Determinantes

2

ACTIVIDADES

1. Página 36

a) $|A|=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=(-3)\cdot(-4)-2\cdot 5=12-10=2$

b) $|B|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot 1+0\cdot(-2)\cdot(-1)+5\cdot 1\cdot 1-5\cdot 1\cdot(-1)-0\cdot 1\cdot 1-2\cdot(-2)\cdot 1=16$

2. Página 36

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4\cdot(-2)-2x\cdot 1=-8-2x \rightarrow -2x-8=0 \rightarrow x=-4$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & x & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot x\cdot 2+(-2)\cdot(-5)\cdot 1+(-3)\cdot 2\cdot 1-(-3)\cdot x\cdot 1-(-2)\cdot 2\cdot 2-3\cdot(-5)\cdot 1=9x+27 \rightarrow 9x+27=0 \rightarrow x=-3$

3. Página 37

a) $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 1\cdot 1+7\cdot(-2)\cdot 2+4\cdot 2\cdot(-1)-4\cdot 1\cdot 2-7\cdot 2\cdot 1-(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)=-57$

b) $|A| = |A^t| = -57$

c) $|2A| = 2^3\ |A| = 8 \cdot (-57) = -456$

d) $|-A| = (-1)^3\ |A| = -(-57) = 57$

4. Página 37

a) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \rightarrow \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\frac{2}{3}$

b) $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-2$

c) $\begin{vmatrix} 5b & 5d \\ 3a & 3c \end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=3\cdot 5\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=10$

5. Página 38

$$\begin{vmatrix} 3a & b+2a & c-a \\ 3d & e+2d & f-d \\ 3g & h+2g & i-g \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} a & b+2a & c-a \\ d & e+2d & f-d \\ g & h+2g & i-g \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=3\cdot(-2)=-6$$

6. Página 38

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-\frac{1}{2}F_1 \\ F'_3=F_3+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3+F_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-1) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-\frac{1}{4}F_1 \\ F'_3=F_3+\frac{1}{2}F_1}}{=} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. Página 39

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & 3 & a \\ a & 5 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & 2 \\ a & a & 4 \\ a & a & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0+0+0+\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_3=F_3-F_2 \\ F'_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

8. Página 39

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 7\cdot(-7)\cdot 10 + 8\cdot 3\cdot 1 = -466$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot(-2)\cdot 4 = 10 \qquad |A|\cdot|B| = -466\cdot 10 = -4\,660$$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{vmatrix} = (-16)\cdot 12\cdot 1 + 21\cdot(-14)\cdot 30 + 23\cdot 23\cdot 43 - 23\cdot 12\cdot 30 - 21\cdot 23\cdot 1 - (-16)\cdot(-14)\cdot 43 = -4\,660$$

9. Página 40

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-2F_1 \\ F'_3=F_3-3F_1 \\ F'_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F''_3=F'_3-\frac{4}{3}F_2 \\ F''_4=F'_4-F_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{F'''_4=F''_4+6F''_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot 9 = -18$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-2F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \\ F'_4=F_4-3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} \overset{F''_4=F'_4-\frac{2}{3}F'_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} \end{vmatrix} = 0$$

10. Página 40

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{F_3\leftrightarrow F_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ a & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \\ F'_4=F_4-aF_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1-a & -1-a & 1-2a \end{vmatrix} \overset{\substack{F''_3=F'_3+2F'_2 \\ F''_4=F'_4+(1+a)F'_2}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -5-5a & 7+4a \end{vmatrix} \overset{F'''_4 = F''_4 - \left(\frac{5+5a}{8}\right)F''_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-8) \cdot (2-a)$$

Por tanto, el determinante será 0 si y solo si $a = 2$.

11. Página 41

a) $\alpha_{21} = 3$

b) $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 18 = -4$

12. Página 41

a) $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$

b) $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(8 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2)) = 4$

13. Página 42

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5A_{11} + (-4)A_{12} + 0A_{13} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5(3-2) + 4(-12) = -43$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 10 - 48 = -43$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3A_{11} - 2A_{12} + 1A_{13} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 3(8+6) + 2(4-6) + (-2-4) = 32$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 12 - 2 - 4 + 18 + 8 = 32$

14. Página 42

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} - 1 \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = -(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-15) - 2 \cdot 7 = 1$

15. Página 43

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{F'_2 = F_2 - F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

16. Página 43

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & 7 \\ 0 & 2 & a & 6 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

17. Página 44

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ Y cada uno de los elementos de la matriz es un menor de orden 1.

18. Página 44

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0$; por tanto, el rango de *A* es 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$; por tanto, el rango de *B* es 2.

19. Página 45

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0 \to \text{Rango} \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango} < 3$

Por tanto, el rango de la matriz *A* es 2.

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+3 = 5 \neq 0 \to \text{Rango} \geq 2.$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0\,, \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango} < 3$

Por tanto, el rango de la matriz *B* es 2.

20. Página 45

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3 \neq 0 \to \text{Rango} \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix} = m - 15 + 4 - 10 + 2m - 3 = 3m - 24 \to 3m - 24 = 0 \to m = 8$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 5m + 4 - 10 + 12 - m = -6m + 12 \to -6m + 12 = 0 \to m = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 5 & m & 6 \end{vmatrix} = 18 + 10m + 4m - 30 - 24 - m^2 = -m^2 + 14m - 36 \to -m^2 + 14m - 36 = 0 \to m = 7 \pm \sqrt{13}$

Ningún valor de *m* anula los tres menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de *A* es 3.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \to \text{Rango} \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m + m - 1 - 2 - m^2 = -m^2 + 3m - 2 \to -m^2 + 3m - 2 = 0 \to m = 1 \text{ y } m = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + m - 1 + m^2 - m^2(m-1) - 1 - m = -m^3 + 2m^2 + m - 2 \to -m^3 + 2m^2 + m - 2 = 0 \to \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + 2(m-1) + m - m(m-1) - 2 - m = -m^2 + 4m - 4 \to -m^2 + 4m - 4 = 0 \to m = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m(m-1) + m - (m-1) - 2 - m^2 = m^2 - 2m \to m^2 - 2m = 0 \to \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$

Solo el valor $m = 2$ anula los cuatro menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de *B* es 3 para todo valor $m \neq 2$ y para $m = 2$ el rango de *B* es 2.

