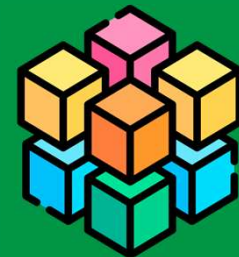


Probabilidad

Conceptos y Aplicaciones

Matemáticas Aplicadas II



Aplicaciones



¿Alguna vez te has preguntado cómo las compañías de seguros calculan el precio de tu seguro?

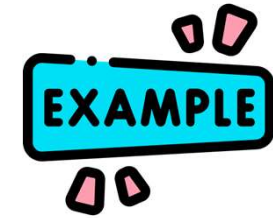
La respuesta está en la probabilidad y la estadística que están presentes en TODOS los campos profesionales.

Tomar decisiones financieras, elegir la mejor ruta para evitar el tráfico, averiguar la intención de voto para ganar unas elecciones etc.

Estas herramientas nos ayudan a interpretar el mundo de manera cuantitativa.

Da igual la profesión o carrera que elijas: si no sabes de estadística serás un **zoquete**, ya sé que suena fuerte, pero es seguro al 100%

Empezamos con un ejemplo



Medida de incertidumbre

Para el viaje de graduación los alumnos de 2º de Bach montan una rifa en el instituto, en total hay 100 papeletas. Juana compra 20 y Marcos compra 1.

Pregunta:

- ¿Quién tiene más posibilidades de ganar el sorteo?
- ¿Cuántas posibilidades tienen, en principio, cada uno?



Idea intuitiva

Es un sorteo al azar, **aleatorio**, cualquiera puede ganar, pero, en principio, antes del sorteo, **a priori**, el sentido común nos dice que Juana tiene más posibilidades que Marcos, de hecho, tiene 20 veces más probabilidades que Marcos.

Si llamo J al suceso “*que gane Juana*”, M = “*que gane Marcos*” y P a la probabilidad o posibilidad, entonces tendremos:

$$P(J) = \frac{20}{100} = 20\% = 0.2 \quad y \quad P(M) = \frac{1}{100} = 1\% = 0,01$$



Idea intuitiva

Medida de incertidumbre

👉 La probabilidad mide la posibilidad de que ocurra un suceso.

Conceptos básicos



Experimento aleatorio

proceso cuyo resultado no puede predecirse con seguridad.

Ejemplos:

- Tirar un dado
- Encuesta electoral
- Elegir al azar un alumno de clase
- Selección aleatoria de una vivienda para un censo

Conceptos básicos



Suceso imposible

$$P(A) = 0$$

Nunca puede ocurrir

Ejemplos:

- Que gane el sorteo alguien que no tiene ninguna rifa.
- Sacar una flor al tirar un dado.
- Que una planta sea un alumno de clase.
- Aprobar matemáticas sin hacer el examen

Conceptos básicos



Suceso seguro

Ocurre siempre, el 100% de las veces

$$P(S) = 1$$

Ejemplos:

- Ganar el sorteo si compraste TODAS las rifas sin excepción.
- Tirar un dado y que salga un número del 1 al 6
- Elegir al azar un alumno de clase y que sea una persona
- Que una persona se muera al final de su vida

Conceptos básicos



Sucesos incompatibles

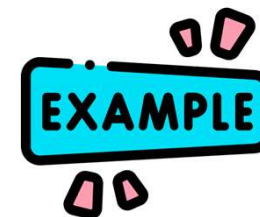
Nunca pueden ocurrir al mismo tiempo

$$P(A \cap B) = 0$$

Ejemplos:

- NO tener ninguna rifa y que te toque el sorteo.
- Tirar un dado y que salga el número 25
- Elegir al azar un alumno de clase y que no sea una persona
- Ser una persona y vivir eternamente

Ejemplo



Un fondo de inversión tiene 100 activos:

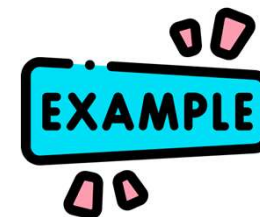
- 40 de renta fija
- 35 de renta variable
- 25 inmobiliarios

Se elige uno al azar.

- Probabilidad de que sea de renta variable.
- Probabilidad de que no sea inmobiliario.
- ¿Son sucesos incompatibles “renta fija” y “renta variable”?

Justifica la respuesta.

Ejemplo



Solución:

$$P(\text{Variable}) = \frac{35}{100} = 0.35 = 35\%$$

$$P(\text{No inmobiliario}) = \frac{75}{100} = 0.75 = 75\%$$

Sí, son **incompatibles** porque un activo no puede pertenecer simultáneamente a dos categorías.



Idea intuitiva

Regla de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Ejemplo:

Lanzamos un dado al aire y miramos el número que sale, calcular la probabilidad de sacar un 5:

Casos favorables = 1

Casos posibles = 6

$$P(5) = \frac{1}{6} = 0,1666 \dots = 16,67\%$$

Interpretación



Ejemplo 1 — Encuesta

En una clase de 30 alumnos: 18 usan transporte público y 12 no.
Si elegimos un alumno al azar:

$$P(\text{transporte público}) = 18/30 = 0.6 = 60\%$$

👉 esto es exactamente lo que hacen los institutos de estadística.

