

1) Contexto

En una gran empresa $\left\{ \begin{array}{l} \text{PRI} \rightarrow \text{empleados que llegan al puesto de} \\ \text{trabajo por medios propios o} \\ \text{privados} \rightarrow P(\text{PRI}) = 0.6 \\ \text{PUB} \rightarrow \text{empleados que llegan al puesto de} \\ \text{trabajo por medios de transporte} \\ \text{público} \rightarrow P(\text{PUB}) = 0.4 \end{array} \right.$

X = "tiempo de desplazamiento de un empleado"

X_{PRI} = "tiempo de desplazamiento de un empleado PRI" $\rightarrow N(27, \sigma)$

\bar{X}_{PRI} = "tiempo medio de desplazamiento de un empleado PRI en una muestra $n=100$ " $\rightarrow N(27, \frac{\sigma}{\sqrt{100}})$

X_{PUB} = "tiempo de desplazamiento de un empleado PUB" $\rightarrow N(25, \sigma)$

\bar{X}_{PUB} = "tiempo medio de desplazamiento de un empleado PUB en una muestra $n=100$ " $\rightarrow N(25, \frac{\sigma}{\sqrt{100}})$

Para PRI NC=95% $\rightarrow (24.06; 29.94)$ 95% ; $n=100$

Para PUB $\bar{x}_{\text{PUB}} = 24$ referido a la muestra $n=100$

1.1) Piden $P(X_{\text{PRI}} > 25)$, necesito calcular σ que en principio es la misma para ambas variables PRI y PUB; medieng. $\mu_{\text{PRI}} = 27$

L = amplitud del intervalo = 2 Error = $29.94 - 24.06 = 5.88 \Rightarrow E = 2.94$

por $P(Z < Z_{\alpha/2}) = \frac{1+NC}{2} = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \Rightarrow P(Z > Z_{\alpha/2}) = 1 - 0.975 = 0.025$

por los datos $\Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.96$

$X_{\text{PRI}} \rightarrow N(27, 15)$

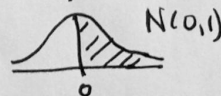
$E = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 2.94 \Rightarrow \sigma = 15$

$P(X_{\text{PRI}} > 25) = P(Z > \frac{25-27}{15}) = P(Z > -0.13) = P(Z < 0.13) = 0.5517$
Solución

1.2) me dicen que $\mu_{\text{PUB}} = 25 = \bar{\mu}_{\text{PUB}}$, $X_{\text{PUB}} \rightarrow N(25, 15)$

$P(X > 25) = P(Z > \frac{25-25}{15}) = P(Z > 0) = 0.5$

tipif.



la mitad de la campana de Gauss

$P(X > 25) = P(\text{PUB}) \cdot P(X_{\text{PUB}} > 25) + P(\text{PRI}) \cdot P(X_{\text{PRI}} > 25) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5517 = 0.53102$
Solución

como PUB y PRI es una partición th. Prob. Total

La prob. de que un empleado cualquiera tarde más de 25' en su desplazamiento es 0.53102

1.3 ¿por qué NO pueden ser $(19, 27)_{99\%}$ y $(22, 26)_{99\%}$ I.C. para \bar{X}_{PUB} ?

• para $(19, 27)_{99\%}$ → el I.C. tiene que estar centrado en la media muestral $\bar{x}_{PUB} = 24$

pero el centro de $(19, 27)$ es $19 + \frac{27-19}{2} = 19 + 4 = 23 \neq 24$
no puede ser

• para $(22, 26)_{99\%}$ $L = 26 - 22 = 4$

cuanto más aumenta NC → mayor debe ser L amplitud del intervalo, sin embargo vimos antes que

$L_{95\%}$ de $X_{PRI} = 5.88 \approx 6$

y como $\bar{X}_{PRI} \rightarrow N(27, \frac{15}{10})$

$n=100$, $(\sigma=1.5)$ en ambos casos

son similares, podemos

$\bar{X}_{PUB} \rightarrow N(25, \frac{15}{10})$

suponer que la amplitud de sus intervalos al 95% sean muy próximas

⇒ el I.C. al 99% debiera ser MAYOR que 5, no menor

teir un contenedor : desgaste, vandalismo, fenómenos
meteorológicos adversos ... si se dan en un mes determi-
nado, afectan a ambos tipos de contenedores .

