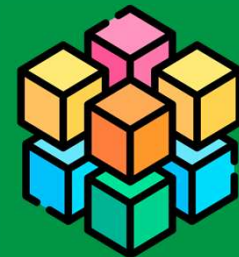


Probabilidad compuesta, Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Matemáticas Aplicadas II



Objetivos



- Aplicar la regla del producto y resolver experimentos con varias etapas, mediante diagramas de árbol, en contextos sociales y económicos.
- Que el alumnado sea capaz de **modelizar situaciones reales de incertidumbre** en contextos sociales y económicos, identificando las posibles causas de un fenómeno, calculando su probabilidad global y determinando la causa más probable una vez observado el resultado.

Objetivos



Al finalizar la unidad el alumnado deberá ser capaz de:

- 1) Reconocer cuándo un fenómeno puede producirse por varias causas (partición).
- 2) Calcular la probabilidad total de un suceso a partir de distintos grupos.
- 3) Aplicar el teorema de Bayes para invertir probabilidades condicionadas.
- 4) Interpretar los resultados en contextos reales (banca, seguros, marketing, salud).
- 5) Tomar decisiones justificadas a partir de los resultados probabilísticos.



Idea intuitiva

Sucesos elementales y sucesos compuestos

Seguimos con el ejemplo de lanzar un dado al aire.
Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

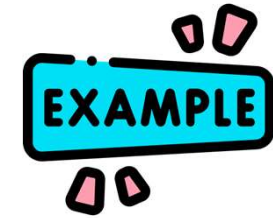
- **Suceso elemental:** que salga un 3 $P(3) = \frac{1}{6} = 0,1666 = 16,67\%$
- **Suceso compuesto:** que salga un número par $\rightarrow \{2, 4, 6\}$

Casos favorables = 3

Casos posibles = 6

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Regla del producto

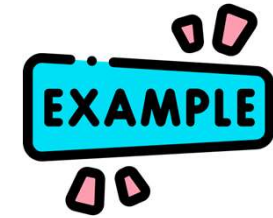


Ejemplo social: hábitos de lectura

En un instituto: el 60% de los alumnos leen habitualmente. De los que leen: el 70% usan la biblioteca, mientras que, sólo el 10% de los que no leen lo hacen.

Calcula la probabilidad de que un alumno use la biblioteca y lea.

Regla del producto



Vamos a organizar la información dibujando un diagrama de árbol, pero ANTES de nada, **lo primero** es poner nombre a los sucesos, identificarlos.

Llamamos:

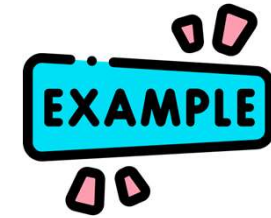
L = “alumno lector habitual”

$\bar{L}$ = no L = “alumno NO lector habitual”

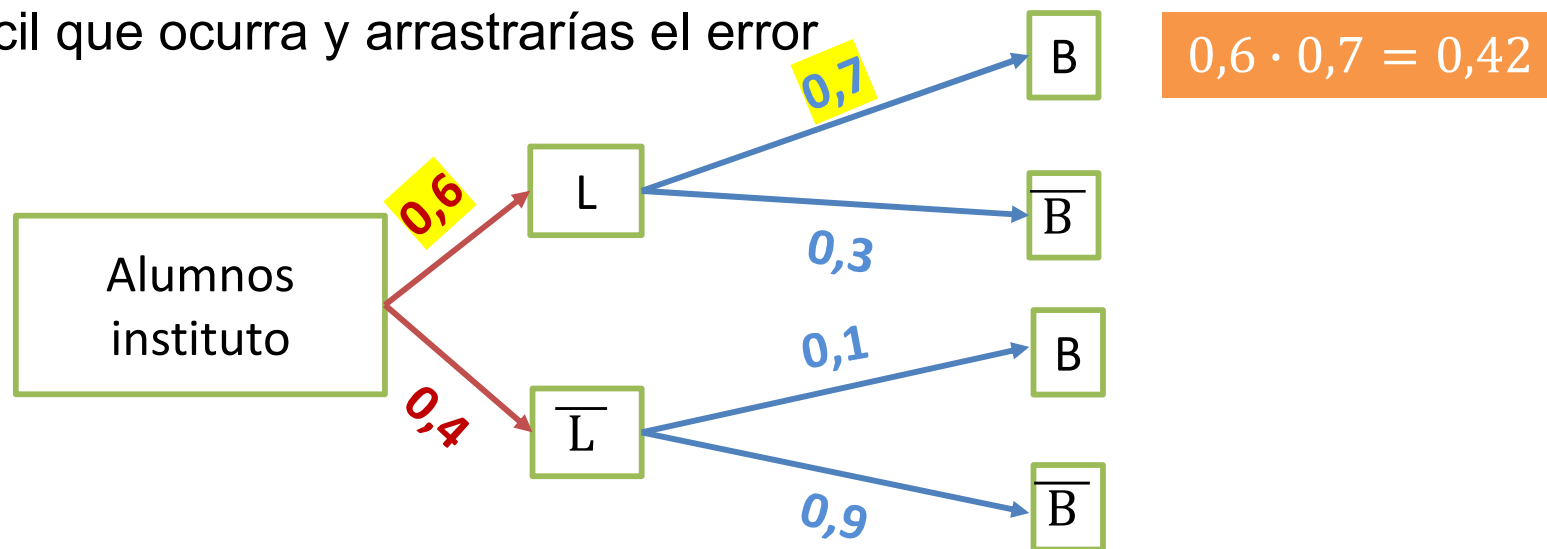
B = “alumno usuario de la Biblioteca”

$\bar{B}$ = no B = “alumno no usuario de la Biblioteca”

Regla del producto



Ahora sí, el dibujo y los cálculos, cuidado de no equivocarte, es fácil que ocurra y arrastrarías el error



Interpretación:

El 42% del alumnado son lectores y además usan la biblioteca.

