 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 200 & 150 \\ 50 & 120 \end{vmatrix} = 16500 \neq 0$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado, es decir, el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} 200x + 150y + 100z = 3300 \\ 50x + 120y + 240z = 3750 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 66 \\ 5x + 12y + 24z = 375 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 66 \\ 33y + 86z = 1170 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{16z - 111}{11} \\ y = \frac{1170 - 86z}{33} \end{cases}$$

Las soluciones son de la forma: $x = \frac{16\lambda - 111}{11}$, $y = \frac{1170 - 86\lambda}{33}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones. Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa C solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa A valen 3 € y las de B , 12 €.

84. Página 81

Sean x , y , z el número de billetes de 10, 20 y 50 € que debe haber en el cajero, respectivamente.

Entonces:

$$\begin{cases} x + y + z = 800 \\ 10x + 20y + 50z = 16000 \\ \frac{z}{3} = \frac{y}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 800 \\ x + 2y + 5z = 1600 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 800 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 800 \\ -16z = -2400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 200 \\ z = 150 \end{cases}$$

Tiene que haber 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

85. Página 81

a) Sean x e y la cantidad de megabytes que ocupan las fotografías de calidad normal y óptima, respectivamente.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} x + y = 24 \\ 0,2x + Ay = 9,2 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,2 & A \end{pmatrix} \quad M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0,2 & A & 9,2 \end{array} \right)$$

$$|M| = A - 0,2 = 0 \rightarrow A = 0,2$$

Si $A \neq 0,2 \rightarrow$ Rango (M) = Rango de (M^*) = 2 = N.º de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado.

Si $A = 0,2 \rightarrow |M| = 0 \rightarrow$ Rango (M) = 1

$$M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0,2 & 0,2 & 9,2 \end{array} \right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0,2 & 9,2 \end{vmatrix} = 4,4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de } (M^*) = 2$$

Rango (M) \neq Rango de (M^*) \rightarrow Sistema incompatible.

Si $A = 0,2$ el sistema no tiene solución.

b) Supongamos que todas las fotos están hechas en calidad óptima, es decir, $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 24 \\ 0,2x + Ay = 9,2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 24 \\ Ay = 9,2 \end{array} \right\} \rightarrow A = \frac{9,2}{24} = 0,38\bar{3}$$

Las fotos en calidad óptima no pueden ocupar más de $0,38\bar{3}$ megabytes ni 0,2 megabytes, según vimos en el apartado anterior.

c) No, porque si fuese así, el sistema planteado en el apartado a) tendría dos soluciones, y hemos visto que cuando dicho sistema tiene solución, esta es única, independientemente del valor de A .

86. Página 81

Sean x , y , z el número de ordenadores de tipo A , B y C , respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 55 \\ 2400x + 1200y + 1000z = 73000 \\ 2400x = 1200y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 55 \\ 12x + 6y + 5z = 365 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 55 \\ 7x + y = 90 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 55 \\ 7x + y = 90 \\ 9x = 90 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 25 \end{cases}$$

Se compraron 10 ordenadores del tipo A , 20 del B y 25 del C .

87. Página 81

Sean x e y los gramos de los suplementos tipos A y B , respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 12 \\ 3x + y = 16 \\ 2x + 4y = 14 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ 3x + y = 16 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ -2y = -2 \\ y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Hacen falta 5 gramos del suplemento A y 1 gramo del suplemento B para producir la dosis pedida.

88. Página 82

Sean x , y , z el número de alumnos matriculados con el primer monitor, el segundo y el tercero, respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 352 \\ 4z = x \\ x - y = 2z - 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 352 \\ -x + 4z = 0 \\ x - y - 2z = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 352 \\ y + 5z = 352 \\ -2y - 3z = -354 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 352 \\ y + 5z = 352 \\ 7z = 350 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 102 \\ z = 50 \end{cases}$$

Hay 200 alumnos matriculados con el primer monitor, 102 con el segundo y 50 con el tercero.

89. Página 82

Sean x , y , z el número de onzas que se han comido Daniel, Manuel y Montse, respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ 2x + 2y = z \\ y + z = 3x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ -3z = -72 \\ 4y + 4z = 108 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ z = 24 \end{cases}$$

Daniel ha comido 9 onzas, Manuel 3 y Montse 24.

90. Página 82

Sean x , y , z el número de recipientes de medio litro, un litro y un litro y medio, respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1100 \\ 0,5x + y + 1,5z = 1025 \\ x = 2y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1100 \\ 0,5x + y + 1,5z = 1025 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1100 \\ y + 2z = 950 \\ -3y - z = -1100 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1100 \\ y + 2z = 950 \\ 5z = 1750 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 250 \\ z = 350 \end{cases}$$

Se han utilizado 500 recipientes de medio litro, 250 de un litro y 350 de litro y medio.