Ejemplo 3) la facultad y los alumnos de aplicadas

(p.3)

• Llamo a los sucesos:

E = "piensa asistir a clase de Est. Apl. por las ESCALERAS"

A = " " " " " " " " " " el ASCENSOR"

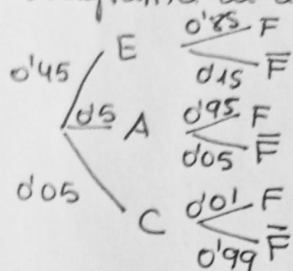
C = "No piensa asistir a clase de Est. Apl y quiere ir a la CAFETERÍA"

F = "Finalmente asiste a clase de Est. Apl."

Según el enunciado \bar{F} = "están en la cafetería a la hora de Est. Aplicada" → no contemplan más opciones y a que $0.45 + 0.5 + 0.05 = 1$

E, A y C son una partición

• Diagrama de árbol



$$\boxed{3.1} \quad P(F) = P(F|E)P(E) + P(F|A) \cdot P(A) + P(F|C) \cdot P(C) =$$

↑
th. Prob. Total

$$= 0.85 \cdot 0.45 + 0.95 \cdot 0.5 + 0.01 \cdot 0.05 = \boxed{0.858}$$

$$\boxed{3.2} \quad P(\bar{F}) = 1 - 0.858 = \boxed{0.142}$$

$$\boxed{3.3} \quad \boxed{P(C|F) = ?}$$

Si ya está en clase (ésta es la condición) calcular la prob. de que en principio pensase ir a la cafetería

$$\text{th. BAYES} \rightarrow P(C|F) = \frac{P(F|C) \cdot P(C)}{P(F)} = \frac{0.01 \cdot 0.05}{0.858} = \boxed{0.000582}$$

Ejemplo 4

Contexto

Para toda la Población es pañola, sin tener en cuenta la época del año $(133, 142)_{90\%}$ es un I.C. para el consumo medio de agua por persona y día.

En una población en concreto, durante el mes de Agosto:

$X = n^{\circ}$ litros por persona y día de esa población en Agosto

\bar{X} = consumo medio por persona y día en Agosto de esa población en concreto

tomando $n=200$, $\bar{X} \rightarrow N(\mu, 20)$, $\bar{x}_{200} = 145$

4.1 I.C. 90% para \bar{X} ; $P(Z < z_{0.05}) = \frac{1+0.9}{2} = 0.95$

$\alpha = 1 - 0.90 = 0.1 = 2 \cdot \alpha/2 = 0.05$

$P(Z > z_{0.05}) = 1 - 0.95 = 0.05 \Rightarrow$ por los datos del ej. $z_{0.05} = 1.64$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.64 \cdot \frac{20}{\sqrt{200}} \approx 2.319 \approx 2.32$

I.C. $\rightarrow 145 \pm 2.32 \Rightarrow$ I.C. = $(142.68; 147.32)_{90\%}$

Si lo comparamos con el general de España, en cualq. época del año $(133, 142)_{90\%}$. resulta que el intervalo del mes de Agosto de esta población tiene sus extremos superiores a 142 por lo que la suposición parece acertada

4.2 para obtener un I.C. con L más pequeña, como $L = 2E$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y σ es conocida, solo hay dos opciones, no ex-

cluyentes:

- aumentar $n \rightarrow$ aumenta $\sqrt{n} \rightarrow E$ más pequeño \rightarrow I.C. más estrecho
- disminuir $\alpha \rightarrow$ disminuye $z_{\alpha/2} \rightarrow E$ más pequeño \rightarrow I.C. más estrecho o con menor amplitud

4.3 92% $\rightarrow L = 2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\alpha = 1 - 0.92 = 0.08 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04$

$P(Z < z_{0.04}) = \frac{1+0.92}{2} = 0.96 \Rightarrow P(Z > z_{0.04}) = 1 - 0.96 = 0.04$

\Rightarrow por los datos del ejercicio $z_{0.04} = 1.75$

$E = 1.75 \cdot \frac{20}{\sqrt{200}} \approx 2.47487... \Rightarrow L \approx 4.95$