Aplicaciones bancarias



Un banco estudia concesión de préstamos:

- 80% clientes tienen empleo fijo
- 20% temporal

Entre los fijos:

- 90% devuelven el préstamo

Entre los temporales:

- 50% devuelven

Pregunta:

Calcular la probabilidad de que un cliente tenga empleo fijo y devuelva el préstamo:

$$0.8 \times 0.9 = 0.72 = 72\%$$

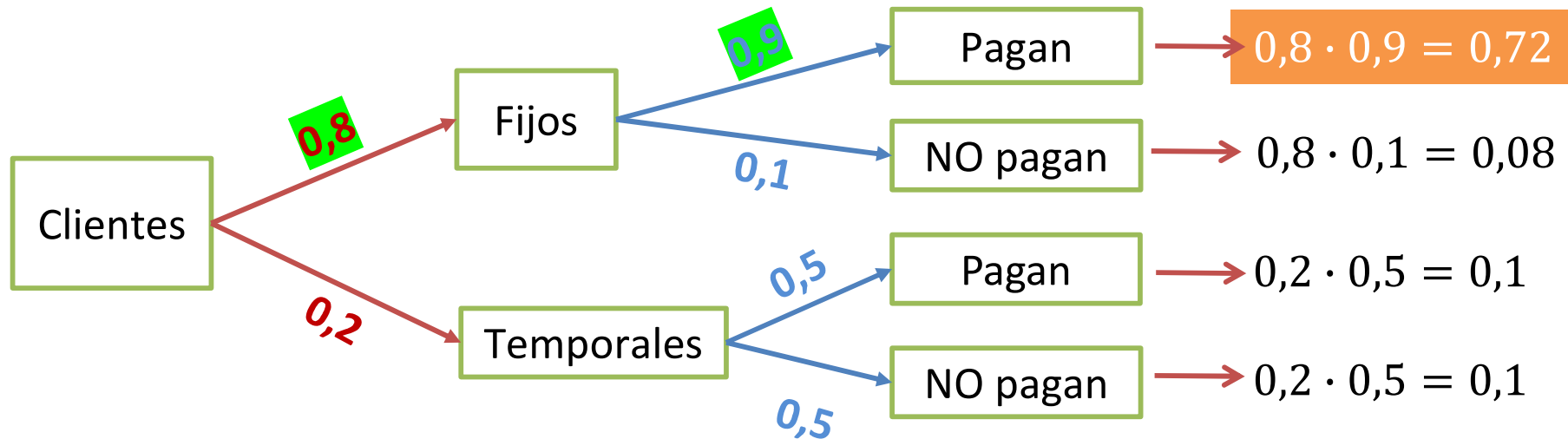


Así es cómo trabajan los modelos de riesgo bancario.

Diagrama de árbol

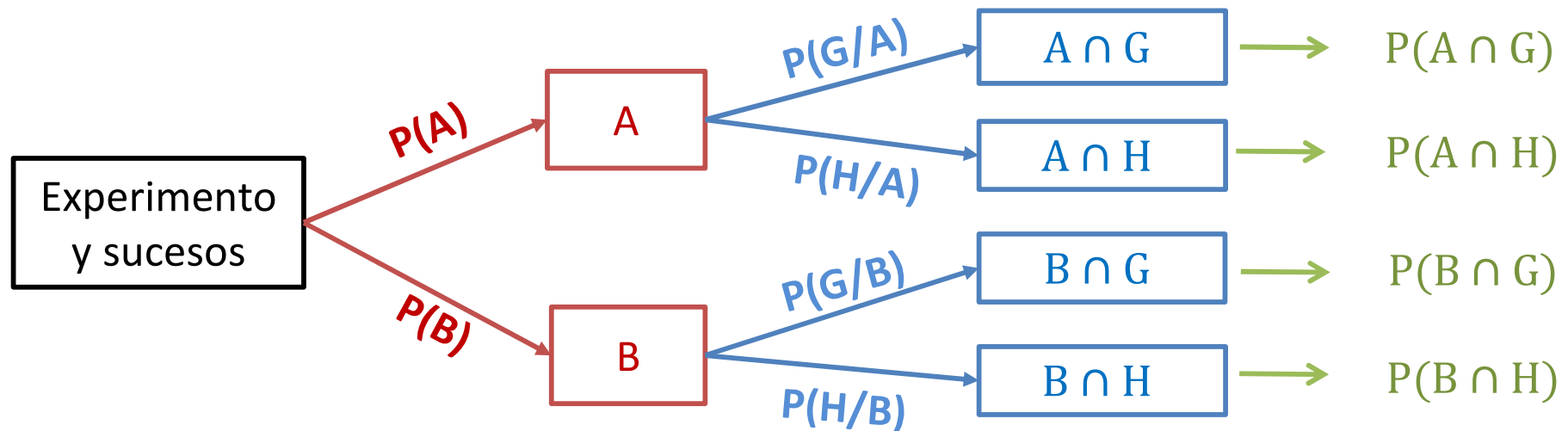


Vamos a organizar la información dibujando un diagrama de árbol:



Fíjate, si sumas cada familia de ramas siempre tiene que dar 1

Dónde se pone cada dato



**Probabilidades
a priori**

**Probabilidades
condicionadas,
a posteriori**

**Probabilidades de las
intersecciones, regla del
producto**

Partición



Idea intuitiva

Una partición es dividir la población en grupos que no se solapan y que lo cubren todo.

👉 Y ya está, así de fácil.

Partición



Ejemplo: tipo de contrato

Queremos estudiar a los trabajadores de un país.

Los clasificamos en:

- A_1 = contrato indefinido
- A_2 = contrato temporal

Observa:

1. Todo trabajador pertenece a uno de los dos
2. Ninguno puede pertenecer a ambos

Eso significa: $A_1 \cup A_2 = S$ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

👉 lo cubren todo y no se solapan, ES UNA PARTICIÓN

Probabilidad total



Si A_1, A_2 forman partición:

$$P(B) = P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2)$$

Es una media ponderada.

Porqué aparece la probabilidad total



Un mismo suceso puede ocurrir por distintas causas.

Ejemplo:

Un cliente impaga.

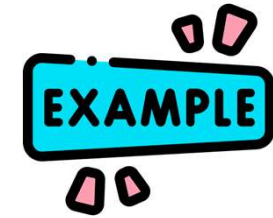
Puede venir de:

- contrato indefinido
- contrato temporal

Cada causa aporta una parte del total.

👉 La probabilidad total es **sumar todos los caminos posibles**

Ejemplo



Imagina que queremos saber la probabilidad de encontrar una persona fumadora en un país.

Podemos buscar:

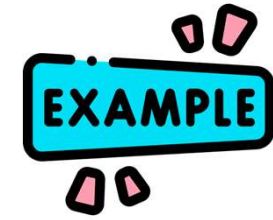
- primero hombres y luego fumadores
- primero mujeres y luego fumadoras

Estamos recorriendo **todos los caminos posibles**.

👉 Eso es exactamente la probabilidad total.

- La partición separa las posibles causas.
- La probabilidad total suma sus contribuciones.

Ejemplo



Una aseguradora clasifica los vehículos asegurados:

- 55% tienen más de 8 años
- 45% tienen 8 años o menos

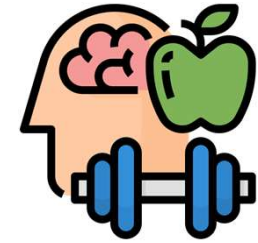
Se sabe que:

- El 10% de los vehículos antiguos sufre una avería grave anual.
- El 2% de los vehículos nuevos sufre una avería grave anual.

Se elige un vehículo al azar.

Calcula la probabilidad de que sufra una avería grave.

Solución



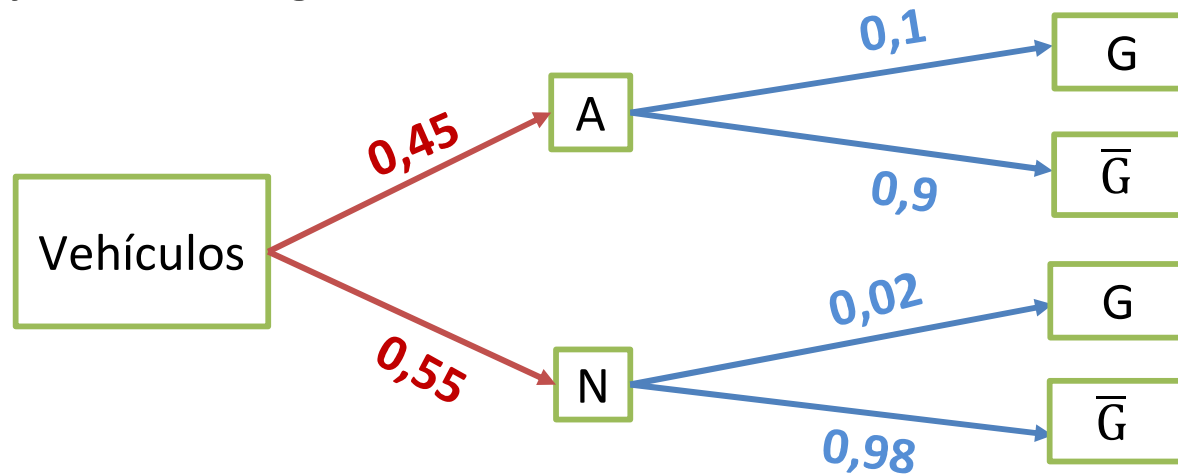
1. Definimos:

A = vehículo antiguo, con más de 8 años de antigüedad

N = vehículo nuevo o con menos de 8 años de antigüedad

G = avería grave

2. Dibujamos un diagrama de árbol



3. Probabilidad TOTAL: $P(G) = 0.55 \cdot 0.10 + 0.45 \cdot 0.02 = 0.055 + 0.009$
 $= 0.064 = 6.4\%$

Teorema de Bayes



Idea intuitiva del Teorema de Bayes

“Ha ocurrido algo. ¿Cuál es la causa más probable?”