21. Página 46

a) $\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\text{Adj}(C)=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

22. Página 46

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 16 & -16 \\ 2 & -16 & 10 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}\rightarrow Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}=40+96+72-120-64-36=-12 \qquad A\cdot Adj(A)^t=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}=-12\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Página 47

a) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1 \longrightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\longrightarrow Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $|B|=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=24 \longrightarrow Adj(B)=\begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 20 & -11 & 5 \end{pmatrix}\longrightarrow Adj(B)^t=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 20 \\ 7 & -1 & -11 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}Adj(B)^t=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 20 \\ 7 & -1 & -11 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{7}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{11}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$$

24. Página 47

a) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+4m-3 \longrightarrow -m^2+4m-3=0\rightarrow\begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}$ $\longrightarrow$ *A* es invertible si y solo si $m\neq 1$ y $m\neq 3$.

b) $|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=12-12-m^2-9m+2m+8=-m^2-7m+8 \longrightarrow -m^2-7m+8=0\rightarrow\begin{cases} m=1 \\ m=-8 \end{cases}$ $\longrightarrow$ *B* es invertible si y solo si $m\neq 1$ y $m\neq -8$.

SABER HACER

25. Página 48

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^3+1+1-(1+x)-(1+x)-(1+x) = x^3+3x^2 \to x^3+3x^2=0 \to \begin{cases} x=-3 \\ x=0 \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2-1 \to x^2-1=0 \to \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2-3+2(x-1)+4-4x = x^2-2x-1 \to x^2-2x-1=-2 \to x^2-2x+1=0 \to x=1$

26. Página 48

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ x & 0 & 2 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = x^2-4x=-4 \to x^2-4x+4=0 \to x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 4}}{2}=2$$

27. Página 48

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-6+3m+2-9-4m=-m-9 \qquad -m-9=0 \to m=-9$$

Si $m \neq 9$ el rango de la matriz es 3. Si $m = 9$, tiene rango 2.

28. Página 49

$$\begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1)+m^2(m-1)+m^2(m-1)-m^2(m-1)-m(m-1)^2-m^2=m^2-2m=m(m-2)$$

$m(m-2)=0 \to \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases}$ Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$, el rango de la matriz A es 3.

Si $m=0 \to A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2. Si $m=2 \to A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2.

29. Página 49

$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to$ Rango ≥ 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9+3k-9+9=3k-9 \to 3k-9=0 \to k=3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9+3k \to 9+3k=0 \to k=-3$$

Como no hay ningún valor que anule simultáneamente todos los menores de orden 3, el rango de A es 3.

30. Página 50

$$|A|=-2 \qquad Adj(A)=\begin{pmatrix}3&4\\2&2\end{pmatrix} \qquad Adj(A)^t=\begin{pmatrix}3&2\\4&2\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-1\\-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-1\\-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&2x\\-2&0\end{pmatrix}\to x=-\frac{1}{2}$$

31. Página 50

$$|A|=\begin{vmatrix}m-1&1&1\\1&m-1&1\\0&1&m\end{vmatrix}=m(m-1)^2+1-m-(m-1)=m^3-2m^2-m+2 \longrightarrow m^3-2m^2-m+2=0\to\begin{cases}m=-1\\m=1\\m=2\end{cases}$$

Por tanto, *A* es invertible si y solo si $m\neq-1$, $m\neq 1$ y $m\neq 2$.

32. Página 50

Tomamos $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&3&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-1&0\\0&2&2\end{pmatrix}$.

$$A\cdot X=B\to A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\to X=A^{-1}B$$

Vamos a calcular A^{-1}:

$$|A|=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&3&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1,\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-3\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}0&1&-3\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-1&0\\0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-7&-6\\0&2&2\\1&5&4\end{pmatrix}$$

33. Página 51

Consideramos $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$.

$$AX+B=C^2\to AX=C^2-B\to A^{-1}AX=A^{-1}(C^2-B)\longrightarrow X=A^{-1}(C^2-B)$$

$$|A|=-3 \text{ y } A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&2&-3\\5&2&-6\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}(C^2-B)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&2&-3\\5&2&-6\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&2&-3\\5&2&-6\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3&0&-6\\0&1&0\\6&-6&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\2&2&-3\\5&2&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&0&-6\\-3&1&1\\4&-7&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}19&-22&-4\\-26&23&-1\\-50&44&-10\end{pmatrix}$$

34. Página 51

$$AX+X=B \rightarrow AX+IX=B \rightarrow (A+I)X=B \rightarrow (A+I)^{-1}(A+I)X=(A+I)^{-1}B \rightarrow X=(A+I)^{-1}B$$

$$X=(A+I)^{-1}B=\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -20 & 55 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

35. Página 52

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4 \qquad |B|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-11$$

$$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow |A+B|=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

$$A-B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\rightarrow |A-B|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-25$$