Ejemplo 5

CONTEXTO:

conceden tres tipos de préstamos

llamo H = conceder un préstamo 24h

A = conceder un préstamo AUTO

E = conceder un préstamo ESTUDA

resulta que $P(H) = 0.45$; $P(A) = 0.4$; $P(E) = 0.15$

llamo I = impago de un préstamo

$$P(I|H) = 0.2$$

$$P(I|A) = 0.3$$

$$P(I|E) = 0.25$$

5.1

Por los datos resulta que H, A y E forman una partición

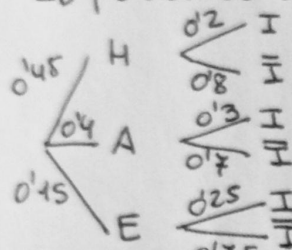
$$P(A \cup H \cup E) = P(A) + P(H) + P(E) = 0.4 + 0.45 + 0.15 = 1$$

$$\Rightarrow P(A \cup H \cup E) = 1$$

$$P(A \cap H \cap E) = 0$$

\Rightarrow podemos utilizar el th. de la Prob. Total

$$P(I) = P(I|H) \cdot P(H) + P(I|A) \cdot P(A) + P(I|E) \cdot P(E) = 0.2 \cdot 0.45 + 0.3 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.15 = \boxed{0.2475}$$



5.2 $P(A|I) = \frac{P(I|A) \cdot P(A)}{P(I)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.2475} \approx \boxed{0.48485}$

5.3 $P(E|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|E) \cdot P(E)}{P(\bar{I})} = \frac{0.75 \cdot 0.15}{1 - 0.2475} \approx \boxed{0.1495}$

↑
Bayes

5.4 Tal y como están diseñados, los préstamos son excluyentes (disjuntos 2 a 2)

A y H incompatibles
 A y E " "
 H y E " "

$$1 = P(A \cup H \cup E) = 1 = P(A \cup (H \cap E)) = P(A) + P(H \cup E) - P(A \cap (H \cup E)) = P(A) + P(H) + P(E) - P(H \cap E) - [P(A \cap H) + P(A \cap E)] = P(A) + P(H) + P(E) - [P(H \cap E) + P(A \cap H) + P(A \cap E)] \Rightarrow P(H \cap E) + P(A \cap H) + P(A \cap E) = 0$$

como todos son ≥ 0

$$\Rightarrow \begin{cases} P(H \cap E) = 0 \\ P(A \cap H) = 0 \\ P(A \cap E) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 6

Llamo M = "tener contratado un seguro de mascota"
 H = "tener contratado un seguro de hogar"

Datos: $P(H) = 0.6$; $P(H \cap M) = 0.3$; $P(H|M) = \frac{3}{5} = 0.6$

$$\boxed{6.1} \quad P(M) = ? \quad \text{por} \quad P(H|M) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{def.} \\ \text{prob.} \\ \text{condic}}}{=} \frac{P(H \cap M)}{P(M)} \Rightarrow P(M) = \frac{P(H \cap M)}{P(H|M)}$$

$$P(M) = \frac{0.3}{0.6} = \boxed{0.5}$$

La probabilidad de tener contratado un seguro de mascota es 0.5

$$\boxed{6.2} \quad P(H \cup M) = ? \quad P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = \\ = 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8$$

El 80% de la población tiene contratado algún tipo de estos seguros

$$\boxed{6.3} \quad P(M \cap \bar{H}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Morgan}}}{=} P(M) - P(M \cap H) = 0.5 - 0.3 = \boxed{0.2}$$

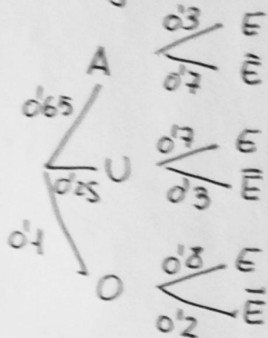
La probabilidad de tener contratado un seguro de mascota y no tenerlo de hogar es 0.2

$\boxed{6.4}$ tener mascota y tener seguro de mascota contratado NO son independientes, ya que si tiene seguro de mascota es muy probable que tenga mascota y si tiene mascota es más probable que tenga contratado un seguro de mascota que alguien que no la tenga, un sesgo aporta información sobre el otro \Rightarrow NO son independientes

Datos:

- Llamo A = "el cliente es alumno"
- U = "el cliente es personal universitario"
- O = "el cliente es ajeno a la universidad"
- E = "el cliente paga en efectivo"

Según el enunciado:



X = "tiempo de espera hasta que un cliente es atendido"

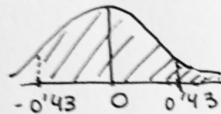
$$X \rightarrow N(5, \sigma)$$

$$P(X > 8) = 0.9$$

[7.1] Piden $P(X > 4) = ?$ antes tenemos que calcular σ
 por $P(X > 8) = 0.9$ sabemos $P(X < 8) = 0.1 = P(Z < -1.28) =$
 $= P(Z > 1.28) \Rightarrow 1.28 = \frac{8-5}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{3}{1.28} \approx 2.34$