👉 Eso es Bayes.

Teorema de Bayes



Situación cotidiana

Imagina:

En un instituto hay:

- 90% alumnos sin gafas
- 10% alumnos con gafas

Sabemos que:

- **El 80% de los que llevan gafas estudia mucho.**
- **Solo el 20% de los que no llevan gafas estudia mucho.**

Ahora vemos a un alumno **estudiando mucho**.

Pregunta: ¿es probable que lleve gafas?

Teorema de Bayes



La mayoría dirá: que sí, porque recuerdan que el 80% de los que llevan gafas estudia mucho.

Pero cuidado:

¡los que llevan gafas son solo el 10%!

👉 Aquí aparece Bayes.

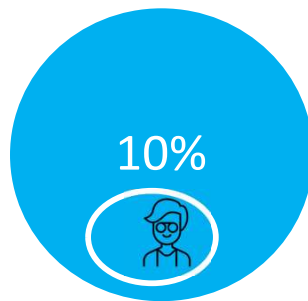
Teorema de Bayes



Aunque el porcentaje de estudio sea alto en gafas,
hay muchísimos más alumnos sin gafas.

Conclusión:

👉 Puede haber más estudiantes aplicados sin gafas que con gafas.



Teorema de Bayes



Lo que realmente hace Bayes

- Bayes no calcula: “qué probabilidad tiene de estudiar si lleva gafas”
- Bayes calcula: “ahora que sé que estudia... ¿de qué grupo procede?”



Es decir: **usa el efecto para averiguar la causa.**

Teorema de Bayes



Antes:

$$P(\textit{Estudia} \mid \textit{Gafas})$$

Después (Bayes):

$$P(\textit{Gafas} \mid \textit{Estudia})$$

Es **invertir la probabilidad condicionada**.

Frase clave para recordar

👉 Bayes responde a: “Ahora que conozco el resultado, ¿qué causa es más probable?”

Teorema de Bayes



Error típico: Creer que son iguales

$$P(A | B) \text{ y } P(B | A)$$

No.

Ejemplo:

- probabilidad de ser fumador si tienes cáncer
- probabilidad de tener cáncer si eres fumador

Son completamente distintas.

Teorema de Bayes



$$P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(A)}$$

Qué significa:

El teorema permite **calcular la probabilidad de la causa sabiendo que ha ocurrido el efecto.**

Antes:

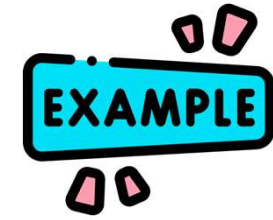
$P(B | A)$ (*probabilidad del efecto si ocurre la causa*)

Bayes:

$P(A | B)$ (*probabilidad de la causa sabiendo el efecto*)

👉 Bayes invierte la probabilidad condicionada.

Ejemplo



Una empresa analiza el comportamiento de sus clientes:

- El 70% de las compras se realizan desde móvil (M).
- El 30% desde ordenador (O).

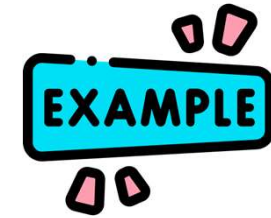
Se sabe que:

- El 40% de las compras desde móvil incluyen accesorios.
- El 20% de las compras desde ordenador incluyen accesorios.

Se elige una compra al azar.

- a) Calcula la probabilidad de que una compra incluya accesorios.
- b) Si una compra incluye accesorios, calcula la probabilidad de que se haya realizado desde móvil.
- c) Interpreta el resultado desde el punto de vista comercial.

Ejemplo



Definimos:

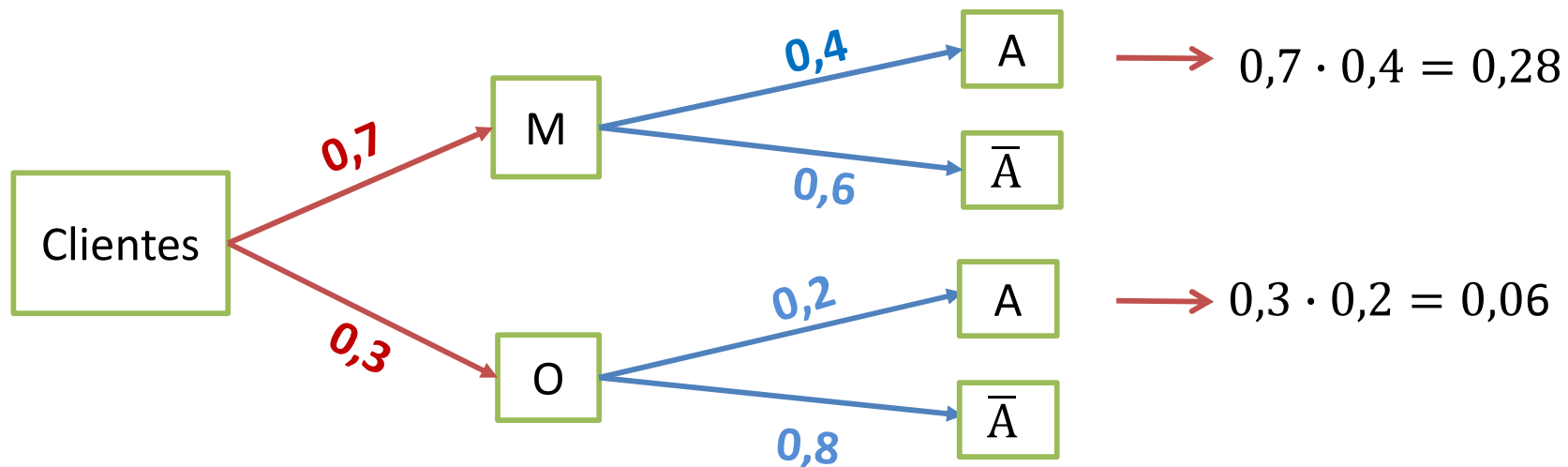
M = compra desde móvil

O = compra desde ordenador

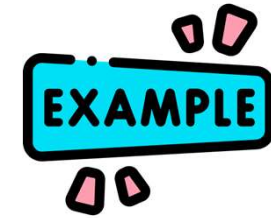
A = compra con accesorios

$$P(M) = 0.7, P(O) = 0.3$$

$$P(A | M) = 0.4, P(A | O) = 0.2$$

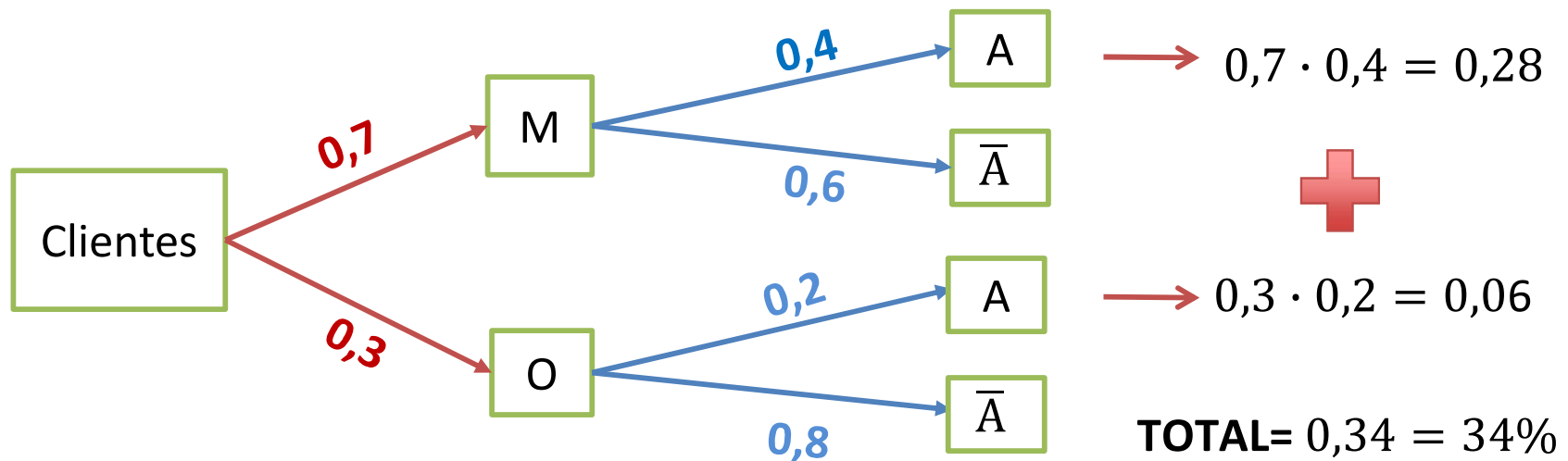


Ejemplo

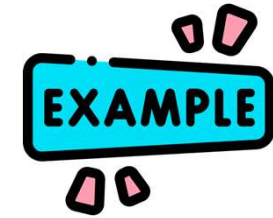


a) Probabilidad total

$$P(A) = P(M)P(A | M) + P(O)P(A | O) = 0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.2 = \\ = 0.28 + 0.06 = 0.34 = 34\%$$



Ejemplo



b) Teorema de Bayes

$$P(M | A) = \frac{P(M)P(A | M)}{P(A)} = \frac{0.7 \cdot 0.4}{0.34} = \frac{0.28}{0.34} = 0.824$$

$$P(M | A) \approx 82.4\%$$

c) Interpretación económica

Aunque el 70% de las compras se realizan desde móvil, **más del 82% de las compras de accesorios proceden del móvil.**

Conclusión:

La empresa debería centrar la publicidad de accesorios en dispositivos móviles.

Idea final:

La probabilidad total calcula qué frecuente es un fenómeno.

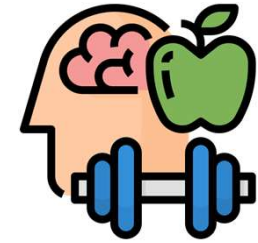
Bayes explica de dónde procede.

Relación entre Bayes y Probabilidad Total



- La probabilidad total sirve para saber **cuánto ocurre algo**.
- El teorema de Bayes sirve para saber **por qué ocurre**.