36. Página 52

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5 \qquad |B|=\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\rightarrow |A\cdot B|=\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-15=|A|\cdot|B|$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 16 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\rightarrow |B\cdot A|=\begin{vmatrix} 9 & 16 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}=-15=|B|\cdot|A|$$

37. Página 52

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}=0$

c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix}=-3a-2b$

d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}=0$

e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix}=a^2-7a$

f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix}=2a^2+2$

38. Página 52

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix}=4a+6$, $4a+6=26 \rightarrow a=5$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix}=-15b$, $-15b=45 \rightarrow b=-3$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix}=c^2-12c+4$, $c^2-12c+4=32 \rightarrow c=-2$ **o** $c=14$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & \frac{-2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=\frac{14}{d}$, $\frac{14}{d}=7 \rightarrow d=2$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix}=\sqrt{e^2-6e}-4$, $\sqrt{e^2-6e}-4=0 \rightarrow e=8$

f) $\begin{vmatrix} 1 & -2f \\ f & -1 \end{vmatrix}=-1+2f^2$, $2f^2-1=-\frac{1}{2} \rightarrow 2f^2-\frac{1}{2}=0 \rightarrow 4f^2-1=0 \rightarrow f=\pm\frac{1}{2}$

39. Página 52

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A + B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A - B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

40. Página 52

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3 \cdot a \cdot b \cdot c$

41. Página 52

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 3a - 4\,,\ 3a - 4 = 2 \rightarrow a = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2 + 5b - 1,\ b^2 + 5b - 1 = 5 \rightarrow b = -6$ o $b = 1$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2 + 23c + 3\,,\ c^2 + 23c + 3 = -197 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -2d^3 - d\,,\ -2d^3 - d = -18 \rightarrow d = 2$

42. Página 52

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{vmatrix} = -3456 - 4158 - 2618 + 4896 + 1848 + 2376 = -1112$$

43. Página 52

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3\\-2&1\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}0&-3\\-2&1\end{vmatrix}=-6$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&0&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}0&2&-2\\2&0&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}=0$$

44. Página 52

a) $|A|=\begin{vmatrix}3&5\\-1&2\end{vmatrix}=11,\ 2|A|=22$

$2A=\begin{pmatrix}6&10\\-2&4\end{pmatrix},\ |2A|=\begin{vmatrix}6&10\\-2&4\end{vmatrix}=44\to$ No se cumple.

b) $A+B=\begin{pmatrix}3&5\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\2&3\end{pmatrix},\quad |A+B|=\begin{vmatrix}1&9\\2&3\end{vmatrix}=-15$

$|A|=11,\ |B|=\begin{vmatrix}-2&4\\3&1\end{vmatrix}=-14,\ |A|+|B|=-3\to$ No se cumple.

c) $C-2B=\begin{pmatrix}6&-3\\-4&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-11\\-10&1\end{pmatrix},\ |C-2B|=\begin{vmatrix}10&-11\\-10&1\end{vmatrix}=-100$

$|B|=-14,\ |C|=\begin{vmatrix}6&-3\\-4&3\end{vmatrix}=6,\ |C|-2|B|=34\to$ No se cumple.

d) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3&5\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&17\\8&-2\end{pmatrix},\ |A\cdot B|=\begin{vmatrix}9&17\\8&-2\end{vmatrix}=-154$

$|A|=11,\ |B|=-14,\ |A|\cdot|B|=-154\to$ Se cumple por la propiedad 9.

45. Página 52

$|A|=\begin{vmatrix}1&3&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-5$ $\qquad |A^t|=|A|=-5$ $\qquad |2A|=2^3|A|=-40$

$|A^2|=|A\cdot A|=|A|\cdot|A|=25$ $\qquad \left|\frac{1}{2}A^3\right|=\frac{1}{2^3}|A|\cdot|A|\cdot|A|=\frac{1}{8}(-5)^3=\frac{-125}{8}$

46. Página 52

$$\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&2&-1\\2&5&-2\end{vmatrix}=2$$

a) $F_3+F_2\to\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&2&-1\\3&7&-3\end{vmatrix}=2$

b) $C_3+C_1\to\begin{vmatrix}3&4&2\\1&2&0\\2&5&0\end{vmatrix}=2$

c) $C_2+3C_1+C_3\to\begin{vmatrix}3&12&-1\\1&4&-1\\2&9&-2\end{vmatrix}=2$

d) $F_3-F_1-2F_2\to\begin{vmatrix}3&4&-1\\1&2&-1\\-3&-3&1\end{vmatrix}=2$

47. Página 52

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2c - b + 2a \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} a+2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c+5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - b - 2c - 3$$

Por tanto, se cumple la igualdad: $\begin{vmatrix} a+2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c+5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

48. Página 52

$|A| = 3$, $|2A| = 48$

$2^n|A| = 48 \rightarrow 2^n \cdot 3 = 48 \rightarrow 2^n = 16 \rightarrow n = 4$

La matriz *A* es de orden 4.