$P(X < 4) = P\left(Z < \frac{4-5}{2.34}\right) \approx P(Z < -0.43) = P(Z > 0.43) = 1 - P(Z < 0.43) =$
 $= 1 - 0.6664 = 0.3336$ según los datos del ejercicio.

tipificamos
 $Z = \frac{X-5}{2.34} : N(0,1)$



La probabilidad de q. un cliente sea atendido antes de 4 es 0.3336 , ocurre en algo más del 33% de las ocasiones, pero frecuente

[7.2] Por ser A, U, O una partición podemos aplicar el th. de Probabilidad TOTAL

$$P(\bar{E}) = P(\bar{E}|A)P(A) + P(\bar{E}|U)P(U) + P(\bar{E}|O)P(O) = 0.7 \cdot 0.65 + 0.3 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.55$$

La probabilidad de que un cliente cualquiera no pague en efectivo es 0.55, ocurre en más de la mitad de los casos, es algo relativamente frecuente

[7.3] comparar $P(A|E)$ y $P(U|E)$; $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 0.45$

$$P(A|E) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(E|A) \cdot P(A)}{P(E)} = \frac{0.3 \cdot 0.65}{0.45} = 0.4333$$

$$P(U|E) = \frac{P(E|U) \cdot P(U)}{P(E)} = \frac{0.7 \cdot 0.25}{0.45} = 0.3889$$

si un cliente pagó en efectivo es más probable que fuese realizado por alumno que por personal de la universidad

Datos

llamo $T =$ "zapatillas tradicionales" ; $P(T) = 0.8$
 $D =$ "zapatillas de diseño" ; $P(D) = 0.2$
 $B =$ "zapatillas en BUEN estado" ; $P(B|T) = 0.5$
 $W =$ "zapatillas de color blanco" ; $P(B|D) = 0.75$

1.1 Piden $P(T \cup B) = ? = P(T) + P(B) - P(T \cap B)$

• calculo $P(T \cap B) = P(B|T) \cdot P(T) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4$

↑
regla del producto

T y D son una partición

• calculo $P(B) = P(B|T)P(T) + P(B|D) \cdot P(D) =$
 ↑
th. prob. TOTAL

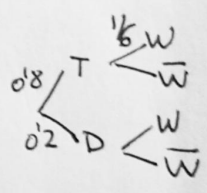
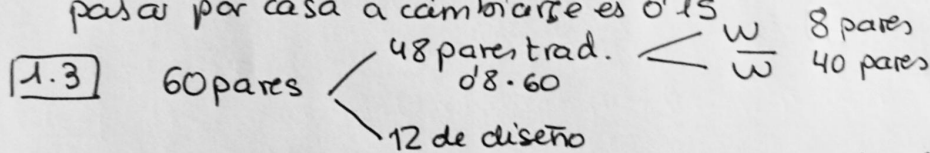
$= 0.4 + 0.75 \cdot 0.2 = 0.55$

• calculo finalmente $P(T \cup B) = P(T) + P(B) - P(T \cap B) =$

$= 0.8 + 0.55 - 0.4 = 0.95$ probabilidad de que Autín vaya calzado con zapatillas tradicionales o en buen estado

1.2 para no tener q. pasar por casa debe llevar zapatillas de diseño en buen estado $= P(D \cap B) = P(B|D) \cdot P(D) = 0.75 \cdot 0.2 = 0.15$

La prob. de no tener que pasar por casa a cambiarse es 0.15
 ↑
regla del producto



$P(W|T) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$; W y \bar{W} es una partición

Por el th. Prob. Total $P(W) = P(W|T) \cdot P(T) + P(W|D) \cdot P(D) = \frac{1}{6} \cdot 0.8 + P(W) \cdot 0.2$

$P(W) = \frac{1}{6} \cdot 0.8 + 0.2 \cdot P(W)$;

por ser indep.
 $P(W|D) = P(W)$

$P(W) - 0.2 P(W) = \frac{0.8}{6}$; $0.8 P(W) = \frac{0.8}{6} \Rightarrow P(W) = \frac{1}{6}$

Como tiene 60 pares $\rightarrow \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$ pares de zapatillas blancas
 y como 8 son tradicionales $\Rightarrow 10 - 8 =$ 2 pares de zapatillas de diseño Blancas

Ejemplo 9 Crema para el acné
2025 ORD Mat. Apl. II

Contexto:

1ª campaña: presa escrita y botoneo

si $P(\text{Crema sea conocida por público juvenil}) < 0.6 \Rightarrow$ lanzan 2ª campaña de carteles luminosos

llamo: E = "que el p.úb. juvenil conozca la campaña por prensa escrita"

B = "que el p.úb. juv. conozca por botoneo"

L = "que el p.úb. juv. conozca por carteles luminosos"

datos: $P(E) = 0.3$; $P(B) = 0.4$; E y B independientes

$$\boxed{9.1} \quad P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B) \stackrel{\uparrow}{=} P(E) + P(B) - P(E) \cdot P(B) = \\ = 0.3 + 0.4 + 0.3 \cdot 0.4 = \boxed{0.58 < 0.6} \text{ indep.} \Rightarrow \text{lanzan la 2ª campaña}$$

9.2 datos $P(L|B) = 0.25$; $P(B|L) = 0.2$

calculo $P(L)$; $P(L|B) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{P(B|L) \cdot P(L)}{P(B)}$; $0.25 = \frac{0.2 \cdot P(L)}{0.4}$

calculo $P(L) = \frac{0.25 \cdot 0.4}{0.2} = 0.5$

Si comparamos $P(E) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(L) = 0.5 \Rightarrow$ la campaña más efectiva fue la de carteles luminosos

9.3 $P(E \cap B) = 0.12 \neq 0 \Rightarrow$ No son incompatibles

Ejemplo 10

Empresa, principio fundacional % mujeres $\geq 40\%$

En el dep de proyectos, actualmente: 24 personas que son 10 mujeres y 14 hombres

Necesitan contratar a una persona mas, seleccionaran a 5 candidatos y sus prob. de vol. POR SUS MÉRITOS es

M_1	M_2	H_1	H_2	H_3
$0'2$	$0'3$	$0'1$	$0'2$	$0'2$

es obvio que la persona mejor capacitada por méritos propios es M_2 , pero parece que esto no es suficiente (qué sesgo más machista tiene este ejercicio)

C_1 = "la nueva contratada es mujer"

$C_2 = \overline{C_1}$

10.1 independiente de si contratan a una mujer o a un hombre:

$C_1 \rightarrow$ departamentos 11 mujeres y 14 hombres, total 25
 $C_2 \rightarrow$ " " 10 mujeres y 15 hombres, total 25

En $C_1 \rightarrow$ % mujeres = $\frac{11}{25} = 0'44 \geq 40\%$

En $C_2 \rightarrow$ % mujeres = $\frac{10}{25} = 0'4 \geq 40\%$

En cualq. caso, tanto si eligen a la mejor capacitada, que es una mujer, como si la discriminan y contratan a un hombre, siguen cumpliendo su principio fundacional

10.2 $P(M) = P(M|C_1) \cdot P(C_1) + P(M|C_2) \cdot P(C_2) =$

como $= \frac{11}{25} \cdot P(C_1) + \frac{10}{25} \cdot P(C_2)$

C_1, C_2 partición

$P(C_1) = P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) = 0'5$

↑
son sucesos disjuntos solo contratan a una persona

$P(C_2) = P(H_1 \cup H_2 \cup H_3) = 0'1 + 0'2 + 0'2 = 0'5$

hay la misma probabilidad de que contraten a un hombre que a una mujer, a pesar de que el varemo de méritos indica q. ellas están mejor preparadas

$$P(M) = \frac{11}{25} \cdot 0.5 + \frac{10}{25} \cdot 0.5 = 0.42 \geq 40\% \text{ siguen respetando el principio fundacional}$$

Lo esperado es que el porcentaje de mujeres sea del 42%

10.3 Para alcanzar los beneficios fiscales del gobierno deben llegar al 45% lo que resulta imposible ya que, aun en el caso de q. contraten a una mujer el porcentaje seria del 44% (como vimos en 10.1) que es inferior al 45%

Datos y contexto

X = "nº de incendios de más de 1Ha en Galicia, en un mes en concreto, que los bomberos consiguen apagar en menos de 2 días"

éxito = "que los bomberos consigan apagar en menos de 2 días, 1 incendio en Galicia, en ese mes en concreto, de más de 1Ha"
 $p = p(\text{éxito}) = 0.8$; $q = 0.2$

En ese mes: $n = 150$ incendios de más de 1Ha en Galicia

$X \rightarrow B(150, 0.8)$

Aviones

- Tipo I { Foca
 Canadair CL-215T
 Bombardier 415
- Tipo II { anfíbio ALFA
 Air Tractor AT-802FB

No sabemos cuánto hay ni cómo están repartidos por Galicia.

