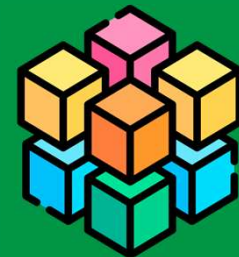


Integral definida

Conceptos y Aplicaciones

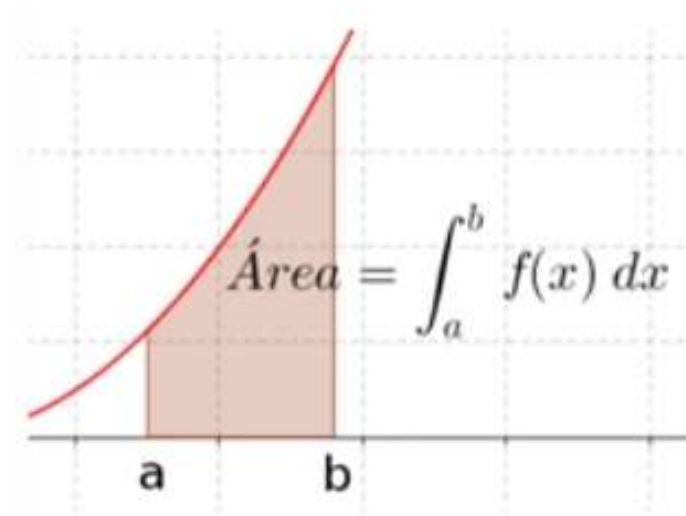
Matemáticas Aplicadas II



Idea intuitiva



$$\int_a^b f(x) dx$$



representa el **resultado de acumular los valores de la función** entre $x = a$ y $x = b$.

Conceptos básicos



Ideas clave

- Se calcula usando una **función primitiva**.
- Depende del intervalo: si cambiamos los extremos, a o b , cambia el valor.
- El resultado es un **número real**, no una función.

Cómo calcularla



Regla de Barrow

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Pasos:

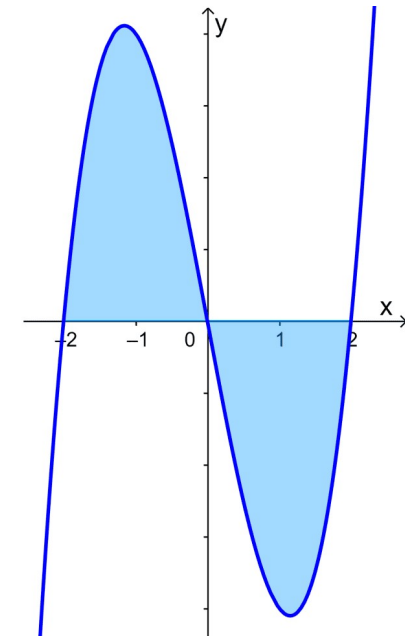
- 1) Calcular la primitiva $F(x)$.
- 2) Calcular el valor de la primitiva en b .
- 3) Calcular el valor de la primitiva en a .
- 4) Restar.

Interpretación geométrica



Representa el área neta

- Área **por encima** del eje X $\rightarrow$ positiva
- Área **por debajo** del eje X $\rightarrow$ negativa



📌 La integral definida representa el área neta, **no el área total**.

Aplicaciones



Integral y economía (acumulación)

La integral se interpreta como **acumulación de magnitudes**:

- Coste marginal $\rightarrow$ coste total
- Ingreso marginal $\rightarrow$ ingreso total
- Tasa de variación $\rightarrow$ variación acumulada

⚠ No se habla de áreas, sino de **cantidades acumuladas**.