49. Página 52

$|3A| = 54$, $n = 3$

$3^3|A| = 54 \rightarrow |A| = 2$

50. Página 52

a) $|M^t| = 5$
Propiedad 1

b) $|2M| = 2^2|M| = 4 \cdot 5 = 20$
Propiedad 3

c) $|5M| = 5^2|M| = 25 \cdot 5 = 125$
Propiedad 3

d) $|2M| = 2^3|M| = 8 \cdot 5 = 40$
Propiedad 3

e) $|5M| = 5^3|M| = 125 \cdot 5 = 625$
Propiedad 3

f) $|2M| = 2^4|M| = 16 \cdot 5 = 80$
Propiedad 3

51. Página 53

a) Propiedad 3 – Propiedad 5 – Propiedad 2

b) Propiedad 5 $\left(F'_1 = F_1 - 10F_2\right)$

c) Propiedad 5 $\left(F'_1 = F_1 - 10F_2\right)$ y $\left(F'_2 = F_2 - 10F_3\right)$

d) Propiedad 8 – Propiedad 6

52. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3+2F_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dot{5}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{C'_3=100C_1+10C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 125 \\ 3 & 7 & 375 \\ 6 & 2 & 625 \end{vmatrix} = 25 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 15 \\ 6 & 2 & 25 \end{vmatrix} = \dot{25}$

c) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 7 & -3 \end{vmatrix} \overset{F_3=-F_1-F_2+8F_3}{=} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -14 & 56 & -35 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 8 & -5 \end{vmatrix} = \dot{7}$

53. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C'_1=C_1-C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$

54. Página 53

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad |A| + |B| = 2 + 3 = 5 \qquad A + B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A + B| = 18 - 13 = 5$

No, no es cierto para todas las matrices, por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $|A| = 0$. Y sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|B| = 0$ y, sin embargo, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A + B| = 1$.

55. Página 53

$\begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 2g & 2i & 2h \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} d & f & e \\ g & i & h \\ a & c & b \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} 2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2^3 \cdot \frac{1}{2} = -4$

56. Página 53

$|M^3| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = 6^3 = 216$

$|2M| = 2^{(\text{Orden de } M)} \cdot |M| = 6 \cdot 2^{(\text{Orden de } M)}$

57. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 3 = 45$

b) $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1-2C_3}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{C_2\leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$

58. Página 53

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\right) = 3(0+6) = 18$

c) $\begin{vmatrix} b & 2a & \frac{c}{5} \\ e & 2d & \frac{f}{5} \\ h & 2g & \frac{i}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}\cdot 6 = -\frac{12}{5}$

59. Página 53

a) $C_3 = -2C_1$ b) $F_3 = F_1 + F_2$ c) $C_3 = \frac{1}{2}C_1 + C_2$ d) $F_3 = 3F_2 - 2F_1$

60. Página 53

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \overset{F_2'=F_2-F_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \overset{F_3'=F_3+F_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

61. Página 53

a) Cierta, por las propiedades de los determinantes.

b) Falsa, se debería multiplicar por 4 el determinante.

c) Falsa, solo se multiplica por 4 el elemento *ad*, pero no *bc*.

d) Cierta, por las propiedades de los determinantes.

62. Página 53

$$\begin{vmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 8 \rightarrow a \cdot b \cdot c = 8$$

a) $\begin{vmatrix} a+f & d-a & f \\ c+e & b & c+e \\ e & b & e \end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} a & d-a & f \\ 0 & b & c+e \\ 0 & b & e \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & c+e \\ b & e \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & c+e \\ 1 & e \end{vmatrix} \overset{F_1-F_2}{=} ab\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & e \end{vmatrix} = ab(-c) = -8$

b) $abc = 8 \rightarrow a \cdot 1 \cdot 2 = 8 \rightarrow a = 4$

63. Página 54

a) Es una matriz triangular, su determinante es 5 · 1 · 3 · 1 = 15.

b) Es una matriz triangular, su determinante es 2 · 2 · 3 · 3 = 36.

64. Página 54

$|B| = |2 \cdot A^2| = 2^3 \cdot |A| \cdot |A| = 8 \cdot |A|^2 \rightarrow 8 \cdot |A|^2 = -32 \rightarrow |A|^2 = -4$ No puede ser; por tanto, no es posible que el valor del determinante de B sea –32.

65. Página 54

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 3x^2 - 7x + 6 = 2x \rightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} x & x+2 & x-1 \\ x & x+4 & x-3 \\ x & x+6 & x-6 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ x & 4 & -3 \\ x & 6 & -6 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow -2x = -10 \rightarrow x = 5$

c) $\begin{vmatrix} 2x & 4 & -2 \\ x & 2 & x \\ -1 & 3 & 2x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6x^2 - 10x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 7x \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 1 - 7x \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$

66. Página 54

$$\begin{vmatrix} x+a & b \\ a & x+b \end{vmatrix} = (x+a)(x+b) - ab = x^2 + (a+b)x = 0 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ o } x = 3$$

67. Página 54

$$|M| = 3 \rightarrow |4M| = 4^2|M| \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\rightarrow} -4^2|M| \overset{\frac{1}{2}F_2}{\rightarrow} -4^2 \cdot \frac{1}{2}|M| = -24 = |P|$$

68. Página 54

$$|M| = 5 \rightarrow |3M| = 3^3|M| \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\rightarrow} -3^3|M| \overset{-2C_2}{\rightarrow} -3^3 \cdot (-2)|M| = 270 = |P|$$

69. Página 54

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$ $\qquad |A^2| = (abcd)^2$

b) $A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^3 \end{pmatrix}$ $\qquad |A^3| = (abcd)^3$

c) $|A^n| = (abcd)^n$

70. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 + 6 - 84 - 9 = -80$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-39) + 7 = -80$

71. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 3 + 24 - 8 - 10 + 54 = 117$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2' = C_2 - 6C_1 \\ C_3' = C_3 - 5C_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 117$

72. Página 54

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -(-8 + 10 - 24 - 24 + 20 + 4) - (-30 - 36 + 16 - 40 + 6 + 72) = 34$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 3(-8 - 24 - 20 + 30 - 16 - 8) - 3(8 - 24 - 16 + 24 - 16 + 8) - (8 - 20 + 8 - 16 + 8 - 10) = -92$

73. Página 54

Lo desarrollamos por la última fila:

$$2\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\4 & 0 & -2\\1 & 3 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\4 & 2 & 0\\1 & 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\2 & 0 & -1\\1 & 3 & 1\end{vmatrix}+2\cdot 2\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & 1 & 3\end{vmatrix}=4\cdot(6+(-2))=16$$

Efectivamente es divisible entre 4.