91. Página 82

Sean x , y , z el número inicial de profesores catedráticos, titulares y asociados, respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ y - 50 = 2(x + 50) + z \\ y - 100 = x + 100 + z \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ -2x + y - z = 150 \\ -x + y - z = 200 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ 3y + z = 2150 \\ 2y = 1200 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 600 \\ z = 350 \end{cases}$$

Hay 50 profesores catedráticos, 600 titulares y 350 asociados.

92. Página 82

Sean x , y , z el número de alumnos matriculados en ESO, en Bachillerato y en Ciclos Formativos, respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ y + 2z = x + 100 \\ 0,4x + 0,3y + 0,2z = 0,3 \cdot 1200 + 45 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ -x + y + 2z = 100 \\ 0,4x + 0,3y + 0,2z = 405 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ -x + y + 2z = 100 \\ 4x + 3y + 2z = 4050 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ 2y + 3z = 1300 \\ -y - 2z = -750 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ 2y + 3z = 1300 \\ -z = -200 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 650 \\ y = 350 \\ z = 200 \end{cases}$$

Hay 650 alumnos matriculados en ESO, 350 en Bachillerato y 200 en Ciclos Formativos.

93. Página 82

Sean x , y , z lo que ha invertido en la primera, segunda y tercera empresa, respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 4000 \\ 0,07x + 0,09y + 0,1z = 352 \\ z = 2y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4000 \\ 7x + 9y + 10z = 35200 \\ -2y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4000 \\ 2y + 3z = 7200 \\ -2y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4000 \\ 2y + 3z = 7200 \\ 4z = 7200 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1300 \\ y = 900 \\ z = 1800 \end{cases}$$

Ha invertido 1 300 € en la primera empresa, 900 € en la segunda y 1 800 € en la tercera.

94. Página 82

Sean x , y , z , la cantidad del cóctel 1, cóctel 2 y cóctel 3, respectivamente.

Entonces:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} 0,6x + 0,65y + 0,85z = 0,65 \\ 0,2x + 0,2y + 0,1z = 0,1875 \\ 0,2x + 0,15y + 0,05z = 0,1625 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 60x + 65y + 85z = 65 \\ 20x + 20y + 10z = 18,75 \\ 20x + 15y + 5z = 16,25 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 5z = 16,25 \\ 60x + 65y + 85z = 65 \\ 20x + 20y + 10z = 18,75 \end{array} \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 5z = 16,25 \\ 20y + 70z = 16,25 \\ 5y + 5z = 2,5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 5z = 16,25 \\ 20y + 70z = 16,25 \\ -50z = -6,25 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 0,375 \\ z = 0,125 \end{cases} \end{aligned}$$

Para obtener el cóctel 4 hay que añadir el 50 % del cóctel 1, el 37,5 % del cóctel 2 y el 12,5 % del cóctel 3.

95. Página 82

Sean x , y , z el número de monedas de 10, 20 y 50 céntimos, respectivamente.

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2600 \\ 0,1x + 0,2y + 0,5z = 870 \\ x + y = z \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2600 \\ y + 4z = 6100 \\ -2z = -2600 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 900 \\ z = 1300 \end{cases}$$

Pablo tiene 400 monedas de 10 céntimos, 900 monedas de 20 céntimos y 1 300 de 50 céntimos.

96. Página 82

Sean:

$x \rightarrow$ Número de páginas que lee Óscar $r \rightarrow$ Número de días que tarda Óscar en leer la novela.

$y \rightarrow$ Número de páginas que lee Beatriz $s \rightarrow$ Número de días que tarda Beatriz en leer la novela.

$z \rightarrow$ Número de páginas que lee Ainhoa $t \rightarrow$ Número de días que tarda Ainhoa en leer la novela.

$$\text{Entonces: } \left. \begin{array}{l} x = y + 3 \\ y = z + 9 \end{array} \right\} \rightarrow x = z + 12 \qquad \left. \begin{array}{l} r = s - 1 \\ s = t - 4 \end{array} \right\} \rightarrow r = t - 5$$

Sabemos que $rx = sy = tz = N.$ º de páginas del libro

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} rx = sy \\ sy = tz \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} (t-5)(z+12) = (t-4)(z+9) \\ (t-4)(z+9) = tz \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \cancel{tz} + 12t - 5z - 60 = \cancel{tz} + 9t - 4z - 36 \\ \cancel{tz} + 9t - 4z - 36 = \cancel{tz} \end{array} \right\} \rightarrow \\ \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3t - z = 24 \\ 9t - 4z = 36 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 3t - 24 \\ 9t - 12t + 96 = 36 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} z = 36 \\ t = 20 \end{cases}$$

El libro tiene $20 \cdot 36 = 720$ páginas.