Ejercicio 1



Una entidad bancaria clasifica a sus clientes en dos grupos:

- 60% tienen ingresos estables
- 40% tienen ingresos variables

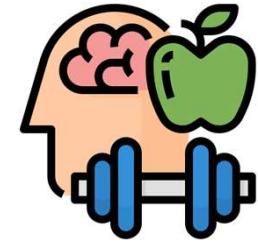
Se sabe que:

- El 3% de los clientes con ingresos estables presenta impago.
- El 12% de los clientes con ingresos variables presenta impago.

Se elige un cliente al azar.

- Representa la situación mediante un diagrama de árbol.
- Calcula la probabilidad de que un cliente presente impago.
- Si un cliente ha presentado impago, calcula la probabilidad de que tenga ingresos variables.
- Interpreta el resultado del apartado c).

Solución



a) Llamamos

A = ingresos estables

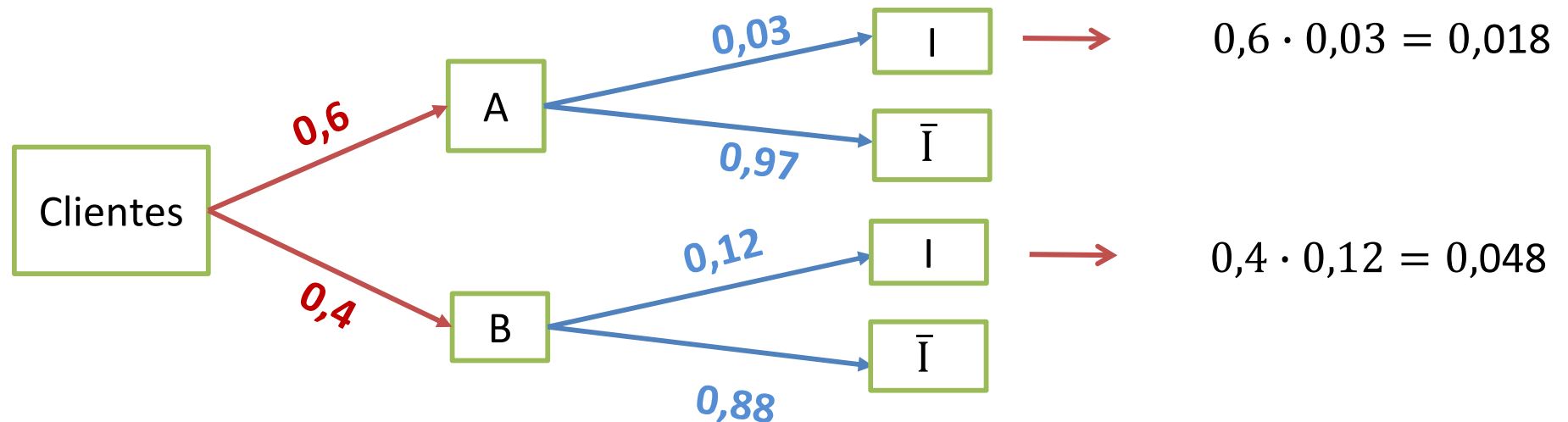
B = ingresos variables

Calculo:

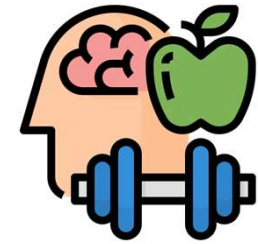
Primera rama: $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$