74. Página 54

$$|A|=\begin{vmatrix}-a & 1 & 0\\1 & -a & 1\\0 & 1 & -a\end{vmatrix}=-a^3+2a=a(2-a^2)$$

Si $a\neq 0$ y $a\neq\pm\sqrt{2}$ el determinante es distinto de 0.

75. Página 54

$$\begin{vmatrix}3a & a & a & a\\a & 3a & a & a\\a & a & 3a & a\\a & a & a & 3a\end{vmatrix}=a^4\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}\overset{\substack{C_2'=C_2-C_1\\C_3'=C_3-C_1\\C_4'=C_4-C_1}}{=}a^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & -2 & -2\\1 & 2 & 0 & 0\\1 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=a^4\cdot\left[-1\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2 & -2\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & -2\\1 & 2 & 0\\1 & 0 & 2\end{vmatrix}\right]=a^4[-(-8)+2(12+4+4)]=48a^4$$

76. Página 54

Para que el determinante sea 0, el rango de la matriz no puede ser tres, es decir, las tres columnas no pueden ser linealmente independientes. La segunda y tercera columnas son linealmente independientes, de modo que la primera tiene que ser dependiente; para ello es igual a una de las dos, o bien es combinación lineal de ambas.

Es igual a la segunda si $x = 2$. Es igual a la tercera si $x = -3$. Y no existe una combinación lineal de la segunda y la tercera que nos dé algún valor de x posible para la primera, de modo que solo tenemos dos soluciones.

77. Página 54

$$\begin{vmatrix}x+2 & 1 & 1\\1 & x+2 & 1\\x & x & 3\end{vmatrix}=3(x+2)^2+x+x-x(x+2)-x(x+2)-3=3x^2+12x+12+2x-2x^2-4x-3=x^2+10x+9=0$$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{-10\pm 8}{2}=\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-9\end{cases}$$

78. Página 54

a) $f(a)=\begin{vmatrix}2a & 1 & -2\\-1 & 0 & 2a\\a & -1 & a\end{vmatrix}=2a^2-2-4a^2+a=-2a^2+a-2$

b) $f(0)=\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -1 & -a & 2a \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix}=2a^2-2-2a^2+2a^2=2a^2-2$

c) $f(1)=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & -2 \\ -1 & 1-a & 2a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1+a)(1-a)+2a^2-2+2a(1-a)+2a(1+a)+1=1-a^2+2a^2-2+4a+1=a^2+4a=5$

$$a=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}=\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=-5 \end{cases}$$

79. Página 55

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=6\neq 0 \longrightarrow \text{Rango}=2$

b) $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -18 \end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix} -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{vmatrix}=0 \longrightarrow \text{Rango}=1$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix}=0 \longrightarrow \text{Rango}<3,\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=7\neq 0 \longrightarrow \text{Rango}=2$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-39\neq 0 \longrightarrow \text{Rango}=3$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 24 & 3 & 19 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 19 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 24 & 19 \end{vmatrix}=0 \longrightarrow \text{Rango}<3$

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=18\neq 0 \longrightarrow \text{Rango}=2$

f) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -24 & 1 \end{vmatrix}=78\neq 0 \longrightarrow \text{Rango}=2$

80. Página 55

a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=9\neq 0 \longrightarrow \text{Rango}=3$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0 \longrightarrow \text{Rango}<3$

$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=23\neq 0 \longrightarrow \text{Rango}=2$

81. Página 55

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 3$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rango < 3, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 2$

82. Página 55

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 3$

Una combinación sería, por ejemplo: $C_4 = C_1 - C_2 + 2C_3$.

83. Página 55

a) Si consideramos el menor de orden 2 $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ tenemos que su determinante es distinto de 0; por lo tanto, el rango es 2.

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 8 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

84. Página 55

a) Consideramos los menores $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 3 \end{pmatrix}$ y vemos para que valores de *a* se anulan sus determinantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a - 9 = 0 \rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4} = \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4a - 12 = 0 \rightarrow a = 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = 5a - 15 = 0 \rightarrow a = 3$$

Si $a = 3$, no hay ningún menor cuyo determinante sea distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango menor que 3, pero sí que podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por ejemplo $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, así que el rango será 2.

Si $a \neq 3$, podemos encontrar un menor de orden 3 con determinante distinto de 0, por lo que el rango es 3.

b) Consideramos los menores $\begin{pmatrix} 1 & 1 & b+1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ b & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y vemos para qué valores de a se anulan sus determinantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{vmatrix} = b^2(b+1) - 2b = b(b^2+b-2) = 0 \to \begin{cases} b=0 \\ b^2+b-2=0 \end{cases}$$

$$b^2+b-2=0 \to b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} b=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = b^2 - 2b = b(b-2) = 0 \to \begin{cases} b=0 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ b & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b(b+1) - 4 = 2b^2 + 2b - 4 = 0 \to b = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{4} = \frac{-2 \pm 6}{4} = \begin{cases} b=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

No hay ningún valor que anule los tres menores de orden 3, de modo que siempre podremos encontrar un menor de orden 3 con determinante distinto de 0 y, por tanto, el rango de la matriz es siempre 3.

85. Página 55

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A'| = 6 - 18 = -12$. El determinante es distinto de 0, el rango es 3.