97. Página 82

Sean x , y , z el precio de una medalla de oro, una de plata y una de bronce, respectivamente.

Entonces:

$$\begin{cases} 50x + 40y + 30z = 230 \\ 90x + 70y + 60z = 418 \\ 40x + 60y + 100z = 336 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 50x + 40y + 30z = 230 \\ -10y + 30z = 20 \\ 140y + 380z = 760 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 50x + 40y + 30z = 230 \\ -10y + 30z = 20 \\ 800z = 1040 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2,3 \\ y = 1,9 \\ z = 1,3 \end{cases}$$

Una medalla de oro vale 2,30 €, una de plata, 1,90 € y una de bronce, 1,30 €.

98. Página 82

Sean x , y , z el número de hojas que reparten Alonso, Luisa y Alba, respectivamente.

Entonces:

$$\begin{cases} y = 0,2(x + y + z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -0,2x + 0,8y - 0,2z = 0 \\ -x + z = 100 \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 8y - 2z = 0 \\ -x + z = 100 \\ x + y = 850 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 8y - 2z = 0 \\ z = 100 + x \\ y = 850 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 550 \\ z = 100 + x \\ y = 850 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 550 \\ y = 300 \\ z = 650 \end{cases}$$

Alonso reparte 550 hojas, Luisa 300 y Alba 650.

99. Página 83

Sea x el peso de un frigorífico y sea y el peso de una lavadora.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} x + y = 120 \\ 3x + 4y = 1550 - 1250 \\ 4x + 5y = 480 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 120 \\ 3x + 4y = 300 \\ 4x + 5y = 480 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 120 \\ 3 & 4 & 300 \\ 4 & 5 & 480 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible.

El sistema no tiene solución; por tanto, los datos recogidos no pueden ser correctos.

100. Página 83

a) Sean x , y , z el número de hombres, mujeres y niños que han acudido a la excursión, respectivamente.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} x + y + z = 20 \\ x = y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas, luego no es posible averiguar cuántos hombres, mujeres y niños fueron con exactitud.

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 20 \\ x = y + 1 \\ x = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ x - y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ -2y - z = -19 \\ -y - 2z = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ -2y - z = -19 \\ -3z = -21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \\ z = 7 \end{cases}$$

Fueron 7 hombres, 6 mujeres y 7 niños a la excursión.

101. Página 83

Sean x , y , z el número de discos de pop, *rock* y *jazz*, respectivamente.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} x + y = z + 30 \\ z + 30 = 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = z + 30 \\ 3x = z + 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{3} + 10 \\ y = \frac{2z}{3} + 20 \end{cases}$$

En total tengo $x + y + z = \left(\frac{z}{3} + 10\right) + \left(\frac{2z}{3} + 20\right) + z = 2z + 30$ discos.

Como el total de discos no llega a 300, $2z + 30 < 300 \rightarrow z < 135$.

Tomamos los múltiplos de 15 menores que 135:

- Si $z = 15 \rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 30 \end{cases} \rightarrow$ No es solución. Igual número de discos de *jazz* y pop.
- Si $z = 30 \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \end{cases} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z = 45 \rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 50 \end{cases} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z = 60 \rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 60 \end{cases} \rightarrow$ No es solución. Igual número de discos de *jazz* y *rock*.
- Si $z = 75 \rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 70 \end{cases} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z = 90 \rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 80 \end{cases} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z = 105 \rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 90 \end{cases} \rightarrow$ Es solución.
- Si $z = 120 \rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 100 \end{cases} \rightarrow$ No es solución. No son múltiplos de 15.

Tengo 45 discos de pop, 90 de *rock* y 105 de *jazz*.

102. Página 83

a) Sean x , y , z el número de viajes que realizarán Raúl, Marco y Antonio, respectivamente.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} x + y = 30 \\ x + y = 10 + z \\ x + y = 0,6(x + y + z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ x + y - z = 10 \\ 0,4x + 0,4y - 0,6z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ x + y - z = 10 \\ 4x + 4y - 6z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ x + y - z = 10 \\ 4x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 1 & -1 & 10 \\ 4 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A) < N.^\circ \text{ de incógnitas}$$

No se puede determinar el número de viajes que realizarán cada uno.

$$b) \begin{cases} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 3x=2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ -z=-20 \\ -5y=-90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=18 \\ z=20 \end{cases}$$

Raúl realizará 12 viajes, Marco 18 y Antonio 20.