Segunda rama: $P(I | A) = 0.03$, $P(I | B) = 0.12$

I = impago, $\bar{I}$ = no impago



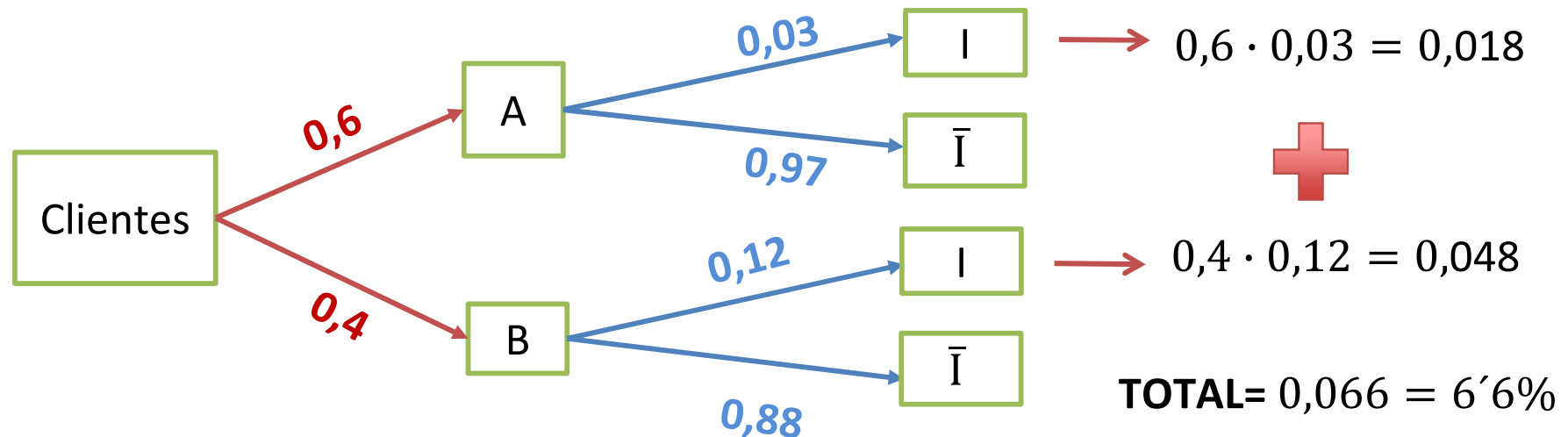
Solución



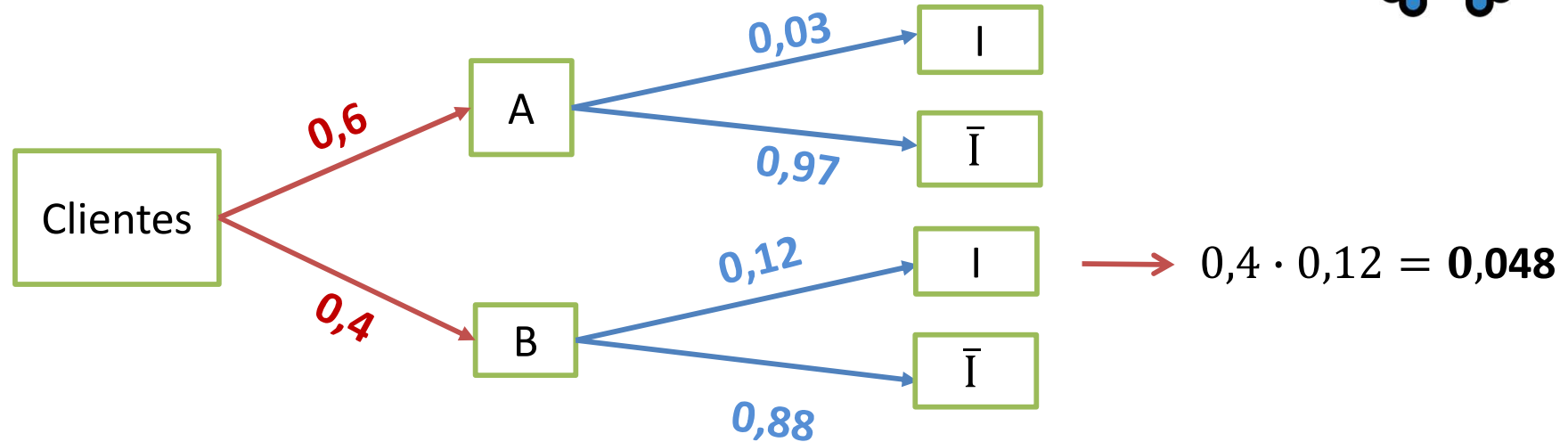
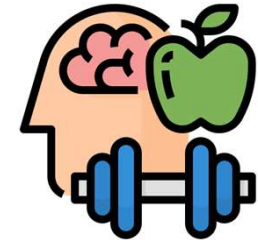
b) Probabilidad total

$$P(I) = P(A)P(I | A) + P(B)P(I | B) = 0,6 \cdot 0,03 + 0,4 \cdot 0,12$$
$$= 0,018 + 0,048 = 0,066$$

$$P(I) = 0,066 = 6'6\%$$



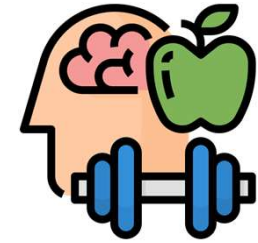
Solución



b) Teorema de Bayes

$$P(B | I) = \frac{P(B)P(I | B)}{P(I)} = \frac{0,4 \cdot 0,12}{0,066} = \frac{0,048}{0,066} = 0,727$$
$$P(B | I) \approx 72,7\%$$

Solución

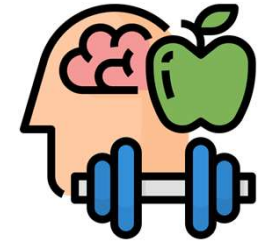


c) Interpretación (0,75 puntos)

Aunque solo el 40% de los clientes tiene ingresos variables, aproximadamente el **73% de los impagos provienen de ellos**.

El banco debería considerar a este grupo como **mayor riesgo crediticio** (posiblemente pedirle intereses más altos o mayores garantías).

Ejercicio 2



Una aseguradora clasifica los vehículos asegurados:

- 55% tienen más de 8 años
- 45% tienen 8 años o menos

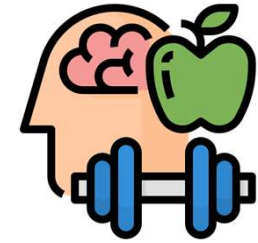
Se sabe que:

- El 10% de los vehículos antiguos sufre una avería grave anual.
- El 2% de los vehículos nuevos sufre una avería grave anual.

Se elige un vehículo al azar.