No es posible añadir una columna a B y obtener rango 3, ya que las dos columnas que hay son linealmente dependientes y el rango de B es 1; al añadir una columna lo máximo que tendríamos es rango 2.

86. Página 55

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^2 \qquad |C| = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 4m + 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3m \qquad |D| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -m & m & -3m \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = -m^2 = 0 \to m = 0 \qquad |B| = 3m^2 - 3m = 0 \to \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases} \qquad |C| = -2m^2 + 4m + 2 = 0 \to m = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = \begin{cases} m = 1+\sqrt{2} \\ m = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

La matriz D tiene rango 1 para cualquier valor de m.

a) La matriz A tiene rango 3 si $m \neq 0$.

La matriz B tiene rango 3 si $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

La matriz C tiene rango 3 si $m \neq 1+\sqrt{2}$ y $m \neq 1-\sqrt{2}$.

b) No hay ningún valor para el que la matriz A tenga rango 2.

Si $m = 0$ o $m = 1$, en la matriz B podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango 2.

Si $m = 1+\sqrt{2}$ o $m = 1-\sqrt{2}$, en la matriz C podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango 2.

87. Página 55

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & a+2 \end{vmatrix} = a^2+2a+1$, $a^2+2a+1=0 \rightarrow a=-1$; por tanto, $|A|=0 \rightarrow$ Rango $A = 1$.

88. Página 55

$A+tI=\begin{pmatrix} 2+t & 2 \\ 3 & 1+t \end{pmatrix}$ $\qquad |A+tI| = \begin{vmatrix} 2+t & 2 \\ 3 & 1+t \end{vmatrix} = t^2+3t-4$, $t^2+3t-4=0 \rightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=1 \end{cases}$

Por tanto, si $t=-4$ o $t=1$ el rango de $A+tI$ es 1.

89. Página 55

$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a(a^5-a^3-a^2+1)$, $a(a^5-a^3-a^2+1)=0 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=0 \\ a=1 \end{cases}$

Si $a=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el rango es 1.

Si $a=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el rango es 2.

Si $a=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango es 2.

90. Página 55

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & a+1 \\ a+1 & a-1 & 2a \end{vmatrix}$, $C_3=C_1+C_2 \rightarrow$ Rango $A < 3$

$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a+1 & a-1 \end{vmatrix} = -a^2-1$, $-a^2-1 \neq 0$ para cualquier valor de $a \rightarrow$ Rango $A = 2$.

91. Página 55

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow$ rango ≥ 2 $\qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -16a-48$, $-16a-48=0 \rightarrow a=-3$

Si $a \neq -3 \rightarrow$ rango $= 3$

Si $a=-3 \rightarrow$ rango $= 2$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -6b^2+10b+4$, $-6b^2+10b+4=0 \rightarrow \begin{cases} b=-\frac{1}{3} \\ b=2 \end{cases}$

Si $b \neq 2$ y $b \neq -\frac{1}{3} \rightarrow$ rango $= 3$ $\qquad$ Si $b=2$ o $b=-\frac{1}{3} \rightarrow$ rango $= 2$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ rango $\geq$ 2

Como $C_1 = -C_4$ todos los menores se pueden reducir a uno.

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ c & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6+3c$, $-6+3c=0 \rightarrow c=2$

Si $c \neq 2 \rightarrow$ rango $= 3$

Si $c = 2 \rightarrow$ rango $= 2$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -d & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ d & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9d^2 - 36d + 36$, $9d^2 - 36d + 36 = 0 \rightarrow d = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -d & -2 \\ -3 & 6 & 6 \\ d & -4 & -4 \end{vmatrix} = -6d^2 + 24d - 24$, $-6d^2 + 24d - 24 = 0 \rightarrow d = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \\ d & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -d & 3 & -2 \\ 6 & -9 & 6 \\ -4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Si $d \neq 2 \rightarrow$ rango $= 3$ Si $d = 2 \rightarrow$ rango $= 1$, ya que todas las filas son proporcionales.

92. Página 55

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a$, $a(a^2-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1 \rightarrow$ rango $= 3$

Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

b) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 2a+1 & a+1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a$, $a(a^2-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1 \rightarrow$ rango $= 3$

Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4 \text{ , } a^2 + 3a - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = 1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2a & a & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 4 \text{ , } -a^2 - 4 = 0$ no se cumple para ningún valor de a.

El rango de la matriz es 3, ya que para cualquier valor de a existe un menor de orden 3 distinto de cero.

93. Página 56

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $|B| = 1 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|C| = -20 \neq 0 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$

d) $|D| = 10 \neq 0 \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

94. Página 56

a) $|A^t| = |A| = 5$

b) $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$

c) $|AB| = |A| \cdot |B| = 20$

d) $|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{4}{5}$

e) $|(BC)^{-1}| = \frac{1}{|BC|} = \frac{1}{|B| \cdot |C|} = \frac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t| = \frac{1}{|C|} \cdot |B^t| = \frac{1}{|C|} \cdot |B| = 2$

95. Página 56

$|A| = 4 \text{ , } |B| = -4 \text{ , } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \; B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 9 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ , } A + B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{19}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 10 & 5 & -5 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

a) $|A + B^{-1} \cdot A| = 0$

b) $|A^3 \cdot B^{-1}| = |A^3| \cdot |B^{-1}| = |A|^3 \cdot \frac{1}{|B|} = -16$

96. Página 56

$A^2 = I \rightarrow |A^2| = |I| = 1 \rightarrow |A| \cdot |A| = 1 \rightarrow |A| = \pm 1 \neq 0 \; \rightarrow$ La matriz A es invertible.