Ejemplo 2 — Desempleo juvenil

En un barrio: 80 jóvenes trabajan y 20 no

$$P(\text{desempleo juvenil}) = 20/100 = 0.2 = 20\%$$

Interpretación:

0.2 significa que, de cada 10 jóvenes elegidos al azar, aproximadamente 2 estarán en paro.

Conceptos básicos



Axiomas de Kolmogorov

1 La probabilidad siempre es positiva

$$0 \leq P(A)$$



No existen probabilidades negativas.

2 La probabilidad total es 1

$$P(S) = 1$$



Algo seguro tiene probabilidad 1 (100%).

3 Sucesos **incompatibles** se suman



Si no pueden ocurrir a la vez: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Conceptos básicos



Suceso complementario

Es el suceso contrario

$$\bar{A} = \text{no } A, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Ejemplos:

- El suceso complementario de ganar el sorteo, es no ganarlo.
- El suceso complementario de sacar un 5 al tirar un dado, es sacar 1, 2, 3, 4 o 6.
- El suceso contrario a sacar par al tirar un dado, es sacar impar.

Conceptos básicos



Probabilidad condicionada

La probabilidad de que ocurra A si sabemos que antes ha ocurrido B.

Sabiendo con anterioridad una información de interés calculamos la probabilidad de un suceso.

Se llama probabilidad **a posteriori**.

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$$

Ejemplos:

- La probabilidad de que se produzca un impago de la hipoteca si sabemos que el cliente está en el paro.
- Sabiendo que hemos sacado un número par calcular la probabilidad de sacar un 4

Conceptos básicos



Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes si uno no influye en el otro, que ocurra A no añade información sobre B y viceversa

A y B son independientes si $P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$

Ejemplos:

- Sacar una carta y que sea un rey y sacar una carta y que sea de oros.
- Que tenga trabajo y me toque la lotería.

Conceptos básicos



Regla de Bayes

Si despejamos en la fórmula:

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$$

También se le conoce como regla de Bayes

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$A \text{ y } B \text{ son INDEPENDIENTES} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esta propiedad se usa tanto, que muchas veces se sustituye por la propia definición

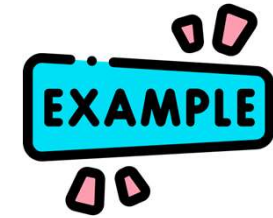
Errores a evitar



- Incompatibles: $P(A \cap B) = 0$
- Independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

No son lo mismo. Es un error muy común en Selectividad

Ejemplo



Sacamos **una carta al azar** de una baraja española, 40 cartas.

Definimos:

R = “la carta es un Rey”

O = “la carta es de Oros”

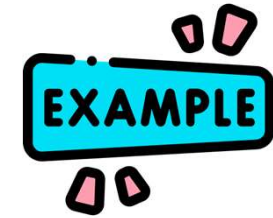
1 ¿Son incompatibles?

Dos sucesos son incompatibles si **no pueden ocurrir a la vez**.

¿Existe el Rey de Oros? Sí, por tanto: $R \cap O \neq \emptyset$ $P(R \cap O) \neq 0$

👉 **NO son incompatibles**

Ejemplo



② ¿Son independientes?

calculamos:

$$P(R) = 4/40 = 1/10, \text{ hay 4 reyes}$$

$$P(O) = 10/40 = 1/4, \text{ hay 10 oros}$$

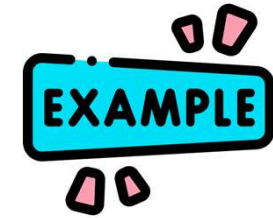
Y sólo hay un rey de oros $P(R \cap O) = 1/40$

Comprobamos independencia:

$$P(R)P(O) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{40} = P(R \cap O)$$

👉 **SON independientes:** saber que la carta es de oros no me dice nada sobre si es, o no, una figura, y saber que es un rey no me aporta información sobre de qué palo es.

El contraejemplo



Misma baraja.

R= “la carta es un Rey”

C = “la carta es un Caballo”

¿Puede ser Rey y Caballo a la vez? **No. Son incompatibles:** $P(R \cap C) = 0$

Pero si comprobamos su independencia:

$$P(R) = 4/40$$

$$P(C) = 4/40$$

$$P(R)P(C) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{16}{1600} > 0$$

$$0 = P(R \cap C) \neq P(R) \cdot P(C)$$

👉 Los incompatibles **NO** son independientes, **NUNCA**

Errores a evitar



Incompatibles → no pueden ocurrir juntos

Independientes → pueden ocurrir juntos, pero no se influyen

Explicación intuitiva

- Incompatibles: elegir legalmente “paro” y “empleo” a la vez → imposible.
- Independientes: que hoy llueva y que un cliente compre online → no tienen relación.

Fórmulas



$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(S) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \mathbf{P(A \cap B)}$$

$$\text{si } P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A y B son independientes si $P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$

A y B son INDEPENDIENTES $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$