A = "emplear aviones T2"

B = "emplear aviones T1"

C = "emplear aviones T1 y T2"

obviamente $C = A \cap B$

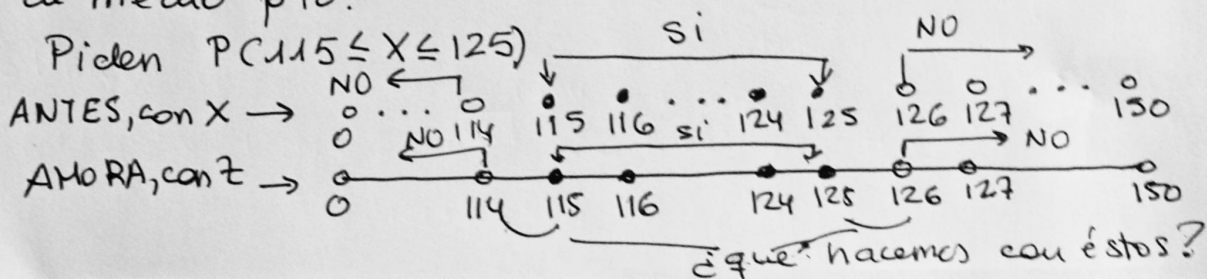
11.1 calcular $\mu = n \cdot p = 150 \cdot 0.8 = 120 > 5$
 $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{150 \cdot 0.8 \cdot 0.2} \approx 4.9 > 5$
 $n = 120$ grande ≥ 30

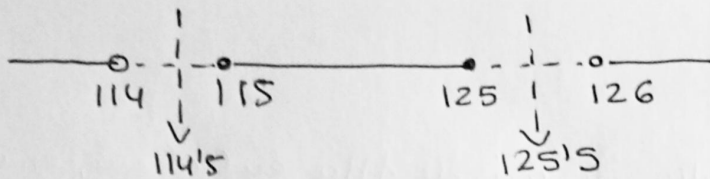
Se dan las condiciones para poder aproximar Binomial \rightarrow Normal

11.2 por darse las condiciones adecuadas, como vimos en 11.1

$n \cdot p > 5$
 $n \cdot q > 5$
 n grande } Podemos aproximar

$X : B(150, 0.8) \sim Z : N(120, 4.9)$ y así facilitar los cálculos como hemos aproximado de V.A. discreta \rightarrow V.A. continua es necesario, como mínimo, hacer la corrección de YATES o de medio pto.





ampliamos el intervalo, repartiendo la mitad a cada lado

$$\text{Así } P(115 \leq X \leq 125) \approx P(114.5 < Z < 125.5) =$$

↓
YATES $X \sim Z: N(120; 4.9)$

$$= P\left(\frac{114.5 - 120}{4.9} < Z' < \frac{125.5 - 120}{4.9}\right) \approx P(-1.12 < Z' < 1.12) = \textcircled{*}$$

ahora tipificamos $Z' = \frac{Z - 120}{4.9} : N(0,1)$

$$\textcircled{*} = 2 P(Z' < 1.12) - 1 = 2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{datos Ej.}}}{0.8686} - 1 = \boxed{0.7372}$$

La probabilidad de q. los bomberos, en ese mes en concreto en Galicia, en el q. hubo 150 incendios de más de 1Ha, consigan apagar en menos de 2 días entre 115 y 125 incendios de más de una Ha es de 0.7372, probabilidad relativa (por encima del 75%) teniendo en cuenta que su éxito = 0.8 y que se han alcanzado 10 éxitos y se esperaba $0.8 \cdot 150 = 120$ éxitos $125 - 115 = 10$

11.3 a) $C = A \cap B \Rightarrow \boxed{P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$

b) si A y B indep $\Rightarrow \boxed{P(C) = P(A) \cdot P(B)}$

c) Si A y B incompatibles $\Rightarrow \boxed{P(C) = P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0}$

11.4 • si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ No se pueden emplear simultáneamente los dos tipos de aviones en el mismo incendio.

• si A y B son indep \Rightarrow el hecho de usar aviones T2 en un incendio NO nos da información sobre los aviones T1 y a la inversa, saber q. se usaron aviones T1 no aporta información sobre si se usaron aviones T2

$$P(A|B) = P(A) ; P(B|A) = P(B)$$