$A^2 = A \cdot A = I \; \rightarrow A^{-1} = A \rightarrow (A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \rightarrow (A^{-1})^2 = I$

97. Página 56

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$-A-I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=-A-I\rightarrow I=-A-A^3=A(-I-A^2)\rightarrow A^{-1}=-I-A^2 \quad A^{-1}=-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

98. Página 56

$|M|=-a^2+a$, $|M|=0$ si $-a^2+a=0\rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=1\end{cases}$; por tanto, la matriz M no tiene inversa para $a=0$ y $a=1$.

Si $a=2$, $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $|M|=-2\rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

99. Página 56

$|A|=-m-1$, $|A|=0 \;\rightarrow\; -m-1=0 \;\rightarrow\; m=-1\rightarrow$ La matriz A es singular para $m=-1$.

Si $m=2 \;\rightarrow\; A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$; $|A|=-3\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{4}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

100. Página 56

a) A es invertible, si y solo si, $|A|\neq 0$; $|A|=a^2-2ab+b^2$

$|A|=0 \;\rightarrow\; a^2-2ab+b^2=0 \;\rightarrow\; a=b\rightarrow A$ es invertible si y solo si $a\neq b$.

b) $A=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $|A|=4\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{3}{4} & 1\end{pmatrix}$

101. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}15 & 5\\ 30 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15 & 5\\ 30 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

b) $Y=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}11 & 10 & 0\\ 14 & 4 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & \frac{3}{16}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11 & 10 & 0\\ 14 & 4 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

102. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix}66 & 14\\ -13 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}66 & 14\\ -13 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

b) $Y=\begin{pmatrix}17 & 9\\ 0 & -11\\ 6 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}17 & 9\\ 0 & -11\\ 6 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{11} & -\frac{2}{11}\\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

103. Página 56

a) $X=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}14 & 9\\ -17 & -10\\ 17 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14 & 9\\ -17 & -10\\ 17 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

b) $Y=\left[\begin{pmatrix}10 & -10 & -10\\ -10 & 10 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -4 & -2\\ 13 & -2 & -3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -6 & -8\\ -23 & 12 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 8 & 6 & \frac{3}{2}\\ -4 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 9 & 1 & 2\end{pmatrix}$

104. Página 56

a) $Z=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\ 8\\ 10\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ -5\\ -18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 0\end{pmatrix}$

b) $T=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}32 & 28 & 111\\ 54 & 52 & 194\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}32 & 28 & 111\\ 54 & 52 & 194\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4}\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}10 & 4 & 28\\ -8 & 12 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4}\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 9\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$

105. Página 56

$$C=\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{76}\begin{pmatrix}35&-23&9\\-2&10&6\\15&1&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\3&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{76}\begin{pmatrix}212&-122&-235\\-36&20&46\\4&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-5&3&6\\3&-2&-3\end{pmatrix}$$

$CD=BA^{-1}AB^{-1}=BIB^{-1}=BB^{-1}=I\rightarrow C$ y D son inversas, $C=D^{-1}$.

106. Página 56

a) La ecuación $AX+2B=3C$ tiene solución si existe A^{-1}, es decir, si $|A|\neq 0$.

$|A|=m\rightarrow$ La ecuación tiene solución si y solo si $m\neq 0$

b) Si $m=1\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $|A|=1\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&3&0\\3&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-5&5&2\\5&-3&3\end{pmatrix}$$

107. Página 56

a) A es invertible si $|A|\neq 0$, $|A|=2a-1$

$|A|=0$ si $2a-1=0\rightarrow a=\frac{1}{2}$; por tanto, A es invertible si y solo si $a\neq\frac{1}{2}$.

b) $XA+A=A^t\rightarrow X=\left(A^t-A\right)A^{-1}$

Si $a=0\rightarrow A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\3&1&4\end{pmatrix}$, $A^T-A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&1\\2&1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&2\\1&0&1\\3&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

108. Página 56

A no es invertible$\rightarrow|A|=0$, $|A|=x+1=0\rightarrow x=-1$.

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\qquad A^4=\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&-1&0\\4&0&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&-8\\0&1&0\\-8&0&8\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&-1&0\\4&0&-4\end{pmatrix}\qquad A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n2^{n-1}&0&(-1)^{n-1}2^{n-1}\\0&(-1)^n&0\\(-1)^{n-1}2^{n-1}&0&(-1)^n2^{n-1}\end{pmatrix}$$

109. Página 57

a) No existe matriz inversa si $|A|=0$.

$|A|=a^2-3$, $|A|=0$ si $a^2-3=0$ si $a=\pm\sqrt{3}$

Por tanto, A no tiene inversa si $a=\pm\sqrt{3}$.

b) $a=2 \to A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $|A|=1 \to A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $(A^t)^2=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{pmatrix}$

$$B=\frac{1}{2}\cdot(A^t)^2=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/2 & 3\\ 2 & 7/2\end{pmatrix}$$

c) $a=2 \to A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $X=A^{-1}\cdot(A^t+A^2)$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 7\\ 13 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

110. Página 57

a) La ecuación $AX-A^t=A$ tiene solución si existe A^{-1}, es decir, si $|A|\neq 0$.