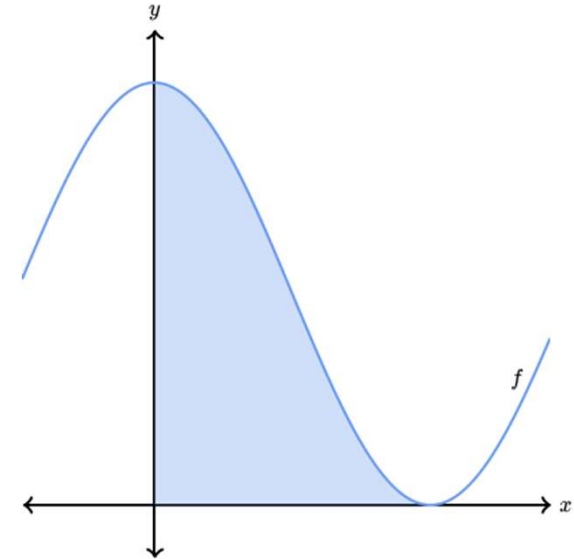
Aplicaciones



Área bajo una curva

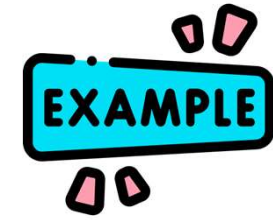
Si la función **no cambia de signo** entre los extremos del intervalo $[a, b]$ y además **es positiva**, la integral nos da el área **bajo** la gráfica, comprendida entre el **eje X** y los **extremos del intervalo**.

$$\text{Área total} = \int_a^b |f(x)| \, dx$$



⚠ Hay que tener en cuenta los **cambios de signo** de la función, y usar el **valor absoluto**

Ejemplo



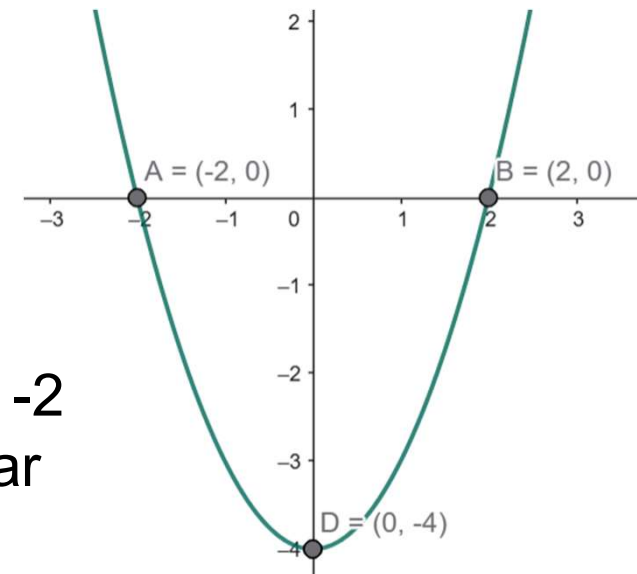
Vamos a calcular el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 4$ y el eje X.

Paso 1: calculamos los puntos de corte de la gráfica.

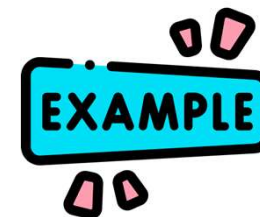
$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Paso 2: evaluamos el signo de la función entre los puntos de corte, lo más recomendable es dibujarla.

Se aprecia que la función es negativa entre -2 y 2, entre esos dos puntos no puede cambiar de signo



Ejemplo



Paso 3: Calculamos la primitiva de la función.

$$\int (x^2 - 4x) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + k$$

Paso 4: Regla de Barrow: calculamos el valor en los extremos y lo restamos

$$F(2) - F(-2) = \frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} - 8 \right) = -\frac{32}{3}$$

Paso 5: Calculamos el valor absoluto

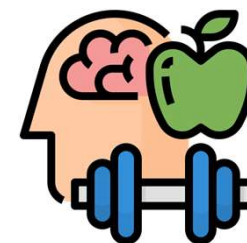
$$\text{Área} = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u}^2 \text{ de medida}$$

Errores típicos



- No separar intervalos cuando la función cambia de signo.
- Confundir integral con área.
- Olvidar el valor absoluto cuando piden **área total**.

Ejercicio



El coste marginal (en euros por unidad) de producir x unidades viene dado por la función:

$$C'(x) = 2x + 10$$

Calcula el **coste total adicional** al aumentar la producción de 5 a 10 unidades.

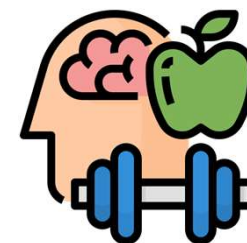
Paso 1: Plantear la integral

$$\text{Coste adicional} = \int_5^{10} (2x + 10) dx$$

Paso 2: Calcular la Primitiva

$$\int (2x + 10) dx = x^2 + 10x$$

Ejercicio



Paso 3: Regla de Barrow

$$\begin{aligned} & \left[x^2 + 10x \right]_5^{10} \\ &= (100 + 100) - (25 + 50) = 200 - 75 = 125 \end{aligned}$$

Paso 4: Interpretación

✓ El coste total adicional de producir de 5 a 10 unidades es **125 €**.