103. Página 83

Sean x , y , z el peso de un anillo, una moneda y un pendiente, respectivamente.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} x+y+z=29 \\ 4x+3y+2z=89 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=29 \\ -y-2z=-27 \end{cases}$$

$$\text{Si } x=11 \rightarrow \begin{cases} y+z=18 \\ -y-2z=-27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=18 \\ -z=-9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=9 \\ z=9 \end{cases}$$

No es solución porque los dos objetos pesan lo mismo.

$$\text{Si } y=11 \rightarrow \begin{cases} x+z=18 \\ -2z=-16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=10 \\ z=8 \end{cases}$$

Es posible.

$$\text{Si } z=11 \rightarrow \begin{cases} x+y=18 \\ -y=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=5 \end{cases}$$

No es solución porque la diferencia entre los pesos es superior a 3 g.

El objeto encontrado es una moneda.

104. Página 83

a) Sean x , y , z los precios de las tarifas «Ven al cine en tren», «Oro» y «Estándar», respectivamente.

$$\text{Entonces: } \begin{cases} x+2y+2z=22 \\ 3x+y+z=23,5 \end{cases}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, no podemos determinar el valor de las incógnitas.

b) El valor de y ha de ser un número natural par.

$$\text{Si } y=2 \rightarrow \begin{cases} x+2z=18 \\ 3x+z=21,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2z=18 \\ -5z=-32,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ z=6,5 \end{cases} \rightarrow \text{Es solución.}$$

$$\text{Si } y=4 \rightarrow \begin{cases} x+2z=14 \\ 3x+z=19,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2z=14 \\ -5z=-22,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ z=4,5 \end{cases}$$

No es solución porque la tarifa «Estándar» es más barata que la tarifa «Ven al cine en tren».

$$y=6 \rightarrow \begin{cases} x+2z=10 \\ 3x+z=17,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2z=10 \\ -5z=-12,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ z=2,5 \end{cases}$$

No es solución porque la tarifa «Estándar» es más barata que la tarifa «Ven al cine en tren».

Si continuamos vemos que según aumenta el valor de y , se reduce el de z y aumenta también el de x .

Por tanto, la solución es que la tarifa «Ven al cine en tren» cuesta 5 €, la «Oro» 2 € y la «Estándar» 6,50 €.

105. Página 83

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\lambda + 8}{7} \\ y = \frac{11\lambda + 18}{7} \\ z = \lambda \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x = z + 8 \\ 7y = 11z + 18 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x - z = 8 \\ 7y - 11z = 18 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\mu + 10}{11} \\ y = \mu \\ z = \frac{7\mu - 18}{11} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 11x = y + 10 \\ 11z = 7y - 18 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 11x - y = 10 \\ 11z - 7y = -18 \end{array} \right\}$$

Si formamos un sistema con las tres ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 7x - z = 8 \\ 7y - 11z = 18 \\ 11x - y = 10 \end{array} \right\}$$

Comprobamos que ambas soluciones son correctas, ya que el sistema es compatible indeterminado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -11 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 18 \\ 11 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 84

$$\left. \begin{array}{l} 5Y + 20T + 6I = 1292 \\ Y = 18 + I \\ T = 0,15Y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5Y + 20T + 6I = 1292 \\ Y = 18 + I \\ T = 2,7 + 0,15I \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(18 + I) + 20(2,7 + 0,15I) + 6I = 1292 \\ Y = 18 + I \\ T = 2,7 + 0,15I \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} I = 82 \\ Y = 100 \\ T = 15 \end{cases}$$

El resultado es correcto.

2. Página 84

Con dos ecuaciones tendríamos un sistema compatible indeterminado y, por tanto, infinitas soluciones.

Con cuatro ecuaciones puede obtenerse la solución si una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras. Si no estamos en este caso tendríamos un sistema compatible indeterminado.

3. Página 84

Se puede hacer de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} 5Y + 20T + 6I = 1292 \\ Y = 18 + I \\ T = 0,15Y \\ T = 2,7 + 0,15I \end{array} \right\}$$

Obtendríamos el mismo resultado.

4. Página 84

Si en 20 días hemos gastado 1 292 Mb:

$$\frac{1292}{20} \cdot 30 = 1938 < 2024 \rightarrow \text{Tendría suficiente para todo el mes.}$$