- Calcula la probabilidad de que sufra una avería grave.**
- Sabiendo que un vehículo ha sufrido avería grave, calcula la probabilidad de que sea antiguo.**
- ¿Por qué la aseguradora cobra más a los vehículos antiguos?**

Solución



1. Definimos:

A = vehículo antiguo, con más de 8 años de antigüedad

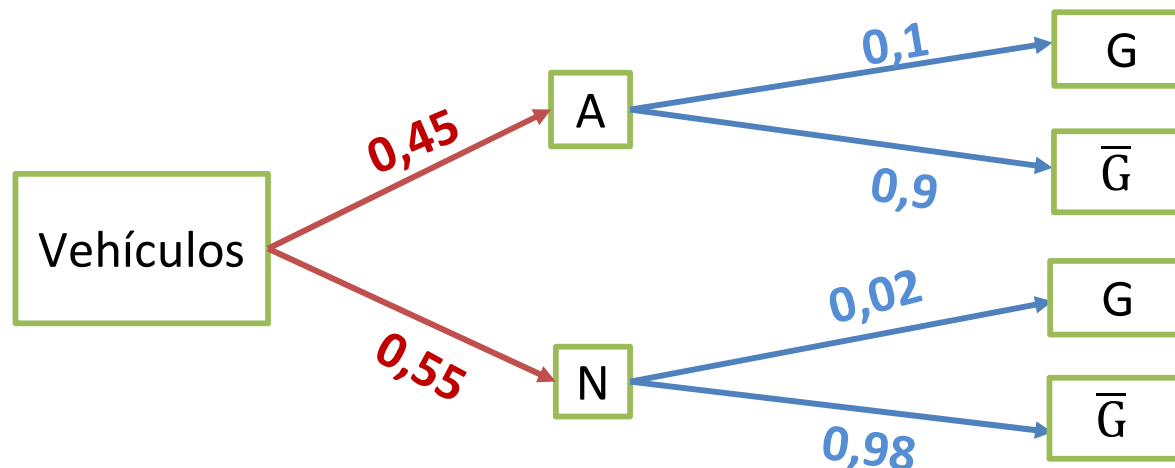
N = vehículo nuevo o con menos de 8 años de antigüedad

G = avería grave anual

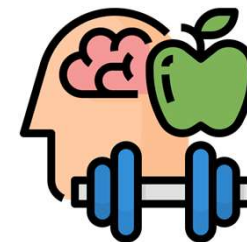
$\bar{G}$ = no tener una avería grave anual

2. Dibujamos un diagrama de árbol y calculamos $P(A)$, $P(G/A)$ y $P(G/N)$

$$P(A) = 0.55, P(N) = 0.45 \text{ y } P(G | A) = 0.10, P(G | N) = 0.02$$



Solución



a) Probabilidad total

$$P(G) = 0.55 \cdot 0.10 + 0.45 \cdot 0.02 = 0.055 + 0.009 = 0.064$$

$$P(G) = 6.4\%$$

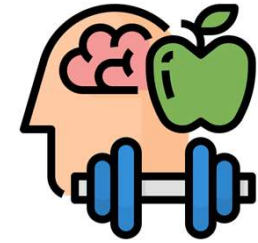
b) Bayes

$$P(A | G) = \frac{P(A)P(G | A)}{P(G)}$$

$$= \frac{0.55 \cdot 0.10}{0.064} = \frac{0.055}{0.064} = 0.859$$

$$P(A | G) \approx 85.9\%$$

Solución



c) Interpretación

Aunque solo el 55% de los vehículos son antiguos, casi el **86% de las averías graves provienen de ellos.**

Por eso la aseguradora:

- aumenta la prima
- o aplica franquicia mayor

Errores típicos



Los alumnos no suelen suspender por no saber... sino por **errores sistemáticos muy repetidos**.

En la ABAU no gana el que más sabe matemáticas.

Gana el que mejor explica matemáticamente lo que hace.

El bloque donde más puntos se escapan es el de PROBABILIDAD

✗ Confundir probabilidad condicionada

Escriben:

$$P(A | B) = P(B | A)$$

Es el error nº1 en Galicia.

¡No son iguales!

Errores típicos



✗ No usar el diagrama de árbol

Intentan hacerlo mentalmente → se equivocan en una rama y arrastran todo el ejercicio.

(Es el mayor predictor de suspenso en la pregunta de probabilidad.)

✗ Independientes vs incompatibles

Confunden:

- incompatibles → no pueden ocurrir juntos
- independientes → no se influyen

Muchos alumnos creen que significan lo mismo.

Errores típicos



✗ No calcular la probabilidad total ANTES de Bayes

La mayoría calcula directamente:

$$P(A | B) = \frac{P(A)P(B | A)}{P(B)}$$

...pero **no** calcula $P(B)$.

Resultado → **todo el apartado incorrecto.**

✗ No interpretar el resultado

La CIUGA suele pedir: “interprete el resultado”

Y los alumnos escriben: “0,72”.

Eso vale **0 puntos**.

Debe aparecer una frase contextual: “El 72% de los impagos provienen de...”

Errores típicos



✗ No justificar

Especialmente en probabilidad y optimización, se pierde TODA la puntuación.

✗ No declarar quienes son los sucesos.

Es uno de los fallos más penalizados en Galicia y muchos alumnos ni siquiera saben qué es lo que está mal.

Los alumnos empiezan así: $P = 0.6 \cdot 0.03 + 0.4 \cdot 0.12$

El cálculo puede estar bien...

pero **matemáticamente no significa NADA** si no sabemos qué representa cada letra.

Para el corrector es un problema: no puede comprobar si el razonamiento es correcto → **pierden puntuación, aunque el resultado final sea bueno.**