$|A|=1-7m$, $1-7m=0$ si $m=\frac{1}{7}$; por tanto, la ecuación tiene solución cuando $m\neq\frac{1}{7}$.

b) Si $m=0 \to A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -5 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $|A|=1 \to A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -7 & -11 & 12\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -5 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -5 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -5 & -4\\ 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -7 & -11 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & -4\\ -3 & 4 & 4\\ -4 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 0\\ 3 & -3 & -2\\ -29 & 25 & 8\end{pmatrix}$$

111. Página 57

a) A no es invertible si y solo si $|A|=0$. $|A|=-3t^2+18t-16=0 \to t=3\pm\sqrt{\frac{11}{3}}$.

b) $t=1 \to A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix},\qquad A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$A^4=(-I)\cdot A=-A$ $\qquad$ $A^5=-A\cdot A=-A^2$ $\qquad$ $A^6=A^5\cdot A=-A^2\cdot A=-(-I)\cdot A=A$

$A^n=A^{(\text{Resto de la división } n:6)}$, por ejemplo $\frac{100}{6}=16+\frac{4}{6} \to A^{100}=A^4=-A$

112. Página 57

a) A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$, $|A| = -m^3 + 4m$.

$|A| = 0 \rightarrow -m^3 + 4m = 0$ si $m = 0$, $m = 2$ o $m = -2$; por tanto, A es invertible si y solo si $m \neq 0$ y $m \neq \pm 2$.

b) Si $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = 3$

$$|6 \cdot A^{-1}| = 6^3 \cdot |A^{-1}| = 6^3 \cdot \frac{1}{|A|} \rightarrow |6 \cdot A^{-1}| = \frac{6^3}{3} = 72$$

c) $m = 1$, $XA = B \rightarrow X = BA^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (3 \quad 0 \quad 3) \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \quad 3 \quad 2)$$

113. Página 57

a) $|A| = 0 \rightarrow$ rango < 3, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ rango = 2.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ rango $\geq$ 2.

$|B| = -m \rightarrow |B| = 0$ si $m = 0$

Por tanto, si $m \neq 0 \rightarrow |B| \neq 0$ y el rango es 3; si en cambio $m = 0$, el rango es 2.

c) B no es invertible si $|B| = 0$, es decir, si $m = 0$.

d) Si $m = -1$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$B \cdot X \cdot B = A \rightarrow X = B^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} \quad X = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

114. Página 57

a) A tiene inversa si $|A| \neq 0$, $|A| = a^2(a-1)$.

$$|A| = 0 \rightarrow a^2(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto, A tiene inversa si y solo si $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

b) Si $a=3 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $|A|=18 \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) $AB=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5a \\ 2a-2 & 0 \\ -a & -2a \end{pmatrix} \rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) & -a \\ 5a & 0 & -2a \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & 2(a-1) \\ 5a & 0 \end{vmatrix} = -10a(a-1)$, $-10a(a-1)=0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} a & -a \\ 5a & -2a \end{vmatrix} = 3a^2$, $3a^2=0 \rightarrow a=0$

$\begin{vmatrix} 2(a-1) & -a \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a(a-1)$, $-4a(a-1)=0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$

Si $a=0 \rightarrow (AB)^t=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1.

Si $a=1 \rightarrow (AB)^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ tiene rango 2.

115. Página 57

a) Para que exista inversa el determinante tiene que ser distinto de 0.

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2-x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

La inversa existe para $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

b) Para $x=3$: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$|A|=6 \qquad Adj(A)=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A)^t=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

116. Página 57

$$A+2XB=C \rightarrow 2XB=C-A \rightarrow XB=(C-A)/2 \rightarrow X=\frac{C-A}{2}B^{-1}$$

$$\frac{C-A}{2}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 4 & 2\\ 8 & -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4 \qquad Adj(B)=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad Adj(B)^t=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

117. Página 57

$$XC+A=C+A^2 \rightarrow XC=C+A^2-A \rightarrow X=(C+A^2-A)C^{-1}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=A$$

$$X=(C+A^2-A)C^{-1}=(C+A-A)C^{-1}=CC^{-1}=I$$

X es la matriz identidad de orden 3.

118. Página 57

a) $X+XA+B^t=2C \rightarrow X+XA=2C-B^t \rightarrow X\,(I+A)=2C-B^t \rightarrow X=(2C-B^t)\,(I+A)^{-1}$

Tiene orden 2×3.

b) $2C-B^t=2\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 4 & 4\\ 5 & -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$

$$I+A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad |I+A|=-1 \qquad Adj(I+A)=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad Adj(I+A)^t=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(I+A)^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

c) $X=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$

119. Página 57

$(A-B)X - A^tX = I \rightarrow (A-B-A^t)X = I \rightarrow X = (A-B-A^t)^{-1}$

$$A-B-A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-B-A^t| = -2 \qquad Adj(A-B-A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj(A-B-A^t)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-B-A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

120. Página 57

a) No, por ejemplo $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

b) Se tiene que verificar cualquiera que sea A, de modo que sí es cierta. $XA = 0 \rightarrow X = 0A^{-1} = 0$

c) Es cierto. $X^2 = AX \rightarrow XX = AX \rightarrow XXX^{-1} = AXX^{-1} \rightarrow X = A$

121. Página 57

Si A es diagonal: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

$$AB = BA \rightarrow B = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \frac{be}{a} & \frac{cf}{a} \\ \frac{ag}{b} & h & \frac{ci}{b} \\ \frac{aj}{c} & \frac{bk}{c} & l \end{pmatrix}$$

a) No se cumple necesariamente.

b) Para que se cumpla, los tres términos de la diagonal tienen que ser iguales.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 58

Porque los lados de los triángulos son líneas rectas.

2. Página 58

La triangulación no es única, puede haber tantas triangulaciones diferentes como imaginemos.

3. Página 58

No, porque no hay un triángulo cuya superficie sea nula.

4. Página 58

Respuesta abierta, puede ser cualquiera. No obstante, se recomienda dibujar la figura irregular sobre la cuadrícula previamente dibujada, de esa manera haremos coincidir los vértices de la triangulación con puntos de coordenada entera.